Nombres premiers jumeaux, triplés, quadruplés ... : tout ce qu'on peut en dire

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1]

Résumé.

Les nombres premiers ont toujours fasciné les mathématiciens, qu'ils soient professionnels ou amateurs. Nous présentons ici, dans un contenu et un style accessibles aux lycéens, ce qu'on peut dire de nos jours à propos de trois familles d'entre eux : les jumeaux, les triplés et les quadruplés.

I Les nombres premiers dits jumeaux

Des nombres premiers jumeaux sont des nombres premiers qui se suivent. "Se suivent" ne signifie pas "se suivent immédiatement" puisqu'après un nombre premier qui est toujours impair (à part le premier d'entre eux, 2) il y a un nombre pair qui, lui, n'est pas premier (puisque divisible par 2). Ces nombres premiers qui se suivent sont qualifiés de *jumeaux* ; bref, mis à part le cas particulier de $(2, 3)$, il s'agit de nombres premiers dont la différence est 2.

Voici la suite des 35 couples (ou paires ordonnées) de nombres premiers jumeaux de 3 jusqu'à 1000 :

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109),$
$(137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271),$
$(281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571),$
$(599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859),$
$(881, 883).$

Les deux plus grands nombres premiers jumeaux connus à ce jour (au moment où j'écris ces lignes [2]) sont :

$$2\ 996\ 863\ 034\ 895 \times 2^{1\ 290\ 000} \pm 1\,; \qquad (1)$$

pour leur écriture décimale, ils nécessitent 388 342 chiffres. Comme tous les records, il est destiné à être battu...

Mais, y a-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux (bref, ça ne s'arrête jamais), ou bien à partir d'un entier assez grand il n'y en a plus ? C'est la conjecture sur l'infinitude des nombres premiers jumeaux : **"Il y a une infinité de nombres premiers n tels que $n + 2$ soit aussi premier"**. La question est toujours sans réponse... depuis qu'elle fut formulée, entre autres, par le mathématicien français A. de Polignac en 1849 [3].

---

1. Université Paul Sabatier de Toulouse
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 09
Mél. : jbhu@math.univ-toulouse.fr
Site web professionnel : www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/

2. en 2023 donc... 2023 n'est pas un nombre premier ; nous devons attendre 2027 et 2029 pour les prochains nombres premiers jumeaux.

3. A vrai dire, la conjecture de Polignac est plus générale : *Pour tout entier pair $2k$, c'est-à-dire $2, 4, 6$... il existe une infinité de couples de nombres premiers consécutifs dont la différence vaut $2k$.* Autre

Des avancées notables sur le sujet ont été faites ces dernières années, depuis 2013 plus précisément. En termes mathématiques, cela se traduit par : $p_{k+1} - p_k < N_p$ une infinité de fois, où l'entier N_p a été progressivement descendu jusqu'à 270. On est encore loin du résultat conjecturé : $p_{k+1} - p_k = 2$ une infinité de fois, mais l'étau se resserre !

Même s'il y a des conjectures similaires pour les triplés ou quadruplés de nombres premiers (voir plus bas), celle sur les nombres premiers jumeaux reste la plus célèbre.

Du point de vue théorie mathématique, on sait un certain nombre de choses importantes sur la suite des nombres premiers jumeaux, par exemple :

- Mis à part le couple de démarrage $(3, 5)$, ils sont tous de la forme

$$(6n - 1, 6n + 1)\,, \tag{2}$$

avec un entier $n \geqslant 1$, bref ce sont toujours *les premiers voisins des multiples de 6*. Normal puisque tout nombre premier est nécessairement de la forme $6n - 1$ ou $6n + 1$.

- A la différence de la série des inverses des nombres premiers p_k qui diverge (c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$), la série des inverses des nombres premiers jumeaux converge,

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + ... =: B_2 < +\infty. \tag{3}$$

C'est un résultat assez étonnant, dû au mathématicien norvégien V. Brun en 1919 ; malheureusement il ne permet pas de conclure à la finitude ou à l'infinitude des nombres premiers jumeaux. La quantité B_2 au-dessus (appelée constante B_2 de V. Brun) peut être calculée numériquement de manière aussi précise que voulue, elle vaut approximativement $1,90$.

Tout aussi étonnant est que l'on ait pu démontrer la convergence de la série signalée en (3) alors que l'on ne sait même pas si la sommation concerne un nombre fini ou un nombre infini de termes ! La méthode dite de "crible" de Brun, trop compliquée pour être expliquée en peu de mots ici, conduit à une majoration

$$\mathrm{Card}\{p : p \text{ et } p + 2 \text{ premiers}\} \leqslant K \frac{x[\ln(\ln x)]^2}{(\ln x)^2}, \tag{4}$$

où $K > 0$ est une constante. La fonction apparaissant dans le membre de droite de (4), bien que n'étant pas la plus fine possible, a des propriétés d'intégrabilité sur $[x_0, +\infty)$ suffisantes pour conduire à la conclusion suivante : Par sommation partielle, cette majoration (4) implique que la somme des inverses des nombres premiers jumeaux converge.

manière de dire les choses : *Tout nombre pair $2k$ s'écrit une infinité de fois comme la différence de deux nombres premiers consécutifs.*

Le cas qui nous préoccupe ici est celui de $2k = 2$.

II Triplés de nombres premiers

On appelle *triplé* (ou *triplet*) de nombres premiers un ensemble de 3 nombres premiers qui se suivent, par exemple $(67, 71, 73)$ ou $(107, 109, 113)$; noter sur ces exemples qu'il y a un saut de 4 entre les deux premiers ou entre les deux derniers nombres premiers.

On aurait pu commencer par le début, c'est-à-dire avec $(2, 3, 5)$ et $(3, 5, 7)$ ... mais ces deux cas sont les seuls où les 3 nombres se suivent (c'est-à-dire avec un saut minimal de 2 entre les nombres premiers consécutifs). Démontrons ce résultat. Considérons un triplé $(p_k, p_k + 2, p_k + 4)$ de nombres premiers avec $p_k > 3$. Alors, les restes de la division euclidienne de $(p_k, p_k + 2, p_k + 4)$ par 3 sont $(0, 2, 1), (1, 0, 2)$ et $(2, 1, 0)$, donc l'un des trois termes $p_k, p_k + 2, p_k + 4$ est divisible par 3. Ceci est incompatible avec le statut de nombre premier de $p_k, p_k + 2, p_k + 4$ (la seule possibilité eût été $p_k = 3$, exclue dans le champ couvert par la démonstration, mais acceptable comme on l'a vu dans l'exemple plus haut). A part les deux premiers exemples, les triplés de nombres premiers sont nécessairement de la forme

$$(p_k, p_k + 2, p_k + 6) \text{ ou } (p_k, p_k + 4, p_k + 6). \tag{5}$$

On conjecture qu'il y a une infinité de triplés de chacun des deux types. Il n'y a pas d'alternance entre le saut de 4 entre les deux premiers et entre les deux derniers.

Exemples : $(5, 7, 11), (7, 11, 13)$,.... il y en a ainsi 30 jusqu'à 1000, le dernier étant $(881, 883, 887)$. Une particularité : 103 est un nombre premier appartenant à 3 triplés, l'aîné dans $(97, 101, 103)$, le second dans $(101, 103, 107)$ et le plus jeune dans $(103, 107, 109)$.

Dans les triplés de nombres premiers (*cf.* le format (5)), il y a forcément des nombres premiers jumeaux (le contraire eût été étonnant !) : $(p_k, p_k + 2)$ ou bien $(p_k + 2, p_k + 4)$.

III Quadruplés de nombres premiers

Le point de départ est la constatation suivante, concernant l'entier 60 :

60 est la somme de deux nombres premiers consécutifs (appelés encore *jumeaux*) : $29 + 31$;

60 est la somme de *quatre* nombres premiers consécutifs : $11 + 13 + 17 + 19$.

$(11, 13), (17, 19)$ sont des nombres premiers *quadruplés* (au sens de 2 couples de nombres premiers jumeaux qui se suivent, avec un écart minimal, puisqu'ici seul le nombre composé 15 se faufile entre les deux couples). On dit aussi *quadruplet* de nombres premiers. Le premier cas de quadruplés, au sens qui vient d'être défini est $((2, 3), (5, 7))$ mais concédons qu'il est un peu particulier en raison de la présence de 2. Le second, $((5, 7), (11, 13))$ "chevauche" sur le premier. Le "vrai" premier cas générique est $((\mathbf{11}, \mathbf{13}), (\mathbf{17}, \mathbf{19}))$ et il sert d'ailleurs de brique de base à la construction des quadruplés qui viennent après. De manière générale :

- Pour tous les quadruplés suivants, les entiers qui se trouvent dans les 3 "trous" de la séquence des deux couples de nombres premiers jumeaux sont 3 nombres composés : 1 nombre pair, 1 multiple de 15, et de nouveau 1 nombre pair. Avec ce que nous avons décrit jusqu'ici (trois exemples), nous avons épuisé tous les cas jusqu'à 100. Le premier exemple qui vient après est $((101, 103), (107, 109))$, c'est-à-dire "90 + la brique $((11, 13), (17, 19))$" ; les nombres composés qui se faufilent entre les couples $(101, 103)$ et $(107, 109)$ sont 104 (pair), 105 (multiple de 15) et 106 (pair à nouveau).

- Tous les nombres premiers quadruplés, à part $((5,7),(11,13))$, sont nécessairement de la forme

$$((30n+11, 30n+13), (30n+17, 30n+19)), \tag{6}$$

avec un entier n, ceci afin d'assurer qu'aucun des quatre entiers candidats ne soit divisible par $2, 3$ ou 5 (raison : $2 \times 3 \times 5 = 30$), mais ce format n'est qu'une condition nécessaire ; par exemple,

$$((30 \times 4 + 11, 30 \times 4 + 13), (30 \times 4 + 17, 30 \times 4 + 19)) = ((131, 133), (137, 139)) \tag{7}$$

est bien de la forme décrite en (6) mais n'est pas un quadruplé de nombres premiers car $133 = 7 \times 19$ n'est pas premier.

Quant à savoir s'il y a une infinité de nombres premiers quadruplés, la question reste toujours irrésolue... Et la conjecture sur l'infinité de couples de nombres premiers jumeaux, avec tous les progrès accomplis ces dernières années à son sujet, ne permet pas d'avancer sur cette question...

Pour la bonne bouche, voici les quadruplés de nombres premiers entre 109 et 2089 :

$$((191,193),(197,199)); ((821,823),(827,829)); ((1481,1483),(1487,1489));$$
$$((1871,1873),(1877,1879)); ((2081,2083),(2087,2089)).$$

D'après la condition nécessaire (6) vue plus haut :

- L'écart entre les deux couples de nombres premiers jumeaux d'un quadruplé est de 4.
- L'écart entre deux quadruplés successifs est de 30 au moins. Mais pour avoir cet écart minimal, il faut attendre longtemps, le premier exemple est

$((1006301, 1006303), (1006307, 1006309))$ suivi de $((1006331, 1006333), (1006337, 1006339))$.

Comme pour les nombres premiers jumeaux, il est possible de sommer la série des inverses des nombres premiers apparaissant dans les quadruplés,

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{103}+\frac{1}{107}+\frac{1}{109}\right)+...,$$

cela donne $0,87$ approximativement (constante B_4 de V. Brun).

Conclusion

On dit parfois des nombres premiers que *"ce sont des bons amis... mais qui nous posent des problèmes"*. Les exemples présentés dans cette note montrent, s'il était encore nécessaire, que beaucoup d'énigmes entourent encore ces objets et que les progrès se font à petits pas.