MATAPLI N° 82, Avril 2007.

Sur une particularité de 26...

par Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY

Rassurez-vous, non il ne s'agit pas d'une des particularités de la 26[e]section du CNU dont nous faisons majoritairement partie (une page ne suffirait pas !), mais bien de l'entier naturel 26.

Lors d'une réunion de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse à laquelle je participais, un enseignant de Lettres évoquait l'entier 26 comme étant **le seul entier coincé entre un carré ($25 = 5^2$) et un cube ($27 = 3^3$)**, et il ajoutait que c'était la raison de l'utilisation de ce nombre comme symbole par des sectes (les cathares ?). Il attribuait le résultat à P. Fermat.

Ne connaissant pas ce résultat, j'étais un peu surpris. J'ai voulu en avoir le cœur net : était-ce bien vrai ? si oui, comment le démontre-t-on ? Une rapide consultation auprès de mes collègues m'a conforté dans ma première impression, à savoir que ce n'était ni un résultat très connu ni facile à appréhender au premier abord. Les recueils de particularités des nombres entiers (exemple [2]) ne le mentionnent pas non plus. Un spécialiste de théorie des nombres (il y en a tout de même quelques uns au pays de Fermat) m'a confirmé qu'il s'agissait d'un énoncé dû à P. Fermat qui, comme à son habitude, l'avait posé comme défi aux anglais, en indiquant que le résultat était vrai mais sans en donner une démonstration ([3])... Cette propriété de 26 est tout de même curieuse : imaginez un peigne infini dans lequel vous enlevez toutes les dents sauf celles correspondant à des carrés d'entiers, puis un autre peigne infini où vous faites la même chose avec les dents placées en des positions différentes des cubes d'entiers ; vous positionnez ensuite les deux peignes face à face, et le seul cheveu (= entier) que vous arrivez à coincer entre deux dents est 26 !

Après enquête, il s'avère : oui, le résultat est vrai ; je l'ai trouvé dans [1], attribué à Fermat ; sa démonstration (dans [1] ou [4]) consiste à faire de l'arithmétique dans l'anneau euclidien (et donc factoriel) $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$...Le fil y conduisant est l'équation $y^2 = x^3 - 2$; le groupe de Mordell-Weil de cette équation est cyclique infini (for whatever it means..), il se trouve qu'il y a une infinité de solutions rationnelles à cette équation, mais seulement deux solutions entières $(x, y) = (3, \pm 5)$. On démontre qu'il n'y a pas non plus, parmi les entiers positifs, de solutions à l'équation $y^2 = x^3 + 2$. Ce qui répond à notre interrogation....

Question à présent : comment Fermat a-t-il « intuité le résultat » (comme on dit à Toulouse) ? En avait-il vraiment une démonstration ? On n'en sait rien...Sa correspondance avec des scientifiques en France et en Europe est truffée de questions et défis du même calibre ; celui concernant ce qui s'appelle à présent « le grand théorème » a émergé, bien il y en a d'autres. Sacré Fermat...On l'adopte en 26[e] ?

1. J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag (1986).
2. F. LE LIONNAIS et J. BRETTE, *Nombres remarquables*, Hermann (1997).
3. G. TERJANIAN, communication personnelle (automne 2006).
4. M. REVERSAT, communication personnelle (automne 2006).

Addendum (décembre 2006).

« Mais tu aurais dû regarder dans Wikipedia... », voilà la réaction entendue à une première circulation de la présente note en automne. Certes...mais je constate que Wikipedia contient quelques erreurs, et que la version anglaise ne donne pas tout à fait les mêmes informations que la version française...Quoi qu'il en soit, complétons notre quête sur 26 par les points suivants :

- 26 est, bien sûr, le nombre de lettres de l'alphabet français ; dans la classification des groupes simples, il y a 26 groupes sporadiques ; 26 serait la dimension de l'espace-temps universel selon la théorie des cordes ; 26 est le nombre maximal de nombres premiers pouvant apparaître dans une tranche de cent entiers consécutifs (cette situation ne se produit qu'une fois, dans la tranche des entiers de 2 à 101) ; nous avons 26 os dans le pied !...Je laisse de côté des références bibliques un peu tirées par les cheveux.
- L'écart de 2 entre un carré et un cube d'entiers est-il particulier ? Voici ce qu'on peut dire à propos d'écarts valant 0 ou 1 :
  - Il y a une infinité de carrés d'entiers qui valent des cubes d'entiers (exemple $4^3 = 8^2$).
  - Il n'y qu'un seul cas où un carré d'entier et un cube d'entier sont consécutifs (en excluant l'intervention de l'entier 1 évidemment) : $8 = 2^3$ suivi de $9 = 3^2$.
  - Un résultat assez extraordinaire, conjecturé par E. Catalan en 1844 et démontré par F. Mihailescu en 2002, affirme que l'équation en nombres entiers $x^m - y^n = \pm 1$ n'a que la solution du dessus ; bref, *les seules puissances parfaites consécutives sont* 8 *et* 9 (toujours en excluant l'intervention de l'entier 1).