Un (tout) petit problème d'optimisation, mais ...

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1]

Avec Fermat, Newton, Leibniz, le calcul différentiel est né au XVII^e siècle de la nécessité de résoudre des problèmes d'extremum, notamment géométriques (voir le développement historique dans [1]). Cette appellation de "problèmes d'extremum" a une forme plus moderne et plus internationale avec "problèmes d'optimisation" ([1, 2]). Dès la classe de Première en lycées, les élèves apprennent que les rudiments de calcul différentiel (c'est-à-dire les calculs avec les dérivées) leur servent à trouver des points qui minimisent une fonction de la variable réelle.

Le petit problème que nous présentons ici, avec son énoncé sous forme géométrique et sa solution par voie analytique, est simple, élégant même ; il rassemble à lui tout seul ce qu'un tel problème doit véhiculer comme ingrédients : mise en forme résoluble par le calcul différentiel, explicitation de la solution, analyse et interprétation "physique" de la solution.

Le problème, son énoncé et une solution purement géométrique, ont été proposés il y a quelques mois par Pierre-Jean Laurent (région grenobloise) qui nous étonne chaque semaine avec les problèmes qu'il soumet à la ronde. Voici l'énoncé précis :

Dans le plan, les deux demi-droites fixes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ issues du point O font un angle aigu α. Le point fixe P se trouve strictement entre ces deux demi-droites.Une droite mobile $\mathcal{D}$ passant par P coupe les demi-droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en M et N respectivement (pas toujours certes !). Question : **Comment faut-il positionner la droite D pour que le triangle OMN ait une aire minimale ?**

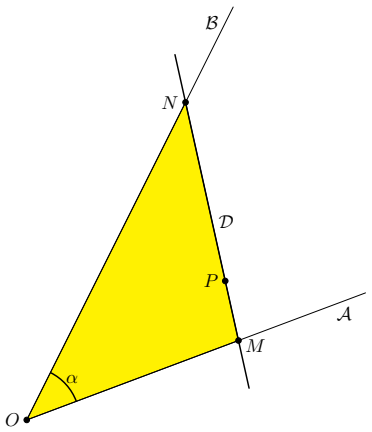


Figure 1.

1. Université Paul Sabatier de Toulouse
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 09
Mél. : jbhu@math.univ-toulouse.fr
Site web professionel : www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/

Avant d'aborder la résolution de ce problème, il est bon de se poser - et de poser autour de vous, cher lecteur - la question suivante : *Quelle est intuitivement, sans aucune esquisse de calcul ni l'aide d'un dessin, la solution que vous proposeriez ?* J'ai eu l'occasion de poser cette question à un échantillon de quelques personnes autour de moi (collègues universitaires, enseignants de lycées, ingénieurs d'Airbus, etc.). La réponse (encore une fois : impulsive, sans trop de réflexion) est généralement fausse (ce fut mon cas), mais certains ont bien "intuité" le résultat correct.

Tout d'abord, rien ne dit qu'*il y a* une solution à notre problème, d'autant que toutes les positions de la droite $\mathcal{D}$ ne donnent pas lieu à un triangle OMN. Deuxième chose : la Nature, lorsqu'elle minimise, aime bien équilibrer les choses à l'optimum (n'est-ce pas FERMAT ?) ... ; il n'y a donc pas lieu de privilégier l'une des deux demi-droites $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Une réponse possible qui vient facilement est : la solution optimale est lorsque $OM = ON$... Ce n'est pas le cas, excepté si le point P se trouve sur la bissectrice de l'angle formé par les deux demi-droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Voici la bonne réponse :

La solution optimale est lorsque $PM = PN$, c'est-à-dire lorsque les aires des triangles OMP et ONP sont égales.

"Ah ! ben oui... ça va de soi"... Pas vraiment. Observons tout de suite l'équilibre à l'optimum souhaité (voir plus haut), pas seulement parce que $PM_{\min} = PN_{\min}$, mais surtout parce que l'aire minimale de $OM_{\min}N_{\min}$ se divise exactement en deux parts égales, les aires des sous-triangles $OPM_{\min}$ et $OPN_{\min}$. Etonnant aussi que la solution soit toujours du même type, quelle que soit la position du point P à l'intérieur du cône défini par les deux demi-droites.

Une fois que le positionnement de $\mathcal{D}$ est proposé, on peut, bien sûr, démontrer son optimalité, par un raisonnement géométrique (comme certains l'ont fait, y compris celui qui proposa le problème) ... Mais moi, je préfère partir de rien et répondre successivement à toutes les questions qu'un problème d'optimisation suscite : existence de solutions, caractérisation, explicitation, visualisation graphique. Et pour cela, rien de tel que l'Analyse. Nous allons invoquer le repérage des points avec des coordonnées analytiques (merci DESCARTES), exprimer que la fonction-critère f à minimiser (qui doit être formalisée) vérifie nécessairement $f'(x_{\min}) = 0$ en un point optimal $x_{\min}$ (merci FERMAT), déterminer facilement le seul point $x_{\min}$ répondant à la question, interpréter et visualiser les sommets optimaux $M_{\min}$ et $N_{\min}$ (merci THALÈS).

Voici donc une résolution analytique du problème posé. La suivre sur la Figure 2.

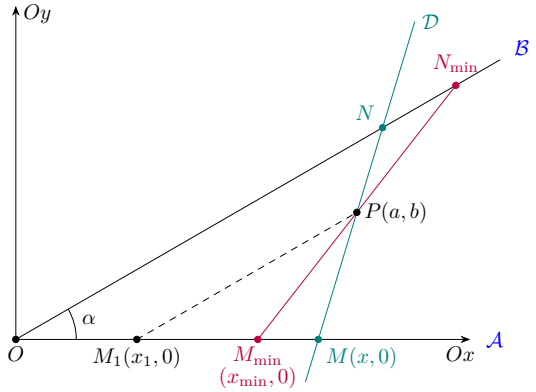


Figure 2.

On met deux axes de coordonnées (abscisse et ordonnées) Ox et Oy, l'un étant par exemple la droite $\mathcal{A}$. Le point P est de coordonnées (a,b), le point courant M sur la droite $\mathcal{A}$ de coordonnées $(x,0)$. On va jouer avec cette (seule) variable x.

Soit M_1 le point intersection de l'axe Ox avec la droite parallèle à $\mathcal{B}$ passant par P. Le problème posé n'a de sens que si M est au-delà (c'est-à-dire dans le sens des x croissant) du point M_1. Ce point M_1 est d'abcisse $x_1 = a - \frac{b}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{a\,\mathrm{tg}(\alpha) - b}{\mathrm{tg}(\alpha)}$ ($\mathrm{tg}(\alpha)$ désignant la tangente de α, laquelle valeur est le coefficient directeur des droites M_1P et $\mathcal{B}$).

Soit $f(x) =$ aire du triangle OMN. C'est une fonction de la variable réelle x seule, définie sur l'intervalle ouvert $]x_1, +\infty[$. On voit bien que $f(x) \to +\infty$ quand x tend vers x_1 par valeurs supérieures ou quand x tend vers $+\infty$.

L'objectif est de trouver $x_{\min}$ minimisant f sur $]x_1, +\infty[$. Il nous faut donc trouver l'expression analytique de $f(x)$. Pour cela, on détermine d'abord l'équation de la droite $\mathcal{D}$ (facile) et les coordonnées de N point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ (pas difficile non plus). Cela donne au final

$$x_N = \frac{bx}{b + (x-a)\mathrm{tg}(\alpha)} \;\; ; \; y_N = \frac{bx\ \mathrm{tg}(\alpha)}{b + (x-a)\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

Disposant des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, on calcule l'aire du triangle OMN par l'une des méthode possibles et bien adaptées au cas présent, par exemple en prenant la moitié de la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON}$ ou $\left|\det\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]\right|$ (calculs analytiques triviaux ici). Ainsi, à un coefficient (positif) multiplicatif près, on a

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{tg}(\alpha)x + b - a\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

On vérifie bien les comportements de la fonction continue (et même dérivable) f aux bords de l'intervalle $]x_1, +\infty[$ annoncés plus haut. Il *existe* donc un minimiseur et, comme

un seul point $x_{\min} \in]x_1, +\infty[$ *annule la dérivée de* f (calculs du niveau de classe de $1^{ère}$ ou de Terminale de lycée), c'est notre minimiseur. On obtient, après calculs,

$$x_{\min} = 2\ \frac{a\ \mathrm{tg}(\alpha) - b}{\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

On peut en rester là... mais aussi remarquer que $x_{\min} = 2x_1$, c'est-à-dire $OM_{\min} = 2\ OM_1$; on a là une occasion magnifique d'appliquer le théorème de Thalès au triangle $OM_{\min}N_{\min}$: M_1 étant le milieu de $OM_{\min}$, P **est le milieu de** $M_{\min}N_{\min}$! En conséquence, **les aires des triangles** $OPM_{\min}$ **et** $OPN_{\min}$ **sont égales.**

Conclusion

Un problème intéressant par son énoncé simple, sa solution simple aussi (après coup...). Proposé à des élèves sous forme vierge, c'est-à-dire sans indication, il peut être l'objet de développements intéressants, d'autant que sa résolution est susceptible de faire appel à différents résultats ou manières de faire en Analyse et Géométrie.

Références

1. J.-B. Hiriart-Urruty, *Du calcul différentiel au calcul variationnel : un aperçu de l'évolution de Pierre Fermat à nos jours.* Quadrature, n°70, 8 − 18 (2008).

2. J.-B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire.* Vol. 1 *: Premiers pas en optimisation.* Collection Opuscules, Editions Ellipses (2007).