

à paraître  
décembre 2007

## Les mathématiques du mieux faire

### Volume I Premiers pas en optimisation

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Ces « Premiers pas en optimisation » sont destinés à un large public, dans un souci de popularisation des bases mathématiques de l'optimisation vers des domaines utilisateurs partiels, intéressés, ou potentiels : automatique, économie mathématique, analyse numérique, statistique, etc.

Dans ce livre, l'accent a été mis sur les idées davantage que sur les techniques ou généralisations que le lecteur plus intéressé aura tout loisir de développer.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, professeur à l'Université Paul Sabatier à Toulouse, dirige le département de mathématiques. Mathématicien reconnu, il est l'auteur

d'ouvrages publiés aux éditions Dunod, EDP Sciences, PUF, Springer Verlag. Il écrit aussi très régulièrement dans le bulletin de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

144 pages • ISBN 978-2-7298-3667-2



n°1

**Découvrir l'arithmétique**

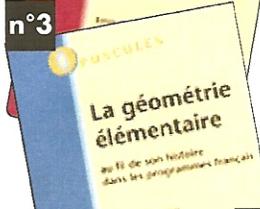
Découvrir l'arithmétique  
Pierre Damphousse  
128 pages  
ISBN 2-7298-7995-1  
9,5 €



n°2

**Pile ou Face**

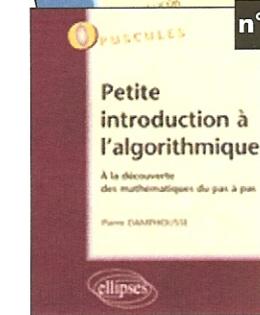
Pile ou Face - Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités  
Emmanuel Lesigne  
128 pages  
ISBN 2-7298-0679-2  
9,5 €



n°3

**La géométrie élémentaire**

La géométrie élémentaire  
Jean Licois  
144 pages  
ISBN 2-7298-2269-0  
13 €



n°4

**Petite introduction à l'algorithmique**

Petite introduction à l'algorithmique  
Pierre Damphousse  
144 pages  
ISBN 2-7298-2300-X  
10,5 €



n°5

**Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà**

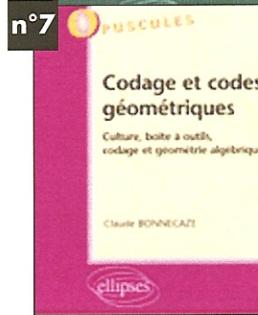
Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà ? De la puissance à la complexité d'une notion simple ? Volume 1  
Marcel Berger, avec la collaboration de Pierre Damphousse  
176 pages  
ISBN 2-7298-2776-5  
15 €



n°6

**Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà**

Convexité dans le plan, dans l'espace et au-delà ? De la puissance à la complexité d'une notion simple ? Volume 2  
Marcel Berger, avec la collaboration de Pierre Damphousse  
144 pages  
ISBN 2-7298-2777-3  
14 €



n°7

**Codage et codes géométriques**

Codage et codes géométriques, Culture, boîte à outils, codage et géométrie algébrique  
Claude Bonnetaze  
144 pages  
ISBN 978-2-7298-3214-8  
14,00 €

Université Paul Sabatier (Toulouse III)  
Institut de mathématiques, Bât. 1R3  
118, route de Narbonne  
31062 Toulouse Cedex 09  
France  
jbhu@mail.cict.fr

#### DU MÊME AUTEUR

*Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire* (avec Y. Plusquellec), Cepadues-Editions, Toulouse (1988).

*Convex analysis and minimization algorithms* (avec C. Lemaréchal), Vol. I *Fundamentals*, Vol. II *Advanced theory and bundle methods*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305&306, Springer-Verlag (1993). Nouveau tirage en 1996.

*L'optimisation*, Collection «Que sais-je?», Presses Universitaires de France (1996).

*Optimisation et analyse convexe : exercices et problèmes corrigés*. Presses Universitaires de France (1998).

*Fundamentals of convex analysis* (avec C. Lemaréchal), Grundlehren Text editions, Springer-Verlag (2001).

*Calcul différentiel et équations différentielles : exercices et problèmes corrigés* (avec D. Azé et G. Constans), Éditions Dunod (2002).

Classification AMS : 90,49

## AVANT-PROPOS

D'après certains dictionnaires, l'usage français du verbe optimiser nous est arrivé vers 1844 d'Angleterre, où « *to optimise* » signifiait « *se comporter en optimiste* » ; on peut donc dire que l'optimiseur est comme l'optimiste qui pense *pouvoir toujours mieux faire*. . . : « minimiser un coût », « maximiser un profit », « optimiser un procédé », « gagner en optimisant », etc. Autant d'expressions qui font référence à un domaine encore relativement jeune des mathématiques et de leurs applications : l'*optimisation*.

Comme l'indique son titre, « *Les mathématiques du mieux faire* », l'opuscule que nous présentons ici a une ambition modeste, celui de guider les premiers pas dans le domaine de l'optimisation. Nous nous concentrons sur les aspects essentiels qu'en sont les dites *conditions d'optimalité et la dualité*. Le cadre de travail choisi est volontairement simple, les hypothèses des théorèmes ne sont pas toujours les plus faibles possibles, et nous avons voulu mettre l'accent sur les *idées* davantage que sur les techniques ou généralisations que le lecteur plus expert aura tout loisir de développer ou de retrouver. Les démonstrations des résultats mathématiques sont d'un caractère varié (parfois il y en a plusieurs pour un même théorème), certaines sont originales et inédites.

Les connaissances mathématiques pour aborder la lecture de cet opuscule sont maintenues minimales (tiens ?, voilà déjà un problème d'optimisation), celles normalement acquises après une formation scientifique à Bac +2. Le physicien et philosophe autrichien Ernst MACH ne disait-il pas que la Science pouvait être considérée comme un problème de minimum ? Selon lui : « *Elle consiste à exposer des faits, avec la moindre dépense intellectuelle* ». Est aussi présent dans notre démarche le souci de popularisation des bases de l'optimisation vers des domaines utilisateurs partiels, intéressés, ou potentiels : automatique, économie mathématique, analyse numérique, statistique.

Pour ce qui concerne l'enseignement, les aspects de l'optimisation présentés ici trouvent leur place dans les formations de fin de Licence ou de tout début de Master (modules généralistes ou professionnalisés) et dans la formation scientifique des ingénieurs.

Il y a dix ans, en 1996, nous avons publié un petit ouvrage intitulé «*L'optimisation*» dans la collection «*Que sais-je ?*» des Presses Universitaires de France. Depuis, bien des choses ont évolué dans le domaine ; ceci peut être vu comme une version révisée et augmentée de cette première publication.

Je remercie les étudiants, collègues, utilisateurs de mathématiques, qui ont bien voulu donner leur avis sur les différentes versions de cet ouvrage. Enfin, des remerciements particuliers vont à Milagros Garcia et Elie Chahine pour leur contribution à la saisie du manuscrit, ainsi qu'à Pierre Dampousse (directeur de la collection Opuscules) pour son aide à la finalisation du projet.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty  
Toulouse et Pays basque, printemps-été 2006

## Table des matières

|          |  |    |
|----------|--|----|
| <b>1</b> | Introduction à ce qu'est un problème d'optimisation . . .  | 1  |
|          | 1.1. L'optimisation : enjeux et problèmes . . . . .  | 1  |
|          | 1.1.1. Fixons le paysage . . . . .   | 1  |
|          | 1.1.2. Les objectifs. Que cherche-t'on ? . . . . .   | 2  |
|          | 1.1.3. Les divers aspects. Analogie entre un problème d'optimisation et un problème policier . . . . . | 4  |
|          | 1.1.4. Aspect existence et unicité des solutions   | 4  |
|          | 1.1.5. Aspects conditions nécessaires d'optimalité   | 7  |
|          | 1.1.6. Aspects conditions suffisantes d'optimalité   | 7  |
|          | 1.1.7. Aspects algorithmes . . . . .   | 9  |
|          | 1.1.8. D'autres aspects qualitatifs . . . . .  | 10 |
|          | 1.2. Une classification des problèmes d'optimisation .   | 11 |
|          | 1.2.1. Programmation linéaire . . . . .  | 11 |
|          | 1.2.2. Optimisation (minimisation) convexe . .   | 12 |
|          | 1.2.3. Optimisation différentiable (ou lisse) . .  | 12 |
|          | 1.2.4. Optimisation SDP . . . . .  | 12 |
|          | 1.2.5. Optimisation non-différentiable (ou optimisation non lisse) . . . . .                           | 14 |
|          | 1.2.6. Optimisation multicritère (ou multiobjectif)  | 15 |
|          | 1.2.7. Optimisation en dimension infinie . . .   | 19 |
| <b>2</b> | Minimisation sans contraintes : conditions de minimalité   | 22 |
|          | 2.1. Existence d'un minimum, unicité . . . . .   | 22 |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.1.1.   | Un résultat d'existence . . . . .   | 22        |
| 2.1.2.   | Une condition suffisante d'unicité . . . . .  | 24        |
| 2.2.     | Conditions de minimalité du premier ordre . . . . .   | 25        |
| 2.2.1.   | Conditions nécessaires de minimalité locale . . . . .   | 25        |
| 2.2.2.   | Conditions de minimalité globale . . . . .  | 31        |
| 2.2.3.   | Conditions nécessaires de minimalité à $\epsilon$<br>près . . . . .   | 34        |
| 2.2.4.   | Conditions nécessaires de minimalité locale<br>pour une classe de fonctions-objectifs non-<br>différentiables . . . . .                       | 38        |
| 2.3.     | Conditions de minimalité du second ordre . . . . .  | 44        |
| 2.4.     | Un mot des conditions de minimalité d'ordre supé-<br>rieur . . . . .  | 49        |
| <b>3</b> | <b>Minimisation avec contraintes : conditions de minimalité</b>   | <b>54</b> |
| 3.1.     | Conditions nécessaires du premier ordre : contrain-<br>tes sous forme d'égalités . . . . .  | 54        |
| 3.2.     | Conditions nécessaires du premier ordre : contrain-<br>tes sous forme d'inégalités . . . . .  | 62        |
| 3.3.     | Conditions nécessaires du premier ordre : contrain-<br>tes sous formes d'égalités et d'inégalités . . . . .                                   | 68        |
| 3.4.     | Conditions nécessaires du premier ordre : cas d'un<br>ensemble-contrainte non représenté sous forme d'éga-<br>lités ou d'inégalités . . . . . | 77        |
| 3.4.1.   | Les privilèges du monde linéaire (ou affine)  | 79        |
| 3.4.2.   | Le confort du monde convexe . . . . .   | 80        |
| 3.4.3.   | Retour au monde différentiable . . . . .  | 82        |
| 3.5.     | Conditions de minimalité du second ordre . . . . .  | 86        |
| 3.5.1.   | Conditions nécessaires . . . . .  | 86        |
| 3.5.2.   | Conditions suffisantes . . . . .  | 89        |
| 3.6.     | Analyse de la sensibilité aux perturbations des con-<br>traintes . . . . .  | 92        |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| <b>4</b> | Minimisation avec contraintes : points-selles de lagrangiens ;<br>premiers pas dans la théorie de la dualité . . . . . | 98  |
| 4.1.     | Les points-selles dans leur généralité . . . . .   | 98  |
| 4.1.1.   | Ce qu'est un point-selle . . . . .   | 98  |
| 4.1.2.   | Problèmes de mini-maximisation . . . . .   | 99  |
| 4.1.3.   | Sur l'existence de points-selles . . . . .   | 101 |
| 4.2.     | Points-selles de lagrangiens . . . . .   | 101 |
| 4.3.     | Premiers pas dans la théorie de la dualité . . . . .   | 104 |
| 4.3.1.   | Dualisons, dualisons... . . . .  | 104 |
| 4.3.2.   | Exemples de dualisation . . . . .  | 106 |
| 4.4.     | Les multiplicateurs comme paramètres de sensibilité<br>aux perturbations des contraintes . . . . .                     | 113 |
| <b>5</b> | Annexe A. Notations et rappels . . . . .   | 116 |
| 5.1.     | Algèbre linéaire . . . . .   | 116 |
| 5.2.     | Calcul différentiel . . . . .  | 116 |
| 5.3.     | Convexité . . . . .  | 118 |
|          | <hr/>  |     |
|          | <i>Notices biographiques</i> . . . . .   | 119 |
|          | <i>Éléments de bibliographie</i> . . . . .   | 123 |
|          | <i>Index</i> . . . . .   | 127 |
|          | <i>Liste des noms cités</i> . . . . .  | 131 |