Dérivation ou primitivation, quand tu nous tiens...

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Institut de mathématiques
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9, France

www.math.univ-toulouse.fr/ ~jbhu/

"Dériver, primitiver, intégrer", des termes barbares pour le commun des mortels mais qui résonnent fort pour l'élève ou l'étudiant en sciences, plus particulièrement à l'occasion de sa formation en mathématiques. Un article récent publié dans le bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques (APMEP) ([1]) a réveillé en moi des souvenirs enfouis, agréables je dois dire, tant ces sujets d'analyse des fonctions numériques de la variable réelle m'ont toujours intéressé. La présente note a pour seul but de compléter ce qui a été présenté dans la référence [1].

Introduction.

Comme toujours en mathématiques, commençons par préciser de quoi on parle (ah ! si tous les hommes politiques pouvaient faire de même), c'est-à-dire par donner des définitions.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (que l'on peut prendre égal à toute la droite réelle, pour fixer les idées).

- On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction-dérivée* (sur I) s'il existe une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable (sur I) telle que $F' = f$ (c'est-à-dire telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$). J'aime bien aussi le qualificatif de *primitivable* pour ces fonctions ; F est une *primitive* de f sur I et, si l'on connaît une primitive de f, on connaît toutes les autres puisqu'elles diffèrent simplement d'une constante. L'Anglais utilise aussi le mot *antiderivative* au lieu de primitive, ce qui est satisfaisant car cela montre comment la dérivation et la primitivation (ou anti-dérivation) sont inverses l'une de l'autre. À cet instant, je récuse l'appellation d'*intégrale indéfinie* et la notation qui va avec, $\int f\ dx$, car génératrice de trop d'ambiguïtés. On désigne par $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions qui sont des fonctions-dérivées (sur I) ou des fonctions primitivables (sur I).

Les règles de calcul sur les dérivées (regroupées en ce qui est communément appelé le *calcul différentiel*) nous indiquent les deux résultats suivants : si f et g sont deux fonctions-dérivées, il en est de même de $f + g$; si f est une fonction-dérivée et si C est une constante réelle, Cf est encore une fonction-dérivée. Une question qui vient maintenant naturellement à l'esprit est : *quid du produit de deux fonctions-dérivées ?* La règle de dérivation du produit de deux fonctions ne permet pas de répondre immédiatement à la question, sauf pour l'élève distrait qui se satisferait bien d'avoir $(fg)' = f'g'$... Nous aborderons cette question plus bas, au paragraphe 3.

- Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue* sur I si elle est continue en chacun des points de I. Désignons par $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I. Ici aussi, les propriétés de base de l'Analyse induisent que $\mathcal{C}(I)$ est stable par addition, par multiplication par un scalaire, mais aussi par multiplication. Voici donc une première différence avec la classe de fonctions considérée au-dessus : le produit de deux fonctions continues est (automatiquement) continue.

- Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite vérifier *la propriété des valeurs intermédiaires* (sur I) si l'image $f(J)$ de tout intervalle J (contenu dans I) est un intervalle ; bref, f "ne crée pas de trous" : si J est "d'un seul tenant", il en sera de même de l'ensemble image $f(J)$. L'appellation "propriété des valeurs intermédiaires" (on dit aussi "propriété de BOLZANO") vient du fait que la propriété qui vient d'être énoncée peut se lire aussi de la façon suivante : si $f(a)$ et $f(b)$ sont les valeurs prises par f aux extrémités de $[a, b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ (et donc "intermédiaire") est l'image $f(c)$ par f d'un certain $c \in [a, b]$. Désignons par $\mathcal{VI}(I)$ l'ensemble des fonctions qui vérifient la propriété des valeurs intermédiaires sur I. L'ensemble $\mathcal{VI}(I)$ est un "fourre-tout" qui ne jouit d'aucune propriété (structurelle) intéressante ; comme nous le verrons avec des exemples au paragraphe 2, $\mathcal{VI}(I)$ est une classe de fonctions qui n'est ni stable par addition ni stable par multiplication.

Une des propriétés essentielles des fonctions continues est qu'elles vérifient la propriété des valeurs intermédiaires. En fait, une fonction-dérivée est "entre les deux". Du point de vue ensembliste, l'enchaînement entre les trois classes de fonctions évoquées au-dessus est :

$$\mathcal{C}(I) \subset \mathcal{D}(I) \subset \mathcal{VI}(I). \tag{1}$$

Nous en venons maintenant à l'objet principal de cette note : commenter ces inclusions, plus spécifiquement les "trous" entre ces classes de fonctions, et considérer l'effet du produit de deux fonctions-dérivées.

1. L'inclusion $\mathcal{C}(I) \subset \mathcal{D}(I)$: toute fonction continue est une fonction-dérivée.

"Toute fonction continue est une fonction-dérivée" ou *"Toute fonction continue est primitivable"*... en voilà un théorème important, un des piliers des résultats d'Analyse que les étudiants qui nous arrivent du lycée doivent connaître. C'est ici, et seulement ici, que la notion *d'intégrale d'une fonction continue sur un segment* entre en jeu[1]. Ce lien, fondamental, entre *primitivation* et *intégration* prend l'une des deux formes suivantes :

Théorème 1. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive (quelconque) de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Théorème 2. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I et si $c \in I$, alors la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en c.

1. $\int_a^b f(x)\, dx$ se lit bien "somme de a à b...", rappelant ainsi que le symbole $\int$ vient d'un S étiré. Je préfère cette appellation originelle à "intégrale de a à b...".

C'est le Théorème 1 que les étudiants nous arrivant de classes Terminales des lycées connaissent ; la formule (2) leur permet de faire le lien entre la notion "physique" représentée par $\int_a^b f(x)\,dx$ (l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de la fonction et les axes d'équations $y = 0, x = a$ et $x = b$) et le concept de primitive d'une fonction [2]. La formulation du Théorème 2 est plus subtile et profonde, pas étonnant qu'on l'appelle dans le monde entier "the fundamental theorem of Calculus". Il nous faut l'expliquer et la rabâcher jusqu'en troisième année d'université. Reconnaissons que la maîtrise de ce lien entre deux concepts a priori différents, la primitivation et l'intégration, demande un peu de recul et de maturité.

Qu'en est-il du "trou" entre une fonction continue et une fonction-dérivée ? C'est le moment de donner un exemple de fonction-dérivée qui n'est pas continue, un grand classique du genre à vrai dire. La fonction sous-jacente est $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, prolongée en $x = 0$ par 0, mais nous allons un peu la contourner. Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f_1(x) = \cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0\,;\ f_1(0) = 0. \tag{3}$$

Cette fonction est continue en tout point $x \neq 0$ mais pas en 0. C'est aussi une fonction-dérivée, ce qui ne se voit pas immédiatement. Voici comment. Soit $F_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$F_1(x) = -x^2 \sin(\frac{1}{x}) + 2\int_0^x t \sin(\frac{1}{t})\,dt \text{ si } x \neq 0\,;\ F_1(0) = 0. \tag{4}$$

La fonction $t\sin(\frac{1}{t})$ a été prolongée par la valeur 0 au point $t = 0$ de manière à en faire une fonction continue. Ainsi –et cela a été fait pour !– la fonction F_1 est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ (même en 0 !) avec $F_1' = f_1$. Une petite cousine à F_1 consisterait à prendre

$$G_1(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x}) - 2\int_0^x t \cos(\frac{1}{t})\,dt \text{ si } x \neq 0\,;\ G_1(0) = 0. \tag{5}$$

Bien sûr, $G_1' = g_1$, où $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est comme suit :

$$g_1(x) = \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0\,;\ g_1(0) = 0. \tag{6}$$

Deux remarques à propos de la fonction f_1 (ou g_1) :

- Soit $0 < r \leqslant 1$. Alors, l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ en lesquels f_1 prend la valeur r est constitué des points de la forme

$$x_k = \pm\frac{1}{\theta + 2k\pi}, \text{où } \cos(\theta) = r \text{ et } k \text{ est un entier relatif.} \tag{7}$$

2. Je regrette néanmoins qu'on fasse trop tôt cette "coagulation" entre les notions d'intégrale et de primitive. Après tout, quand on veut illustrer le lien entre la notion d'intégrale (simple) et celle d'aire de la partie du plan sous le graphe de la fonction, on commence par considérer des fonctions en escalier... qui, précisément, n'ont pas de primitives...

Ainsi, ces points x_k s'accumulent en 0 quand $k \to +\infty$, mais le point-limite 0 n'est pas dans cet ensemble ($f_1(0) = 0 \neq r$). C'est une différence avec les fonctions continues : si f_1 avait été continue, l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ tels que $f_1(x) = r$ eût été fermé.

- Si on "ramasse" toutes les limites des suites (convergentes) de dérivées $(F_1'(u_k) = f_1(u_k))_k$, ou les $(u_k)_k$ sont des suites convergeant vers 0, on récupère tout le segment $[-1, 1]$. Mieux que $F_1'(0) = f_1(0) = 0$, cet ensemble de limites donne une meilleure idée de l'information recueillie sur le comportement de F_1 autour de 0. Nous y reviendrons à la fin de la note (commentaire du sous-paragraphe 4.3).

Terminons ce paragraphe en signalant une propriété intéressante qui montre qu'une fonction-dérivée est, quoi qu'il arrive, continue en "beaucoup" de points : si f est dérivable sur I, alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans I.

2. L'inclusion $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{VI}(I)$: Le théorème de G.Darboux**.**

Un résultat assez extraordinaire de G.Darboux en 1875 dit ceci :

Théorème 3. Si f est une fonction-dérivée sur I, alors elle y vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Ainsi, sans être nécessairement continue, le seul fait d'être une fonction-dérivée assure à f cette propriété de ne pas "créer de trous". Je ne sais pas quel fut le cheminement ou la motivation de G.Darboux pour arriver à ce résultat... Quoi qu'il en soit, pour mes étudiants, c'est une façon simple de montrer que des fonctions comme

$$f_2(x) = -1 \text{ si } x < 0\,;\ 1 \text{ si } x > 0\,;\ \text{ce qu'on veut en } x = 0\,; \tag{8}$$

ne peut être une fonction-dérivée.

Comment démontre-t-on le théorème de Darboux ? Réponse : ça dépend de ce que l'on sait, c'est-à-dire des outils et résultats dont on dispose... comme souvent en mathématiques. Un premier type de démonstration s'appuie sur les propriétés usuelles des fonctions numériques de la variable réelle (niveau L1, c'est-à-dire première année d'université) : une fonction numérique φ continue sur $[a, b]$ y est bornée et atteint ses bornes ; si une fonction numérique ψ, dérivable sur $[a, b]$, est maximisée ou minimisée en $c \in \,]a, b[$, alors $\psi'(c) = 0$. Voir [1, page 430] pour un exemple de telle démonstration.

Une autre manière de procéder consiste à montrer que l'ensemble des pentes de cordes joignant deux points (distincts) du graphe de F, primitive de f, est à peu de choses près l'image $f(I)$. Nous avons l'habitude de la présenter sous forme d'exercice en L2 ou L3. Faisons donc plus en détail cette démonstration. Soit donc $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée $F' = f$. Considérons

$$\Delta = \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\,;\ x \text{ et } y \text{ dans } I,\ x < y \right\}.$$

D'une part, le théorème des accroissements finis (sous forme d'égalité) nous assure que $\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(z)$ pour un certain z compris entre x et y ; cela induit l'inclusion $\Delta \subset f(I)$.

D'autre part, la définition même de $f(z) = F'(z)$ comme limite, quand $h \to 0$, du quotient différentiel $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ montre que $f(I) \subset \overline{\Delta}$. Par conséquent

$$\Delta \subset f(I) \subset \overline{\Delta}. \tag{9}$$

Ainsi, si nous démontrons que Δ est un intervalle, le tour sera joué, car la différence avec $\overline{\Delta}$ se situe juste aux extrémités de Δ et il n'y aurait pas alors de "trou" dans $f(I)$ [3].

Soit a et b dans I, $a < b$, et $p = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; soit c et d dans I, $c < d$, et $q = \frac{F(d)-F(c)}{d-c}$. Comme cela est fait dans [2], nous allons définir une fonction $\pi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui va passer "en glissant continûment" de la pente p à la pente q :

$$\pi(t) = \frac{F[(1-t)b + td] - F[(1-t)a + tc]}{[(1-t)b + td] - [(1-t)a + tc]}. \tag{10}$$

Par construction, $\pi(t)$ est une pente, $\pi(t) \in \Delta$ pour tout $t \in [0,1]$. La fonction π est clairement continue, donc $\pi([0,1])$ est un intervalle ; comme $\pi(0) = p$, $\pi(1) = q$, il s'ensuit que le segment $[p,q]$ est entièrement contenu dans Δ [4].

Un exemple de fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et qui ne soit pas une fonction-dérivée, c'est-à-dire une fonction de $\mathcal{VI}(I)$ sans être dans $\mathcal{D}(I)$? Il suffit pour cela de modifier très légèrement la fonction f_1 de (3) en posant :

$$f_3(x) = \cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0\,;\ f_3(0) = r \in\,]0,1]\,. \tag{11}$$

La fonction f_3 ne saurait être une fonction-dérivée... Pourquoi ? Si tel était le cas, la fonction $f_3 - f_1$ le serait, ce qui n'est pas le cas puisque

$$(f_3 - f_1)(x) = 0 \text{ si } x \neq 0\,;\ (f_3 - f_1)(0) = r$$

ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

Comme f_1, la fonction f_3 vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ; ce qui vient d'être dit montre que $\mathcal{VI}(I)$ n'est pas stable par différence (ou addition).

Mais au fond, que manque-t-il à une fonction-dérivée, ou plus généralement à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, pour être continue ? Le théorème de C.H.Rowe (1926), que nous avons repris et commenté en détail dans [3], fournit la réponse. Prenons $I = \mathbb{R}$ pour simplifier.

Théorème 4. Pour que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue, il faut et il suffit que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

$$f \text{ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires}\,; \tag{12}$$

3. Prendre l'exemple de la fonction $F(x) = x^3$ pour voir que Δ n'est pas nécessairement fermé, et que l'inclusion $f(I) \subset \overline{\Delta}$ peut être stricte.

4. En fait, cette construction de (10) n'a rien de mystérieux. Dans le triangle $T = \{(x,y) \in I \times I\,;\, x < y\}$, les points $A = (a,b)$ et $C = (c,d)$ sont reliés par un segment (entièrement contenu dans T puisque T est convexe). On "transporte" ensuite cette paramétrisation dans Δ par l'application continue $(x,y) \mapsto \frac{F(y)-F(x)}{y-x}$, de manière à créer un chemin reliant les deux pentes p et q de Δ.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = r$ est fermé. (13)

Comme une fonction-dérivée vérifie (12), nous avons :

Corollaire 5. Ce qui manque à une fonction-dérivée f pour être continue, c'est exactement la propriété (13).

C'était le sens de notre remarque à propos de la fonction $F_1' = f_1$ à la fin du paragraphe 1. Le Corollaire 5 n'est pas sans conséquence : si une fonction dérivable F a une dérivée $F' = f$ croissante (c'est-à-dire si F est convexe), alors f vérifie automatiquement la propriété (13) ; en clair *une fonction convexe (ou concave) dérivable est automatiquement continûment dérivable.*

Terminons en poussant le vice à l'extrême en signalant ceci : il existe des fonctions vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur I et qui ne sont continues en aucun point de I.

3. L'ensemble $\mathcal{D}(I)$ n'est pas stable par multiplication : le produit de deux fonctions dérivées n'est pas forcément une fonction dérivée.

Si le produit de deux fonctions-dérivées continues est une fonction-dérivée (puisque continue !), cette propriété ne subsiste plus si on enlève la propriété de continuité... C'est un peu une surprise. Un contre-exemple a été fourni par le mathématicien polonais W. WILCOSZ dès 1921 ([4]). Comme il est simple et qu'il s'appuie sur des fonctions déjà vues plus haut, nous nous faisons un plaisir de vous le montrer.

Théorème 6. Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction-dérivée définie comme suit :

$$f_1(x) = \cos(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \ ; \ f_1(0) = 0.$$

Alors la fonction $(f_1)^2$ n'est pas une fonction-dérivée.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y ait une fonction dérivable G telle que $G' = (f_1)^2$, et déroulons un raisonnement de manière à arriver à une contradiction. Rappelons que F_1, définie en (4) est une primitive de f_1.

Considérons la fonction H définie par

$$H(x) = G(x) - F_1(\frac{x}{2}). \tag{14}$$

La fonction H est dérivable et de dérivée

$$H'(x) = G'(x) - \frac{1}{2}F_1'(\frac{x}{2}) = (f_1)^2(x) - \frac{1}{2}f_1(\frac{x}{2}).$$

Or –et c'est là une belle occasion d'utiliser la formule $\cos^2(u) = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ –, l'expression de $H'(x)$ se simplifie en

$$H'(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x \neq 0, \ 0 \text{ si } x = 0.$$

Or, cette fonction ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires, elle ne peut donc être une fonction-dérivée. C'est la contradiction que nous cherchions.

Une autre manière de procéder est de considérer les fonctions f_1 et g_1 définies en (3) et (6), et de dire que l'une des deux fonctions $(f_1)^2$ ou $(g_1)^2$ n'est pas une fonction-dérivée ; en effet, si les deux l'étaient, leur somme le serait, et leur somme vaut 1 si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$.

Le même contre-exemple sert d'ailleurs pour démontrer que le produit de deux fonctions vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

Puisque $\mathcal{D}(I)$ n'est pas stable pour la multiplication, alors qu'il l'est pour l'addition et la multiplication par un réel, $\mathcal{D}(I)$ n'est pas (ce qu'on appelle) *une algèbre.* Qu'à cela ne tienne, on peut se poser la question : quelle est l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}(I)$? La question est difficile et a préoccupé les mathématiciens-analystes pendant des années. Ce n'est qu'assez récemment que la réponse a été fournie par le mathématicien tchèque D.Preiss ([5]), mais le résultat n'est pas suffisamment simple pour que nous le présentions ici.

4. Observations terminales et prolongements possibles

4.1 Demander à une fonction f d'être une fonction-dérivée est une condition exigeante, car on requiert $F'(x) = f(x)$ *pour tout* x dans l'intervalle I . Relâcher cette contrainte à "beaucoup de points" de l'intervalle ou à "presque tous les points de l'intervalle" a été une préocupation constante de mathématiciens-analystes, et non des moindres, tels les mathématiciens français R.Baire, H.Lebesgue, A.Denjoy, ce qui a conduit à diverses théories de dérivation et de primitivation (et donc d'intégration). Sans aller jusque-là, demandons à un élève ou à un étudiant si la fonction definie en (8) est une fonction-dérivée. Elle ne l'est pas mais il vous répondra que oui : c'est la dérivée de la fonction $F(x) = |x|$. Il a tort, mais pas tant que ça, car il aura "intuité" (comme on dit dans certaines régions, dont Midi-Pyrénées) que c'est c'est le substitut qu'il faudrait proposer. De fait, une bonne correspondance, similaire à celle qui existe par primitivation entre les fonctions continues et les fonctions continûment dérivables (dites aussi de classe C^1), existe entre les fonctions "continues par morceaux" et les fonctions "C^1 par morceaux". L'adaptation des Théorèmes 1 et 2 à ce cadre est facile et largement utilisée dans les mathématiques appliquées aux sciences de l'ingénieur.

4.2 Pour les étudiants (au moins ceux que j'ai en enseignements...), il n'y a pas de différence entre fonctions dérivables et fonctions continûment dérivables, bref toute fonction-dérivée est continue. On ne peut pas leur en vouloir, car la plupart des (en fait tous les) exemples qu'on leur montre ou qu'ils ont à étudier consistent en des fonctions dérivables "convexes ou concaves par morceaux", et on sait que de telles fonctions sont continûment dérivables (voir la remarque suivant le Corollaire 5). Il faut attendre, et encore est-ce pour les étudiants en mathématiques, un stade plus avancé d'études pour voir des fonctions comme celles définies en (4).

4.3 La notion (usuelle) de dérivation peut être renforcée de la manière suivante : f est dite strictement (on dit aussi fortement) dérivable en x s'il existe un réel l tel que

$$\frac{f(y) - f(z) - l(y - z)}{y - z} \to 0 \text{ quand } y \to x,\ z \to x,\ y \neq z. \qquad (15)$$

Évidemment, $l = f'(x)$, mais la propriété requise au-dessus est plus forte que la simple dérivabilité de f en x, car on autorise y *et* z à bouger autour de x ; bref on va chercher un peu plus d'information au voisinage de x. Par exemple, la fonction F_1 de (4) n'est pas strictement dérivable en 0. Cette définition remonte au mathématicien italien G.Peano (1892) qui estimait qu'elle *"rendait compte du concept de dérivée utilisée dans les sciences physiques beaucoup mieux que ne le faisait la définition de la dérivée usuelle"*. Si f est dérivable dans un voisinage de x, la stricte dérivabilité de f équivaut au fait que la dérivée f' est continue en x.

Pour des fonctions comme F_1 de (4), comme la dérivée $f'(0)$ est en quelque sorte isolée dans le concert des dérivées en des points voisins, on peut penser à un substitut de la notion de dérivée qui n'est plus un point mais un segment. Ainsi, le mathématicien québécois-français F.Clarke a été amené à définir (en 1973) une multi-dérivée (ou dérivée généralisée) de f en x comme le plus petit segment (de $\mathbb{R}$) contenant l'ensemble suivant

$$\{r : \text{ Il existe } (x_k) \to x \text{ avec } f'(x_k) \to r\}.$$

Par exemple, pour la fonction F_1 de (4), cette multi-dérivée est $[-1, 1]$; elle contient $f'(0)$ mais a aussi recueilli l'information sur le comportement de f' autour de x (dans le cas présent, l'oscillation de $F_1' = f_1$ entre -1 et 1). Cette approche est explicitée dans un article de popularisation que nous avons rédigé il y a une trentaine d'années ([6]).

4.4 Le théorème de Darboux n'a pas d'extension –simple du moins– au cas des fonctions à valeurs vectorielles. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est dérivable, on aimerait bien que l'image $F'(I)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ soit "d'un seul tenant"... Eh bien, ça n'est pas le cas, en voici un exemple, toujours basé sur des fonctions biscornues comme celle de (4) et (5). Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^2 \cos(\frac{1}{x}) \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) \end{pmatrix} \text{ si } x \neq 0,\ F(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Alors,

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \\ 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \end{pmatrix} \text{ si } x \neq 0,\ F'(0) = (0, 0).$$

Ce faisant, $F'(x)$ est la somme de deux vecteurs orthogonaux de longueurs respectives $2\,|x|$ et 1 et d'angles polaires $1/x$ et $1/x + \pi/2$. Par suite, la longueur du vecteur $F'(x)$ est $\sqrt{1 + 4x^2} \geqslant 1$ dès lors que $x \neq 0$, alors que $F'(0)$ est le vecteur nul. Ainsi, $F'(\mathbb{R})$ est constitué de deux morceaux bien distincts : une courbe qui "vit" à l'extérieur du cercle-unité et vient s'enrouler sur celui-ci, et le point origine qui se trouve isolé.

References

[1] V.Cerclé, *Fonctions sans primitive.* Bulletin de l'APMEP n°505, pages 427 – 434 (2013).

[2] S.B.Nadler, *A proof of Darboux theorem.* American Math. Monthly 117, pages 174-175 (2010).

[3] J.-B.Hiriart-Urruty, *Que manque-t-il à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires pour être continue ?* Revue de Mathématiques Spéciales 94, pages $370-371$ (1984).

[4] W.Wilcosz, *Some properties of derivative functions.* Fundamenta Mathematicae II, pages $145-154$ (1921).

[5] D.Preiss, *Algebra generated by derivatives.* Real Analysis Exchange 8, pages $208-216$ (1982-1983).

[6] J.-B.Hiriart-Urruty, *Un concept récent pour l'analyse et l'optimisation de fonctions non différentiables : le gradient généralisé.* Revue de Mathématiques Spéciales 96, pages $311-321$ (1985-1986).