Entraînement des étudiants pour des compétitions mathématiques

(par JBHU). Année universitaire 2025 – 2026.

Théorie des nombres - Analyse - Calcul matriciel

Niveaux : L1 (Exercice 1, Exercice 3), L2 (Exercice 2), L3 (Exercice 4).

Les énoncés des exercices, comme les développements des solutions, sont assez courts.

Commencer à chercher sans regarder les indications.

Exercice 1. *Théorie des nombres*

"Une manière "fermatique" de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini..."

Pour n entier naturel, on définit le n-ème nombre de FERMAT par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$; par exemple, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,..., $F_5 = 65\ 537$.

1°) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$F_n = F_0 \times F_1 \times ... \times F_{n-1} + 2 \tag{1}$$

2°) Montrer que si $m \neq n$, les entiers F_m et F_n sont premiers entre eux deux à deux.

3°) En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Indication. - 3°) Tout nombre entier $n \geqslant 2$ possède un diviseur qui est un nombre premier.

Exercice 2. *Théorie des nombres*

"C'est compliqué mais ça converge..." (Source : Undergraduate Math. Competitions, Kiev, 2000)

Pour un entier positif n, on note $d(n)$ le nombre d'entiers (positifs) diviseurs de n (les entiers 1 et n compris). Par exemple $d(2025) = 15$, $d(2026) = 4$, $d(2027) = 2$. La fonction $d(.)$ a un comportement erratique : $d(n) = 2$ lorsque n est premier, $d(2^k) = k + 1$, etc.

1°) Donner une majoration de $d(n)$ en fonction de n, suffisante pour assurer la convergence de la série de terme général $\frac{d(n)}{n^2}$.

2°) Démontrer la (belle) formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^2 . \tag{2}$$

Indications. - 1°) Montrer, par exemple, que $d(n) \leqslant 2\sqrt{n}$ pour tout entier positif n.

- 2°) Regrouper les termes de la série double dans le membre de droite de (2) en considérant les couples (k, l) tels que $k \times l = n$.

Exercice 3. *Analyse (fonctions d'une seule variable)*

"Prendre le TGV avec le TVI..."

Le TGV Paris-Toulouse (imaginaire) va parcourir les 600 km qui séparent les deux villes en 3 heures, soit à une vitesse moyenne de 200 km/h.

1°) Y-a-t-il un point x_1 sur le trajet tel que la distance $[x_1, x_1 + 300]$ soit parcourue en 1 heure et demie ?

2°) Y-a-t-il un point x_2 sur le trajet tel que la distance $[x_2, x_2 + 200]$ soit parcourue en 1 heure ?

3°) Y-a-t-il un point x_3 sur le trajet tel que la distance $[x_3, x_3 + 240]$ soit parcourue en 1 heure et 12 mn ?

Indications. - Après un changement d'échelle et un "redressement" de la fonction comme pour démontrer le théorème des accroissements finis à partir du théorème de Rolle, on peut se ramener à la situation suivante :

$$\begin{cases} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction continue,} \\ f(0) = f(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

et pour plusieurs valeurs de d on se pose la question de l'existence d'un x tel que $f(x+d) = f(x)$.

- Pour n entier naturel non nul, il peut être utile de considérer la fonction g définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.

Exercice 4. *Matrices*

Trois questions indépendantes (source : Undergraduate Math. Competitions, Kiev).

$Q1$. Soit $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ une collection de $n+1$ matrices réelles $n \times n$. Montrer qu'il existe des réels $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ non tous nuls tels que $a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_{n+1}A_{n+1}$ soit une matrice singulière.

$Q2$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ vu comme une matrice unicolonne et n lignes. Après avoir vérifié que la matrice symétrique $I_n + aa^T$ est inversible, montrer que $1 - a^T(I_n + aa^T)^{-1}a$ est un scalaire non nul, et simplifier $1/\left[1 - a^T(I_n + aa^T)^{-1}a\right]$.

$Q3$. Soit A, B, C trois matrices de même taille. Montrer que

$$\text{tr}\left[A(A^T - B^T) + B(B^T - C^T) + C(C^T - A^T)\right] \geqslant 0.$$

Indications. - Q_1. La question est plus simple qu'il n'y parait.

- Q_2 et Q_3. Comme souvent en pareils cas, traiter le cas des matrices scalaires peut servir à guider l'intuition.

Pour u et v vecteurs de $\mathbb{R}^n$, ou encore des matrices unicolonnes et n lignes, $uv^T = [u_iv_j]$ est une matrice $n \times n$, alors que u^Tv est une matrice scalaire identifiée au produit scalaire (usuel) de u et v.