Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), no. 2, 197–214.

# LA CONJECTURE DES POINTS LES PLUS ÉLOIGNÉS REVISITÉE

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY

RÉSUMÉ. Une des questions ouvertes les plus anciennes (depuis les années 1960) en analyse non linéaire et approximation est *la conjecture des points les plus éloignés* ; elle se formule comme suit :

Étant donné une partie fermée bornée $S$ d'un espace normé $X$, on considère la multiapplication $Q_S(\cdot)$ qui à un élément quelconque $x$ de $X$ associe les points de $S$ les plus éloignés de $x$ ; si $Q_S(x)$ ne contient qu'un seul élément pour tout $x \in X$, peut-on en déduire que $S$ est un singleton ?

Plus d'une centaine d'articles ont été consacrées à cette question depuis sa formulation, répondant positivement à la conjecture dans des cas assez généraux (exemples : si $S$ est compact, si $X$ est de dimension finie, si $X$ est un espace normé bien particulier, etc.), mais pas tous.

Nous revisitons ce problème à la lumière des résultats et techniques d'analyse convexe et/ou non lisse : la multiapplication $-Q_S(\cdot)$ est monotone et il est possible d'expliciter son prolongement maximal monotone ; une fonction particulière attachée à $S$ (semblable à celle d'Asplund pour la conjecture de convexité des ensembles de Tchebychev dans un espace de Hilbert) apparaît de manière naturelle dans ce contexte ; la convexité de cette fonction et/ou la différentiabilité de sa transformée de Legendre-Fenchel sont les clés permettant de répondre à la question posée. Avec cette approche plus « variationnelle » que les précédentes, nous retrouvons bon nombre de résultats acquis, sans toutefois être à même de répondre à la conjecture dans sa plus grande généralité ; mais au moins mettons-nous en évidence le « trou » à combler pour le faire de manière définitive.

ABSTRACT. One of the oldest open questions (since the 1960 years) in Real Analysis and Approximation Theory is the so-called *farthest point conjecture*; it is formulated as follows:

Given a closed bounded subset $S$ of a normed vector space $X$, one considers the set-valued mapping $Q_S(\cdot)$ which assigns to $x \in X$ the points in $S$ which are farthest from $x$; if $Q_S(x)$ contains one and only one element for all $x \in X$, could we assert that $S$ itself is a singleton?

More than one hundred papers have been devoted to this question since its formulation, positively answering the conjecture in rather general situations (examples: when $S$ is compact, if $X$ is finite-dimensional, when $X$ is a particular normed vector space, etc.) but not in all of them.

Reçu le 14 juillet 2004 et, sous forme définitive, le 13 octobre 2004.

We revisit this problem in the light of results and techniques from Convex Analysis and/or Nonsmooth Analysis: the set-valued mapping $-Q_S(\cdot)$ is monotone and it is possible to make explicit its maximal monotone extension on $X$; a specific function associated with $S$ (similar to Asplund's function for the conjecture dealing with the convexity of Tchebychev sets in Hilbert spaces) shows up naturally in such a context; the convexity of this function and/or the differentiability of its Legendre-Fenchel transform are the keys for answering the posed question. With this approach more "variational" than the previous ones, we recover a number of proved results, without however solving the problem in its full generality; but at least we delineate the "gap" to bridge.

**1. Introduction.** L'objet de ce travail[1] est un des problèmes ouverts les plus anciens en analyse réelle et approximation, une conjecture parente de celle sur la convexité des ensembles de Tchebychev, énoncée à la même époque (il y a plus de quarante ans) et à propos de laquelle nous avons écrit un article-revue privilégiant l'angle de vue de l'analyse variationnelle (convexe, non lisse) [7]. Nous adoptons ici le même point de vue, de sorte que le présent article peut être mis en parallèle avec [7].

Énonçons le problème. Soit $S$ une partie fermée bornée (non vide) d'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ ; on définit

$$\forall x \in X, \quad \Delta_S(x) := \sup\{\, \|x-y\| : y \in S \,\}, \tag{1.1}$$

$$Q_S(x) := \{\, y \in S : \|x-y\| = \Delta_S(x) \,\}. \tag{1.2}$$

On comprend qu'on ait pris $S$ borné pour pouvoir définir $\Delta_S(x)$ en (1.1), et le fait d'avoir pris $S$ fermé ne change rien à l'affaire puisque $\Delta_S = \Delta_{\overline{S}}$. L'ensemble $Q_S(x)$ peut être vide, bien entendu. $Q_S(\cdot)$ est appelée *multiapplication d'éloignement maximal* sur $S$ (parfois multiapplication antiprojection, appellation que nous trouvons incorrecte, même si on en comprend l'origine). $Q_S(x)$ consiste donc en l'ensemble des points de $S$ les plus éloignés de $x$ (au sens de la distance associée à $\|\cdot\|$). On imagine aisément qu'un certain nombre de problèmes en approximation, optimisation, contrôle optimal reviennent à évaluer $\Delta_S(x)$ ou à déterminer $Q_S(x)$. Parmi les questions relatives à $Q_S(x)$ figurent :

- quand $Q_S(x)$ est-il non vide, réduit à un seul point ?
- quid de la structure (topologique) de $Q_S(x)$ ?

Ce type de questions a été abordé depuis longtemps ; les premiers résultats sur la structure de $Q_S(x)$ sont sans doute ceux de Motzkin, Straus et Valentine dès 1953 [12]. Les années 1960-1970 ont vu une abondance de résultats du type : $Q_S(x)$ n'est pas vide et réduit à un seul point pour $x$ dans un ouvert $G_\delta$ partout dense dans $X$ (voir [5, Appendix II]). Mais la célébrité de $Q_S(x)$ vient de la conjecture énoncée par V. Klee en 1961 [10] :

$$\big(Q_S(x) \text{ singleton pour tout } x \in X\big) \overset{?}{\Longrightarrow} (S \text{ est un singleton})\,. \tag{1.3}$$

[1] Version écrite d'un exposé au Colloque «Control, Set-valued Analysis and Applications» (Université des Antilles et de la Guyanne, avril 2004).

V. Klee lui-même a répondu positivement à la question lorsque $X$ est de dimension finie, ou bien lorsque $S$ est une partie compacte d'un espace de Banach (voir aussi E. Asplund et son article fondamental de 1967 [1]). Mais V. Klee posait la question (1.3) lorsque $X$ est de dimension infinie, dans le contexte d'un *espace de Hilbert* plus précisément, et disons que même à ce jour elle n'a pas été réglée complètement. Une réponse positive à la question (1.3) dans toute sa généralité, ou à la question parente de la convexité des ensembles de Tchebychev, change quelque peu la structure de certains problèmes en Approximation mais ne révolutionne pas pour autant ce domaine . . .

Depuis son énoncé, plus d'une centaine d'articles ont été consacrées à cette conjecture sur les points les plus éloignés ; un échantillon en est fourni par les travaux de Kapoor [15], Narang [13], Panda [14], Fitzpatrick [6], Schwartz, Westphal (voir bibliographie). . . ; le livre récent de F. Deutsch [4] (que nous recommandons) éclaire bien ce que l'on peut faire ou ne pas faire en termes de projection ou d'éloignement maximal sur $S$, dans un contexte d'espace préhilbertien. Disons pour faire bref que les différents auteurs ont répondu (positivement) à la question centrale (1.3) dans des situations variées :

- en imposant des conditions sur l'espace $X$ sous-jacent (ou en examinant cas par cas des espaces vectoriels normés $X$ particuliers, par exemple $\ell^1$, $L^1\big([0,1]\big)$, $\ell^\infty$, $c_0$, $\mathcal{C}(K)$) ;
- en supposant des propriétés sur l'ensemble $S$ considéré (se rapprochant de la compacité) ;
- en demandant des propriétés sur la multiapplication $Q_S(\cdot)$ d'éloignement maximal sur $S$ (plus précisément l'existence d'applications sélections de $Q_S(\cdot)$ ayant des propriétés de type continuité).

Le fait que $X$ soit complet ou pas semble a priori sans conséquence pour le problème en question. Adopter le cadre d'un espace de Hilbert (comme dans la question originelle de Klee) rend les calculs plus simples (et évite d'avoir à distinguer la norme $\|\cdot\|$ et sa duale $\|\cdot\|_*$), et les résultats obtenus y sont un peu plus fins. C'est d'ailleurs le contexte que nous adopterons.

Le point de vue que nous défendons dans cette présentation est particulier, c'est celui de l'analyse variationnelle (calcul différentiel, analyse convexe non lisse) à la différence de la quasi-totalité des travaux précédents sur le sujet (analyse-géométrie des espaces vectoriels normés, théorèmes de points fixes, par exemple) ; on y verra apparaître naturellement des fonctions convexes, leurs sous-différentiels, et (surtout) les conjuguées de Legendre-Fenchel. Par ce biais sont couverts beaucoup des cas connus (lorsque $X$ est de dimension finie, lorsque $S$ est compact, lorsqu'il existe des sélections continues de $Q_S(\cdot)$). Le «trou» à combler pour répondre de manière définitive à la conjecture est bien localisé, c'est en gros celui entre la Gâteaux-différentiabilité et la Fréchet-différentiabilité d'une fonction convexe continue.

Outre cette introduction, notre travail comporte trois parties. Dans le paragraphe 2 on expose quelques faits élémentaires relatifs à la fonction $\Delta_S$ et la multiplication $Q_S(\cdot)$. Dans la section 3 sont présentées des propriétés plus élaborées de $\Delta_S$ et $Q_S(\cdot)$ du point de vue convexité et différentiabilité. C'est dans la dernière partie (section 4) que nous développons notre approche plus variationnelle (analyse convexe, non lisse) du sujet.

**2. Quelques faits élémentaires relatifs à la fonction $\Delta_S$ et la multiapplication $Q_S$.** Quelques observations avant de commencer :

- Le problème posé (formulé en (1.3)) est bien « dans un espace vectoriel normé » et non dans un espace métrique (où il est résolu immédiatement par la négative). Prenons en effet pour exemple :

$$X := \text{le plan privé de l'origine, muni de la distance déduite de la norme euclidienne usuelle ;}$$

$$S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

  Alors, pour tout $x \in X$, $Q_S(x)$ est un singleton, et pourtant $S$ n'est pas un singleton.
- On ne peut se limiter à l'hypothèse « $Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in X$ privé d'un point ». En effet, si $X$ est le plan muni de la norme euclidienne usuelle, et si $S$ est la boule unité fermée de $X$, $Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in X$ *sauf l'origine*, et $S$ n'est pas un singleton.
- On ne peut pas restreindre l'exigence « $Q_S(x)$ est un singleton » aux seuls $x$ de $S$. Par exemple, si $S$ est un doubleton, $S = \{a, b\}$, tout point de $S$ a un et un seul point dans $S$ le plus éloigné de lui, et $S$ lui-même n'est pas un singleton. Toutefois, passer de $S$ à son enveloppe convexe fermée $\overline{co}(S)$ pour l'exigence « $Q_S(x)$ est un singleton » change la donne et, effectivement, dans certains cas (*cf.* annexe) cela suffit pour assurer que $S$ est un singleton. Dans les deux exemples simples cités plus haut, $Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in \overline{co}(S)$ à un point près, et cela suffit à mettre en défaut la conclusion envisagée.

Désormais le cadre de travail est celui d'un *espace de Hilbert* $(H, \langle \cdot \, , \cdot \rangle)$, muni de la norme construite à partir du produit scalaire $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$. Nous listons ci-dessous quelques faits élémentaires relatifs à $\Delta_S$ et $Q_S(\cdot)$.

**2.1.** Si $\overline{x}$ est un point le plus éloigné de $x$ dans $S$, alors $\overline{x}$ est aussi un point le plus éloigné de $u$ sur la demi-droite issue de $x$ et dirigée par le vecteur $x - \overline{x}$.

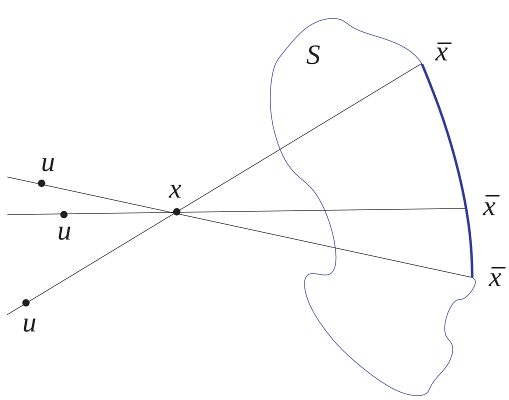


FIG. 1

Soit en effet $u = x + t\,(x - \overline{x})$ avec $t \geq 0$. Par hypothèse,

$$\|x - \overline{x}\| \geq \|x - y\|, \quad \text{pour tout } y \in S.$$

Alors

$$\|u - \overline{x}\| \ = \ \|x + t(x - \overline{x}) - \overline{x}\| \ = \ (1 + t)\|x - \overline{x}\|. \tag{2.1}$$

Ainsi, pour tout $y \in S$,

$$\begin{aligned}\|u - y\| &= \|x + t(x - \overline{x}) - y\| \\ &\leq \|x - y\| + t\,\|x - \overline{x}\| \\ &\leq \|x - \overline{x}\| + t\,\|x - \overline{x}\| \ \text{[de par l'hypothèse]} \\ &\leq (1 + t)\|x - \overline{x}\| \ = \ \|u - \overline{x}\| \ \text{[d'après (2.1)]}.\end{aligned}$$

D'où la propriété annoncée. Dans ce cas,

$$\Delta_S(u) - \Delta_S(x) \ = \ \|u - x\| \ = \ t\,\|x - \overline{x}\|\,.$$

Noter que le résultat démontré en ce point ne saurait être vrai pour les $u$ situés sur le segment joignant $x$ à $\overline{x}$ (un contre-exemple est facile à trouver).

**2.2.** La fonction $\Delta_S : H \to \mathbb{R}$ est une fonction *convexe, Lipschitz de constante 1* sur tout $H$ (et ce, sans aucune hypothèse additionnelle sur $S$).

Précisons quelque peu la propriété de Lipschitz. En supposant $Q_S(x) \ \neq \ \varnothing$ et $Q_S(x') \ \neq \ \varnothing$, on a l'implication suivante :

$$\big(Q_S(x) \cap Q_S(x') = \varnothing\big) \Rightarrow \big(\left|\Delta_S(x) - \Delta_S(x')\right| \ < \ \|x - x'\|\big)\,. \tag{2.2}$$

Prenons en effet $y \in Q_S(x)$ tel que $y \in S$ et $\|y - x\| = \Delta_S(x)$. Mais comme $y \notin Q_S(x')$, on a $\|y - x'\| \ < \ \Delta_S(x')$ et par suite

$$\Delta_S(x) - \Delta_S(x') < \ \|y - x\| - \|y - x'\| \ \leq \ \|x - x'\|.$$

On obtient une inégalité similaire en échangeant le rôle de $x$ et $x'$.

L'implication réciproque de (2.2) n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple de la figure 2.

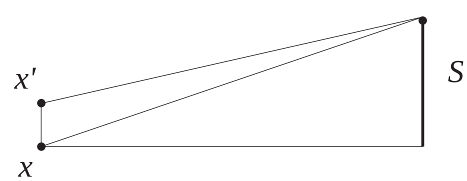


FIG. 2

**2.3.** L'ensemble $Q_S(x)$ est toujours une partie fermée bornée de $S$ (mais on ne peut rien dire de plus du point de vue topologique) ; en fait

$$Q_S(x) \subset S \cap \mathrm{Fr}(\overline{co}(S)), \quad \text{pour tout } x \in H. \tag{2.3}$$

À vrai dire, passer de $S$ à $\overline{co}(S)$ ne modifie pas fondamentalement les choses : $\Delta_S = \Delta_{\overline{co}(S)}$, et le problème d'éloignement maximal sur $\overline{co}(S)$ n'apporte pas de nouvelles solutions : $Q_S = Q_{\overline{co}(S)}$.

Notons ici l'exemple intéressant suivant : si $S$ est tel que $\overline{co}(S) = \overline{B}(0, 1)$ (boule unité fermée de $H$), alors $Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in H$ sauf en un point (ce point étant l'origine).

**2.4.** Lorsque $S$ est une partie compacte, la multiapplication $Q_S(\cdot)$ est semi-continue extérieurement (on dit aussi semi-continue supérieurement), i.e. : pour tout ouvert $\Omega$ contenant $Q_S(x)$, il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $Q_S(x') \subset \Omega$ pour tout $x' \in V$.

Si $Q_S(x)$ se trouve être un singleton pour tout $x$, $Q_S(x) = \{q_s(x)\}$, la propriété ci-dessus exprime la continuité de l'application $q_S$. Et, comme nous le verrons plus loin, cette continuité de $q_S$ permet d'assurer que $S$ est un singleton.

**2.5.** Propriétés (moins élémentaires) relatives au domaine et à l'image de $Q_S(\cdot)$. Rappelant que

$$\mathrm{Dom}\, Q_S = \{x \in H \; ; \; Q_S(x) \neq \varnothing\} \text{ et}$$
$$\mathrm{Im}\, Q_S = \bigcup_{x \in H} Q_S(x),$$

on a

$$\overline{\mathrm{Dom}\, Q_S} = H, \quad \overline{co}\,(\mathrm{Im}\, Q_S) = \overline{co}(S) \tag{2.4}$$

(voir [26, §2] et les références qu'on y donne).

**3. Propriétés plus élaborées du point de vue convexité et différentiabilité.**

**3.1. Caractérisation variationnelle de $Q_S(x)$.**

**Proposition 3.1.** *Soit $x \in H$ et $\overline{x} \in S$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\overline{x} \in Q_S(x)$ ;

ii) $\langle\, x - \overline{x}, y - \overline{x}\,\rangle \geq \frac{1}{2}\|\overline{x} - y\|^2$ *pour tout* $y \in S$ ;

iii) $\overline{x} \in Q_S(\overline{x} + \alpha\,(x - \overline{x}))$ *pour tout* $\alpha \geq 1$ ;

iv) $\Delta_S(\overline{x} + \alpha\,(x - \overline{x})) = \alpha\,\|x - \overline{x}\|$ *pour tout* $\alpha \geq 1$.

*Démonstration.* [i) ⇔ ii)]. Sachant que $\overline{x} \in S$, nous avons $\overline{x} \in Q_S(x)$ si et seulement si

$$\|x - \overline{x}\|^2 \geq \|x - y\|^2, \text{ pour tout } y \in S. \tag{3.1}$$

Développons $\|x - y\|^2 = \|(x - \overline{x}) + (\overline{x} - y)\|^2$ dans le membre de droite de l'inégalité au-dessus et on arrive directement à :

$$2\langle\, x - \overline{x}, y - \overline{x}\,\rangle \geq \|\overline{x} - y\|^2, \text{ pour tout } y \in S. \tag{3.2}$$

[ii) ⇔ iii)]. L'assertion (3.2) ci-dessus équivaut à :

$$2\langle\, x - \overline{x}, y - \overline{x}\,\rangle \geq \frac{1}{\alpha}\,\|\overline{x} - y\|^2, \text{ pour tout } \alpha \geq 1 \text{ et tout } y \in S\,. \tag{3.3}$$

Il suffit de réorganiser ça en

$$2\left\langle\, \left[\overline{x} + \alpha\,(x - \overline{x})\right] - \overline{x}, y - \overline{x}\,\right\rangle \geq \|\overline{x} - y\|^2, \text{ pour tout } \alpha \geq 1,$$

et reconnaître la caractérisation du fait que $\overline{x} \in Q_S(x + \alpha(x - \overline{x}))$ pour tout $\alpha \geq 1$.

[iii) $\Leftrightarrow$ iv)]. L'assertion iv) se traduit par

$$\|x + \alpha(x - \overline{x}) - y\|^2 \leq \alpha^2 \|x - \overline{x}\|^2, \text{ pour tout } \alpha \geq 1 \text{ et tout } y \in S,$$

ce qui, après développement de $\|x - y + \alpha(x - \overline{x})\|^2$ conduit immédiatement à (3.3). $\square$

Cette proposition 3.1 ne surprend pas dans la mesure où il y avait un énoncé similaire pour la multiapplication projection sur $S$ [3, p. 24].

L'implication [i) $\Rightarrow$ ii)] avait été montrée par un calcul direct dans §2 (modulo le changement de variable $\alpha = 1 + t$).

La caractérisation ii) de la proposition 3.1 induit que pour $\overline{x} \in Q_S(x)$,

$$\left\langle \frac{x - \overline{x}}{\|x - \overline{x}\|}, \frac{y - \overline{x}}{\|y - \overline{x}\|} \right\rangle \geq \frac{1}{2} \frac{\|\overline{x} - y\|}{\|\overline{x} - x\|} \text{ pour tout } y \in S, \tag{3.4}$$

c'est-à-dire que l'angle des vecteurs unitaires portés pour $x - \overline{x}$ et $y - \overline{x}$ est toujours aigu ; mais comme l'indique la proposition 3.1 et comme l'illustrent des exemples simples dans le plan, le seul fait d'avoir un angle aigu entre $x - \overline{x}$ et $y - \overline{x}$ pour tout $y \in S$ n'assure pas que $\overline{x}$ soit un point de $S$ le plus éloigné de $S$. Par ailleurs, on peut très bien avoir

$$\overline{x} \in Q_S(x) \text{ et } \langle x - \overline{x}, y - \overline{x} \rangle = \tfrac{1}{2}\|\overline{x} - y\|^2, \text{ pour certains } y \in S.$$

Tirons une conséquence de la caractérisation de $\overline{x} \in Q_S(x)$ dont l'interprétation geométrique est claire.

**Corollaire 3.2.** *Soit $x \in H$ et $\overline{x} \in Q_S(x)$. Alors, pour tout $\alpha > 1$,*

$$Q_S(\overline{x} + \alpha(x - \overline{x})) = \{\overline{x}\}\,. \tag{3.5}$$

*Autrement dit, la sphère de centre $\overline{x} + t(x - \overline{x})$ et de rayon $\Delta_S(x + \alpha(x - \overline{x}))$ ne touche $S$ qu'au seul point $\overline{x}$.*

*Démonstration.* Soit $\widetilde{x} \in Q_S(\overline{x} + t(x - \overline{x}))$ et $\alpha > 1$. Montrons qu'alors, $\widetilde{x} = \overline{x}$ nécessairement.

D'après la caractérisation ii) de la proposition 3.1,

$$\langle \overline{x} + \alpha(x - \overline{x}) - \widetilde{x}, y - \widetilde{x} \rangle \geq \frac{1}{2}\|y - \widetilde{x}\|^2, \text{ pour tout } y \in S.$$

En particulier, pour $y = \overline{x}$,

$$\|\overline{x} - \widetilde{x}\|^2 + \alpha\langle x - \overline{x}, \overline{x} - \widetilde{x} \rangle \geq \frac{1}{2}\|\overline{x} - \widetilde{x}\|^2. \tag{3.6}$$

La même caractérisation, de $\overline{x} \in Q_S(x)$ cette fois, indique pour le choix particulier de $y = \widetilde{x}$

$$\langle x - \overline{x}, \widetilde{x} - \overline{x} \rangle \geq \frac{1}{2} \|\overline{x} - \widetilde{x}\|^2. \tag{3.7}$$

L'addition membre à membre de (3.6) et de (3.7) multipliée par $\alpha$ conduit à

$$\frac{1 - \alpha}{2} \|\overline{x} - \widetilde{x}\|^2 \geq 0,$$

d'où $\|\overline{x} - \widetilde{x}\| = 0$ puisque $\alpha > 1$. $\square$

**3.2. Caractère dissipatif de la multiapplication $Q_S(\cdot)$.**

**Proposition 3.3.** *La multiapplication $Q_S(\cdot)$ est dissipative, c'est-à-dire :*

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in H,\; \overline{x}_1 \in Q_S(x_1),\; \overline{x}_2 \in Q_S(x_2), \quad \langle\, x_1 - x_2,\, \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \,\rangle \leq 0 \tag{3.8}$$

*(terminologie plus usuelle : la multiapplication $-Q_S(\cdot)$ est monotone).*

*Démonstration.* D'après la caractérisation ii) de la proposition 3.1,

$$\begin{aligned}\left\langle\, x_1 - \overline{x}_1, \overline{x}_2 - \overline{x}_1 \,\right\rangle &\geq \frac{1}{2}\left\|\, \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \,\right\|^2,\\ \left\langle\, x_2 - \overline{x}_2, \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \,\right\rangle &\geq \frac{1}{2}\left\|\, \overline{x}_2 - \overline{x}_1 \,\right\|^2,\end{aligned}$$

d'où par addition

$$\|\overline{x}_2 - \overline{x}_1\|^2 + \langle\, x_1 - x_2, \overline{x}_2 - \overline{x}_1 \,\rangle \geq \|\overline{x}_2 - \overline{x}_1\|^2$$

et l'inégalité de (3.8) s'ensuit. □

On verra plus loin une raison plus frappante pour laquelle $-Q_S(\cdot)$ est monotone : $-Q_S(\cdot)$ est contenu dans le sous-différentiel d'une fonction spécifique $\Psi : H \to \mathbb{R}$ qui se trouve être convexe continue sur $H$. Elle est donc aussi cycliquement monotone de ce fait. Quant à la monotonie maximale de $-Q_S(\cdot)$, notons les deux faits suivants [17,26] :

- $-Q_S(\cdot)$ n'est pas monotone maximale en général ; en fait,

$$(-Q_S \text{ est monotone maximale}) \Longleftrightarrow (S \text{ est un singleton}), \tag{3.9}$$

  auquel cas $-Q_S(x) = \{-s\}$ (pour tout $x \in H$) évidemment ;
- $-Q_S$ est augmentée en une multiapplication monotone maximale (voir [2]), définie de manière unique sur tout $H$ ici, qui se trouve être le sous-différentiel de la fonction convexe continue $\Psi_S$ évoquée plus haut (voir §4 infra).

**3.3. Forte convexité de la fonction $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.** La fonction $\Delta_S : H \to \mathbb{R}$ étant convexe et positive, il en est de même de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$. En fait on a plus que cela : $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ est fortement convexe et 1-coercive sur $H$.

**Proposition 3.4.** i) *La fonction $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ est fortement convexe sur $H$, de module de forte convexité 1, c'est-à-dire, pour tout $x_1,\ x_2 \in H$ et $\lambda \in [0,1]$ :*

$$\frac{1}{2}\Delta_S^2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;\leq\; \frac{\lambda}{2}\,\Delta_S^2(x_1) + \frac{(1-\lambda)}{2}\,\Delta_S^2(x_2) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \tag{3.10}$$

*(d'une manière équivalente : $\frac{1}{2}\Delta_S^2 - \frac{1}{2}\|.\|^2$ est encore convexe).*

ii) $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ *est 1-coercive sur $H$, c'est-à-dire :*

$$\frac{\Delta_S^2(x)}{\|x\|} \longrightarrow +\infty \ \textit{ quand } \|x\| \longrightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* i) Soit $x_1$, $x_2$ dans $H$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $y_\varepsilon \in S$ tel que

$$\frac{1}{2}\Delta_S^2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \varepsilon \leq \frac{1}{2}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - y_\varepsilon\|^2. \tag{3.11}$$

La fonction $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ étant fortement convexe sur $H$, de module de forte convexité 1 [8, Chap. IV], on a :

$$\frac{1}{2}\|\lambda(x_1 - y_\varepsilon) + (1-\lambda)(x_2 - y_\varepsilon)\|^2 \leq \frac{\lambda}{2}\|x_1 - y_\varepsilon\|^2 + \frac{(1-\lambda)}{2}\|x_2 - y_\varepsilon\|^2 - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x_1 - x_2\|^2.$$

Cette inégalité, couplée avec (3.11) et la définition de $\Delta_S^2(x_i)$, conduit à :

$$\frac{1}{2}\Delta_S^2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \frac{\lambda}{2}\Delta_S^2(x_1) + \frac{(1-\lambda)}{2}\Delta_S^2(x_2) - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x_1 - x_2\|^2 + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit l'inégalité voulue (3.10).
ii) $S$ étant borné, désignons par $\alpha$ un majorant de $\{\|y\| : y \in S\}$ et choisissons arbitrairement $y_0 \in S$. Alors, pour tout $x \in H$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta_S^2(x) &\geq \|x - y_0\|^2 \text{ [par définition de } \Delta_S^2(x)],\\ &\geq \|x\|^2 + \|y_0\|^2 - 2\alpha\|x\|.\end{aligned}$$

En conséquence, $\Delta_S^2(x)/\|x\| \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$. $\square$

La forte convexité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$, dont on vient de faire une démonstration directe, sera vue d'une autre manière plus loin (au §4.2) lorsque $\frac{1}{2}(\Delta_S^2 - \|.\|^2)$ apparaîtra comme la transformée de Legendre-Fenchel d'une autre fonction.

**3.4. Le sous-différentiel de $\Delta_S$ et de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.** Puisque $\Delta_S$ est convexe et Lipschitz de constante 1 sur $H$, on a : $\partial\Delta_S(x) \subset \overline{B}(0,1)$ pour tout $x \in H$. En fait, il y a un résultat plus fin par Westphal et Schwartz [26, Theorem 4.2] :

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Im}\partial\Delta_S \text{ est une partie } \textit{convexe} \text{ de } H, \text{ comprise entre}\\ \text{la boule unité ouverte et son adhérence :}\\ \qquad\qquad B(0,1) \subset \operatorname{Im}\partial\Delta_S \subset \overline{B}(0,1).\end{array}\right. \tag{3.12}$$

Conséquence immédiate : $\overline{\operatorname{Im}\partial\Delta_S} = \overline{B}(0,1)$.

À vrai dire il est plus intéressant de considérer le sous-différentiel de la fonction $\frac{1}{2}\Delta_S^2$. Ici la règle de sous-différentiation de fonctions composées s'applique sans difficulté,

$$\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x) = \Delta_S(x)\,\partial\Delta_S(x) \text{ pour tout } x \in H, \tag{3.13}$$

mais le calcul explicite de $\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)$ reste entier. Pour cela, écrivons $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\Delta_S^2 = \sup\limits_{y \in S} g_y,\\ \text{où } g_y : x \in H \longmapsto g_y(x) := \frac{1}{2}\|x - y\|^2.\end{array}\right. \tag{3.14}$$

Là, deux types d'expressions de $\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x)$ sont possibles :

- celle à l'aide des $\partial g_y(x),\ y \in Q_S(x)$, exigeant pour cela une hypothèse de *compacité* de $S$ ;
- celle à l'aide des $\partial g_y(x')$ pour $x'$ voisin de $x$, ou bien des approximations $\partial_\varepsilon\, g_y(x)$ pour $\varepsilon > 0$, et des $y \in S$ réalisant le supremum à $\varepsilon$ près dans la définition de $\frac{1}{2}\Delta_S^2(x)$.

**Proposition 3.5.** *Soit $x \in H$. Alors :*

i) *Si $S$ est compact,*

$$\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x) = x - \overline{co}\big(Q_S(x)\big). \tag{3.15}$$

ii) *En règle générale,*

$$\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x) = \bigcap_{h>0,\,\varepsilon>0} \overline{co}\left\{\ (x'-y) : \|x'-x\| \leq h \textit{ et } y \in Q_S^\varepsilon(x)\ \right\}, \tag{3.16}$$

$$\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co}\ \left\{(x-y) + \overline{B}(0,\sqrt{2\varepsilon}) : y \in Q_S^\varepsilon(x)\right\}, \tag{3.17}$$

*où* $Q_S^\varepsilon(x) \ := \left\{\ y \in S : \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \geq \frac{1}{2}\Delta_S^2(x) - \varepsilon\ \right\}$.

*Démonstration.* i) La fonction $(x,y) \mapsto g_y(x)$ en (3.14) est continue et $S$ est une partie compacte ; il suffit donc d'appliquer le théorème de Valadier ([23, Théorème 2] et [11, p. 355]) en observant que

$$\partial g_y(x) = \{\nabla g_y(x)\} = \{x-y\}.$$

ii) Sans hypothèse de compacité sur $S$, la formule (3.16) résulte de l'application du Théorème 1 de [23] à $\frac{1}{2}\Delta_S^2 \ = \ \sup_{y\in S}\, g_y$.

Quant à la formule (3.17), elle vient du théorème de Volle [25, Théorème 1] exprimant $\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x)$ à l'aide des $\varepsilon$-sous-différentiels de $g_y$ en $x$, pour $y \in Q_s^\varepsilon(x)$. Ici, le $\varepsilon$-sous-différentiel $\partial_\varepsilon g_y(x)$ de $g_y$ en $x$ est très simple à déterminer puisque

$$\begin{aligned}\partial_\varepsilon g_y(x) &:= \left\{\ p \in H : g_y(x') \geq g_y(x) + \langle\, p, x'-x\,\rangle - \varepsilon \text{ pour tout } x' \in H\ \right\}\\ &= x - y + \overline{B}(0,\sqrt{2\varepsilon}). \qquad \square\end{aligned}$$

## 4. Une approche plus analyse convexe de la conjecture.

**4.1. Gâteaux-, Hadamard-, Fréchet-différentiabilité de la fonction $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.** La fonction convexe $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ est Gâteaux-différentiable en $x$ si et seulement si $\partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x)$ est un singleton. La question qui se pose naturellement est : quel lien y-a-t-il entre l'hypothèse dans (1.3), à savoir «$Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in H$» et la Gâteaux-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sur $H$ ? Une première partie de réponse est simple : puisque l'inclusion (facile) $x - \overline{co}\ Q_S(x) \subset \partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x)$ en tout $x \in H$ est toujours vraie, la Gâteaux-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ en $x$ implique que $Q_S(x)$ contient au plus un point, et si $Q_S(x) = \{q_S(x)\}$, le gradient de Gâteaux en $x$ est $x - q_S(x)$. La réciproque est vraie toutes les fois que la règle de calcul (3.15) s'applique, lorsque $S$ est compact par exemple. En règle générale :

- Le fait que $Q_S(x)$ soit un singleton au (seul) point $x$ n'implique pas la Gâteaux-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ en $x$ : un exemple nous en a été fourni récemment par M. Valadier [24].
- Nous pensons que l'hypothèse «$Q_S(x)$ est un singleton *pour tout* $x \in H$» implique la Gâteaux-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sur $H$, mais n'avons pu le démontrer sans quelque hypothèse sur l'ensemble $S$ ou l'application $q_S$ (de $Q_S(x) = \{q_S(x)\}$ pour tout $x \in H$). Le résultat le plus fin obtenu est le suivant, grâce à [21,22] :

$$\text{(4.1)}\qquad \begin{cases} \text{Si pour tout } d \in H, \text{ l'application } x \mapsto \langle\, q_S(x), d\,\rangle \text{ est} \\ \text{semi-continue supérieurement sur } [x,\ x + \delta d],\ \delta > 0, \\ \text{alors } \frac{1}{2}\Delta_S^2 \text{ est Gâteaux-différentiable sur } H \text{ (et, bien sûr,} \\ \nabla_G\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(x) = x - q_S(x) \text{ pour tout } x \in H). \end{cases}$$

Une fois la Gâteaux-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sur $H$ acquise, on a en fait plus que cela : la fonction $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ étant convexe continue sur $H$, la Gâteaux-différentiabilité implique la Hadamard-différentiabilité[2] sur $H$. En somme, «moralement» parlant, l'hypothèse «$Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in H$» implique la Hadamard-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sur $H$.

Et la Fréchet-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ sur $H$ ? Même si $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ est une fonction convexe continue sur $H$, et pas n'importe quelle fonction convexe continue, sa Fréchet-différentiabilité apparaît comme une exigence plus forte que la Gâteaux / Hadamard-différentiabilité. En effet, sous l'hypothèse «$Q_S(x)$ est un singleton pour tout $x \in H$,

[2] Une fonction $f : H \to \mathbb{R}$ est dite Hadamard-différentiable en $x$ s'il existe un élément de $H$, noté $\nabla_H f(x)$, tel que

$$\frac{f(x+td) - f(x)}{t} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \langle\, \nabla_H f(x), d\,\rangle$$

uniformément en $d$ dans un compact (quelconque) de $H$. La Hadamard-différentiabilité est intermédiaire entre la Gâteaux-différentiabilité et la Fréchet-différentiabilité. Si $H$ est de dimension finie, la Hadamard et la Fréchet-différentiabilité sont équivalentes. Si $f$ est localement Lipschitz sur $H$ (comme c'est le cas des fonctions convexes continues), la Gâteaux-différentiabilité implique la Hadamard-différentiabilité.

$Q_S(x) = \{q_S(x)\}$ » , on a les équivalences suivantes [16, Section 2] :

$$(4.2)\quad \begin{cases} \bullet \ \ \frac{1}{2}\Delta_S^2 \text{ Gâteaux-différentiable sur } H \iff (q_S \text{ est continue de } \\ \quad H \text{ muni de la topologie forte dans } H \text{ munie de la topologie faible) ;} \\ \bullet \ \ \frac{1}{2}\Delta_S^2 \text{ Fréchet-différentiable sur } H \iff (q_S \text{ est continue de } \\ \quad H \text{ fort dans } H \text{ fort).} \end{cases}$$

**4.2. Les fonctions $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ et $\frac{1}{2}(\Delta_S^2 - \|\cdot\|^2\ )$ comme des transformées de Legendre-Fenchel.** Commençons par définir deux fonctions associées à $S$ (toujours une partie fermée bornée non vide de $(H, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$.

**Définition 4.1.** On pose :

$$x \in H \mapsto \theta_S(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - \ \sigma_{-S}(x), \tag{4.3}$$

où $\sigma_{-S}$ désigne la fonction d'appui de $-S$ ;

$$x \in H \mapsto g_S(x) := -\frac{1}{2}\|x\|^2 \text{ si } x \in -S, \ +\infty \text{ sinon.} \tag{4.4}$$

La fonction $\theta_S$ est finie et continue sur $H$, elle ne saurait être faiblement continue (sauf si $S$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie). La fonction $g_S$ non plus n'est pas faiblement semi-continue inférieurement sur $H$, même lorsque $S$ est convexe.

Les fonctions $\theta_S$ et $g_S$ ne sont *jamais* convexes, sauf dans le cas très particulier (mais intéressant pour notre démarche) où $S$ est un singleton.

**Proposition 4.2.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\theta_S$ *est convexe.*
ii) $g_S$ *est convexe.*
iii) $S$ *est un singleton.*

*Démonstration.* [i) $\Rightarrow$ iii)]. Si $\theta_S$ est convexe, nous sommes en présence de deux fonctions convexes, $\theta_S$ et $\sigma_{-S}$, dont la somme est $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ :

$$\theta_S(x) + \sigma_{-S}(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \text{ pour tout } x \in H.$$

Dans ce cas, grâce au théorème (de factorisation) réciproque du théorème de Moreau (voir [9]), les deux fonctions $\theta_S$ et $\sigma_{-S}$ sont nécessairement Gâteaux-différentiables (ce sont même des régularisées de Moreau-Yosida) ; par conséquent, $\partial\,\sigma_{-S}(0) = -S$ est un singleton.

[ii) $\Rightarrow$ iii)]. Si $g_S$ est convexe, son domaine effectif, c'est-à-dire $-S$, est convexe. Ensuite, la fonction $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ ne peut être convexe sur un segment joignant deux points distincts de $S$. Donc $S$ est réduit à un seul point.

Les implications [iii) $\Rightarrow$ i)] et [iii) $\Rightarrow$ ii)] étant triviales, les équivalences annoncées sont démontrées. $\square$

Les transformées (ou conjuguées) de Legendre-Fenchel de $\theta_S$ et $g_S$ sont très liées, comme le montre le résultat ci-dessous.

**Théorème 4.3.** *Pour tout* $p \in H$,

$$\theta_S^*(p) = \tfrac{1}{2}\Delta_S^2(p)\,; \tag{4.6}$$

$$g_S^*(p) = \tfrac{1}{2}\left[\Delta_S^2(p) - \|p\|^2\right]. \tag{4.7}$$

*Démonstration.* Soit $p \in H$. Comme $\sigma_{-S}(x) = \sup\limits_{s \in S} \langle -s, x \rangle$, on a :

$$\begin{aligned}
\theta_S^*(p) &:= \sup_{x \in H} \left\{ \langle p, x \rangle - \tfrac{1}{2}\|x\|^2 + \sigma_{-S}(x) \right\} \\
&= \sup_{x \in H,\, s \in S} \left\{ \langle p, x \rangle - \tfrac{1}{2}\|x\|^2 - \langle s, x \rangle \right\} \\
&= \sup_{s \in S} \sup_{x \in H} \left\{ \langle p - s, x \rangle - \tfrac{1}{2}\|x\|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Or le deuxième supremum dans l'expression ci-dessus n'est autre que la transformée de Legendre-Fenchel de $\frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ évaluée en $p - s$ ; il vaut donc $\frac{1}{2}\|p - s\|^2$. D'où le résultat (4.6). Par des calculs du même type,

$$\begin{aligned}
g_S^*(p) &:= \sup_{x \in -S} \left\{ \langle p, x \rangle + \tfrac{1}{2}\|x\|^2 \right\} \\
&= \sup_{y \in S} \left\{ -\langle p, y \rangle + \tfrac{1}{2}\|y\|^2 \right\} \\
&= \sup_{y \in S} \left\{ \tfrac{1}{2}\|p - y\|^2 - \tfrac{1}{2}\|p\|^2 \right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\Delta_S^2(p) - \tfrac{1}{2}\|p\|^2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat (4.7) escompté. □

En raison de la convexité de $g_S^*$ on retrouve ici la propriété de forte convexité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ (Proposition 3.4).

Nous convenons d'appeler $g_S^*$, que nous noterons désormais $\Psi_S$, *la deuxième fonction d'Asplund*[3] en raison du parallèle saisissant avec la fonction (baptisée) d'Asplund qui intervient dans l'étude de la convexité (éventuelle) des ensembles de Tchebychev [7] ; dans ce contexte, on avait

$$x \in H \mapsto f_S(x) := \tfrac{1}{2}\|x\|^2 \text{ si } x \in S,\ +\infty \text{ sinon},$$

dont la transformée de Legendre-Fenchel devenait

$$p \in H \mapsto f_S^*(p) = \Phi_S(p) = \tfrac{1}{2}\left[\|p\|^2 - d_S^2(p)\right],$$

où $d_S$ désigne la fonction-distance à $S$.

Les résultats de différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ ($= \theta_S^*$) et $\Psi_S$ ($= g_S^*$) vont ensemble puisque

$$\partial\,\Psi_S(p) = \partial\left(\tfrac{1}{2}\Delta_S^2\right)(p) - p \text{ pour tout } p \in H. \tag{4.8}$$

Précisons un peu plus ce qu'est $\partial\,\Psi_S$ et sa relation avec la multiapplication $-Q_S(\cdot)$.

[3] E. Asplund, mathématicien danois disparu prématurément il y a trente ans exactement, en 1974, et dont les contributions profondes ont encore un impact de nos jours.

**Proposition 4.4.** *Soit $x \in -S$. Alors :*

$$(p \in \partial\, g_S(x)) \Longleftrightarrow (-x \in Q_S(p)). \tag{4.9}$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
p \in \partial\, g_S(x) &\Longleftrightarrow g_S^*(p) + g_S(x) - \langle\, p, x\,\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\Delta_S^2(p) - \frac{1}{2}\|p\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle\, p, x\,\rangle = 0 \\
&\text{[ d'après la définition (4.4) de } g_S(x) \text{ et l'évaluation (4.7) de } g_S^*(p)] \\
&\Longleftrightarrow \Delta_S^2(p) - \|p + x\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \Delta_S^2(p) \;=\; \|p - (-x)\|^2 \\
&\Longleftrightarrow -x \in Q_S(p). \qquad \square
\end{aligned}$$

Comme corollaire de ce résultat et/ou du travail fait au §3.4, nous avons une inclusion qui explique bien des propriétés de la multiapplication $-Q_S(\cdot)$.

**Corollaire 4.5.** *On a :*

$$-\overline{co}\big(Q_S(p)\big) \;\subset\; \partial\, \Psi(p) \text{ pour tout } p \in H. \tag{4.10}$$

*L'égalité à lieu si $S$ est compact (et l'adhérence est inutile si $H$ est de dimension finie).*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que $Q_S(p)$ est inclus dans la partie convexe fermée $\partial\, \Psi_S(p)$. On a :

$$\begin{aligned}
-x \in Q_S(p) &\Longleftrightarrow p \in \partial\, g_S(x) \text{ [d'après (4.9)]} \\
&\Longrightarrow x \in \partial\, g_S^*(p) = \partial\, \Psi_S(p).
\end{aligned}$$

D'où, $-Q_S(p) \;\subset\; \partial\, \Psi_S(p)$. On aurait pu aussi arriver à cette conclusion grâce à l'inclusion (toujours vraie) $p - \overline{co}\big(Q_S(p)\big) \;\subset\; \partial(\frac{1}{2}\Delta_S^2)(p)$ et à la relation (4.8).

Lorsque $S$ est compact, l'égalité (3.15) couplée avec la relation (4.8) donne le résultat annoncé. Si $H$ est de dimension finie, $Q_S(p)$ est compact de sorte que $co\big(Q_S(p)\big)$ est fermée. $\square$

D'autres propriétés de $\partial\Psi_S$ sont données par Schwartz [17, Lemma 1 et Theorem 1] :

$$-Q_S(p) = \partial\, \Psi_S(p) \,\cap\, S(-p, \Delta_S(p)) \tag{4.11}$$

où $S(u, r)$ désigne la sphère de centre $u$ et de rayon $r$ ;

$$\overline{\mathrm{Im}\, \partial\, \Psi_S} = \overline{co}(-S) \;\subset\; \bigcap_{p \in H} \overline{B}(-p, \Delta_S(p)), \tag{4.12}$$

cette dernière inclusion pouvant néanmoins s'avérer très grossière.

**4.3. La différentiabilité d'une transformée de Legendre-Fenchel comme critère de convexité.** Les deux résultats qui suivent, énoncés dans un contexte de dimension infinie, sont extraits des travaux de V. Soloviov [18,19,20].

Le premier est un résultat de dualité en quelque sorte.

**Théorème 4.6.** [18, Theorem 2.1] *Soit $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement en $x_0 = \nabla_F g^*(p_0)$, où $\nabla_F g^*(p_0)$ est le gradient de Fréchet de $g^*$ en (un certain) $p_0 \in H$. Alors*

$$g(x_0) = g^{**}(x_0) \tag{4.13}$$

*(où $g^{**}$ désigne la biconjuguée de Legendre-Fenchel de $g$). Si $g$ est faiblement semi-continue inférieurement en $x_0 = \nabla_G g^*(p_0)$, où $\nabla_G g^*(p_0)$ est le gradient de Gâteaux de $g^*$ en (un certain) $p_0 \in H$, alors on a encore (4.13).*

Comme conséquence nous avons un critère de convexité de $g$ basé sur la différentiabilité de $g^*$.

**Théorème 4.7.** [19, Theorem 1] *Soit $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement sur $H$ (resp. faiblement semi-continue inférieurement sur $H$). On suppose que $g^* : H \to \mathbb{R}$ est Fréchet-différentiable (resp. Gâteaux-différentiable) sur $H$. Alors $g$ est convexe.*

*Démonstration.* [19, p. 2] Soit $D := \operatorname{Im} \partial g^* = \{\nabla g^*(p) \; ; \; p \in H\}$ ; on prend le cas où $g^*$ est Fréchet-différentiable sur $H$, $\nabla g^*(p)$ est le gradient de Fréchet de $g^*$ en $p$.

D'après le théorème au-dessus, $g(x) = g^{**}(x)$ pour tout $x \in D$.

Rappelons tout d'abord que

$$\operatorname{Im} \partial g^* \; = \; \operatorname{dom} \partial g^{**} (= \{x \in H \; ; \; \partial g^{**}(x) \neq \varnothing\})$$

(puisque $(g^{**})^* = g^*$ et que $\partial g^* = (\partial g^{**})^{-1}$).

Soit d'abord $\overline{x} \in \operatorname{dom} g^{**}$. Si $\overline{x} \in D = \operatorname{dom} \partial g^{**}$, c'est fini car alors $g(\overline{x}) = g^{**}(\overline{x})$. Sinon, d'après le théorème de Brondsted-Rockafellar [5, Chapter I, Section 6.3], applicable ici à la fonction convexe semi-continue inférieurement $g^{**}$ sur l'espace complet $H$, on peut exhiber une suite $(x_n)$ qui converge vers $\overline{x}$, avec :

$$x_n \in D \text{ pour tout } n \; ; \quad g^{**}(x_n) \longrightarrow g^{**}(\overline{x}) \text{ quand } n \to \infty.$$

Par conséquent, $g^{**}(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n$. En passant à la limite sur $n$, grâce à la semi-continuité inférieure de $g$ :

$$g^{**}(\overline{x}) \; = \; \lim g^{**}(x_n) \; = \; \lim g(x_n) \; \geq \; g(\overline{x}). \tag{4.14}$$

En définitive, $g^{**}(\overline{x}) = g(\overline{x})$ (car l'inégalité inverse de (4.14), $g^{**}(\overline{x}) \leq g(\overline{x})$, est toujours vraie).

On a donc démontré :

$$g^{**}(\overline{x}) = g(\overline{x}) \text{ pour tout } \overline{x} \in \operatorname{dom} g^{**}.$$

Si à présent $\overline{x} \notin \operatorname{dom} g^{**}$, $g^{**}(\overline{x}) = +\infty$, et $g(\overline{x})$ aussi (toujours en raison de l'inégalité $g^{**} \leq g$).

En bref, $g^{**} = g$. $\square$

**4.4. Synthèse : retour sur la conjecture des points les plus éloignés.** Appliquons le théorème 4.7 à la fonction $\theta_S$ ou $g_S$ au choix. Grâce au théorème 4.3 et à la proposition 4.2, nous avons l'implication suivante :

$$(4.15)\qquad \begin{cases} & (\tfrac{1}{2}\Delta_S^2 \text{ Fréchet-différentiable sur } H) \\ \Longrightarrow & (S \text{ est un singleton}). \end{cases}$$

Par ailleurs, nous avons conclu la section 4.1 par l'implication «pratiquement toujours vraie» :

$$(4.16)\qquad \begin{cases} & (Q_S(x) \text{ est un singleton pour tout } x \in H) \\ \Longrightarrow & (\tfrac{1}{2}\Delta_S^2 \text{ est Gâteaux / Hadamard-différentiable sur } H). \end{cases}$$

La réponse à la conjecture de V. Klee se trouve donc dans la possibilité ou non de combler le «trou de différentiabilité» concernant cette fonction convexe continue $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.

Voyons pour terminer comment dans des classes de situations (déjà explorées) l'approche plus variationnelle par analyse convexe permet de conclure.

- Lorsque $H$ est de dimension finie, la relation
$$p - co\big(Q_S(p)\big) \;=\; \partial\left(\frac{1}{2}\Delta_S^2\right)(p) \text{ pour tout } p \in H$$
montre comme le fait d'avoir «$Q_S(p)$ singleton pour tout $p \in H$» équivaut à la Gâteaux - (ou Hadamard -, ou Fréchet-différentiabilité) de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.
- Lorsque $S$ est compact, $Q_S(p) = \{q_S(p)\}$ pour tout $p \in H$ fait que l'application $q_S \;:\; H \longrightarrow H$ est continue de $H$ fort dans $H$ fort (cf. §2.4), assurant ainsi la Fréchet-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ (voir (4.2)).
- L'existence de sélections de la multiapplication $Q_S(\cdot)$ ayant des propriétés de continuité implique comme au-dessus la Fréchet-différentiabilité de $\frac{1}{2}\Delta_S^2$.

En règle générale, la conjecture (1.3) peut être reformulée en une question de calcul différentiel sur les fonctions convexes :

$$(4.17)\qquad \begin{pmatrix} Q_S(x) \text{ est un singleton} \\ \text{pour tout } x \in H \end{pmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \Delta_S^2 \;:\; H \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{Fréchet - différentiable sur } H \end{pmatrix}$$

**Annexe.** Résolution du problème (1.3) par V. Klee (1961) dans le cas où $S$ est un compact d'un espace de Banach.

**Théorème.** *Soit $S$ une partie compacte non vide d'un espace de Banach $X$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\forall\, x \in X$, $Q_S(x)$ *est un singleton.*
ii) $\forall\, x \in \overline{co}(S)$, $Q_S(x)$ *est un singleton.*
iii) $S$ *est un singleton.*

*Démonstration.* Seule ii) $\Rightarrow$ iii) demande une démonstration.

Soit $K = \overline{co}(S)$. Alors $K$ est compact car $S$ est compact et nous sommes dans un Banach $X$. L'application $q_S$ (de $Q_S(x) = \{q_S(x)\}$ pour tout $x \in X$) est continue de

$K$ dans $K$ (voir §2.4 pour s'assurer de la continuité de $q_S$). Par le théorème de point fixe de Schauder–Tikhonov, il existe $\overline{x} \in K$ tel que $q_S(\overline{x}) = \overline{x}$. Or ceci n'est possible que si $S$ est un singleton (si $S$ contient plus d'un élément, $q_S(x) \neq x$ forcément). $\square$

Ceci est une belle application du théorème de point fixe de Schauder–Tikhonov, qui montre ici toute sa puissance, mais aussi ses limites (on ne peut «raboter» aucune des hypothèses, comme le montrent les exemples du début du §2).

**English extended abstract.** Let $H$ be a Hilbert space and $S$ a nonempty bounded closed subset of $H$; for all $x \in H$ we define $Q_S(x)$ as the set of points in $S$ farthest to $x$, as also $\Delta_S(x) := \sup\{\|x - y\| : y \in S\}$.

In this paper, we provide a variational characterization of $Q_S(x)$ (Proposition 3.1) and prove the strong convexity of the function $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ (Proposition 3.4).

The functions $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ and $\frac{1}{2}(\Delta_S^2 - \|\cdot\|^2)$ are actually the Legendre-Fenchel transforms of two specific functions associated with $S$. In particular, let

$$x \in H \mapsto \theta_S(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2 - \ \sigma_{-S}(x),$$

where $\sigma_{-S}$ denotes the support function of $-S$. This function $\theta_S$ is finite and continuous everywhere on $H$; it is convex if and only if $S$ is a singleton (Proposition 4.2); its Legendre-Fenchel transform is $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ precisely (Theorem 4.3).

The Fréchet-differentiability of the Legendre-Fenchel transform of a function ensures its convexity (Soloviev's Theorem 4.7). In our case, the Fréchet differentiability of $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ implies that $S$ is a singleton.

In sum, the assumption "$Q_S(x)$ is a singleton for all $x \in H$" ensures, under weak conditions, that $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ is Gâteaux / Hadamard-differentiable. On the other hand, the Fréchet-differentiability of $\frac{1}{2}\Delta_S^2$ implies that $S$ is a singleton. So, the farthest point conjecture can be reduced to a differentiability question concerning the everywhere finite and continuous convex function $\frac{1}{2}\Delta_S^2$: Gâteaux / Hadamard *vs* Fréchet-differentiability.

## Bibliographie

1. E. Asplund, *Sets with unique farthest points*, Israel J. Math. **5** (1967), 201–209.
2. H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática, vol. 50, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.
3. F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 178, Springer-Verlag, New York, 1998.
4. F. Deutsch, *Best approximation in inner product spaces*, CMS Books in Mathematics / Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
5. I. Ekeland and R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
6. S. Fitzpatrick, *Metric projections and the differentiability of distance functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980), 291–312.
7. J.-B. Hiriart-Urruty, *Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes: l'état de la situation vu via l'analyse convexe non lisse*, Ann. Sci. Math. Québec **22** (1998), 47–62.

8. J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 305, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
9. J.-B. Hiriart-Urruty and Ph. Plazanet, *Moreau's decomposition theorem revisited*, analyse non linéaire (Perpignan, 1987), Univ. Montréal, Montreal, QC, 1989, pp. 325–338.
10. V. Klee, *Convexity of Chevyshev sets*, Math. Ann. **142** (1960/1961), 292–304.
11. P.-J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Collection Enseignement des Sciences, No. 13, Hermann, Paris, 1972.
12. T. S. Motzkin, E. G. Straus and F. A. Valentine, *The number of farthest points*, Pacific J. Math. **3** (1953), 221–232.
13. T. D. Narang, *Uniquely remotal sets are singletons*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **9** (1991); no. 1, 1–12.
14. B. B. Panda, *Uniquely remotal sets in some classical Banach spaces*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **49** (1985); no. 3-4, 167–173.
15. B. B. Panda and O. P. Kapoor, *On farthest points of sets*, J. Math. Anal. Appl. **62** (1978); no. 2, 345–353.
16. R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
17. T. Schwartz, *Farthest points and monotonicity methods in Hilbert spaces*, Approximation and optimization, vol. I, Transilvania, Cluj-Napoca, 1996, pp. 351–356.
18. V. Soloviov, *Duality for nonconvex optimization and its applications*, Anal. Math. **19** (1993); no. 4, 297–315.
19. V. Soloviov, *Characterizations of convexity in terms of smoothness*, Moscow Aviation Institut; Preprint of the Department of Probability theory (1995).
20. V. Soloviov, *Dual extremal problems and their applications to problems of minimax estimation*, Russian Math. Surveys **52** (1997); no. 4, 685–720.
21. V. Soloviov, *On the subdifferential and the directional derivatives of the maximum of a family of convex functions*, Izv. Math. **62** (1998), 807–832.
22. V. Soloviov, *On the subdifferential and the directional derivatives of the maximum of a family of convex functions. II*, Izv. Math. **65** (2001), 99–121.
23. M. Valadier, *Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **268** (1969), A39–A42.
24. M. Valadier, *Communication personelle* (Avril 2004).
25. M. Volle, *Sous-différentiel d'une enveloppe supérieure de fonctions convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993); no. 9, 845–849.
26. U. Westphal and T. Schwartz, *Farthest points and monotone operators*, Bull. Austral. Math. Soc. **58** (1998), 75–92.

J.-B. Hiriart-Urruty
Laboratoire MIP, UMR CNRS 5640
UFR Mathématiques, Informatique, Gestion
Université Paul Sabatier (Toulouse III)
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4
France
Courriel : jbhu@cict.fr