Une curieuse mais épatante matrice nilpotente

par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1] et Patrice Lassère [2]

Résumé. Nous *caractérisons* les n racines $z_1, z_2, ..., z_n$ du polynôme $E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ (celui qui apparaît dans le développement de l'exponentielle) par la nilpotence d'une matrice symétrique $n \times n$ construite *ad hoc.*

Introduction

L'objet de la présente note est la caractérisation des racines d'un polynôme particulier, mais important, celui qui apparaît dans le développement à l'ordre n de la fonction exponentielle en 0, c'est-à-dire

$$E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

où n est un entier supérieur ou égal à 1.

Ce polynôme (ou fonction polynomiale) à coefficients réels n'est pas aussi célèbre que $1-x^n$ qui donne naissance aux racines n-èmes de l'unité, mais il possède un certain nombre de propriétés mathématiques d'intérêt et, de plus, agréables à raconter. Dans un premier paragraphe, nous explorerons certaines d'entre elles, étudiées depuis longtemps comme on l'imagine. Puis, dans un deuxième temps, nous donnerons une *caractérisation* des racines de E_n par la nilpotence d'une matrice construite *ad hoc.* C'est l'illustration, une fois de plus, de l'interconnexion qui peut y avoir entre deux domaines bien distincts des mathématiques.

1. Les polynômes E_n : *a digest*

Nous énonçons ici les propriétés essentielles de E_n et de ses racines, certaines faciles à démontrer (les premières par exemple), d'autres de plus en plus difficiles au fur et à mesure qu'on avance dans les détails et qui ont nécessité des travaux de mathématiciens célèbres comme Gábor Szegő (1895 − 1980) par exemple. Les articles référencés en [2] et [5] ont été nos sources principales.

Propriété 1. *Pour tout $n \geqslant 2$, $E_n' = E_{n-1}$.*

Cette propriété, bien qu'anodine, ne sera pas sans conséquence lorsqu'il s'agira, plus loin, de comparer les localisations des racines de E_n et de E_{n-1}.

Propriété 2. *E_n est la seule solution polynomiale de l'équation différentielle*

$$y(x) - y'(x) = \frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

1. Département de mathématiques, université Paul Sabatier de Toulouse.
http ://www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/
2. Département de mathématiques, université Paul Sabatier de Toulouse.
https ://perso.math.univ-toulouse.fr/lassere/

En conséquence, en raison de la linéarité de cette équation différentielle, $(-1)^n n! E_n$ est la seule solution polynomiale de

$$y(x) - y'(x) = (-1)^n x^n. \qquad (2bis)$$

Nous désignons par $z_1, z_2, ..., z_n$ les n racines, a priori complexes, de E_n. Lorsqu'il y aura plusieurs E_n en jeu, il nous arrivera de préciser en utilisant la notation $z_{n,1}, z_{n,2,}, ..., z_{n,n}$, de manière à éviter de penser que les racines $z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ de E_{n-1} sont les $n-1$ racines de E_n.

Propriété 3. *Toutes les racines de E_n sont simples.*

Par exemple : -1 est la racine de E_1, $-1+i$ et $-1-i$ sont les racines de E_2. Les choses deviennent plus intéressantes et difficiles à partir de $n = 3$.

Propriété 4. *- Si n est impair, E_n possède une unique racine réelle, notée r_n, et localisée de la manière suivante :*

$$r_n \in]-n, -1]\,. \qquad (3)$$

- Si n est pair, E_n n'a pas de racines réelles ; de ce fait, toutes les racines de E_n sont complexes conjuguées deux à deux.

Propriété 5. *Si n est impair, $n = 2p+1$, soit r_{2p+1} la seule racine réelle de E_{2p+1}. Alors la suite $(r_{2p+1})_p$ est strictement décroissante :*

$$-1 = r_1 > r_3 > ... > r_{2p+1} > r_{2p+3} > ...$$

Propriété 6. Deux zones d'exclusion-localisation pour les racines de E_n.

- Pour $n \geqslant 2$, il n'y a pas de racines de E_n dans la région parabolique "horizontale" (une partie convexe fermée) définie, en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant \frac{y^2}{4} - 1\right\}. \qquad (4)$$

- Toutes les racines z_k de E_n sont dans la couronne de rayons 1 et n, c'est-à-dire :

$$1 \leqslant |z_k| \leqslant n \text{ pour tout } k = 1, 2, ..., n. \qquad (5)$$

Après les propriétés énoncées jusqu'ici, il est temps de présenter des illustrations numériques. Les logiciels de calcul à disposition, parfois en ligne, le permettent. L'illustration graphique ci-dessous (Figure 1) est due à notre collègue Jean-Paul Calvi de l'université de Toulouse.

De manière générale, les n points correspondant aux n racines z_k de E_n sont disposés, de manière symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels, selon une courbe qui ressemble à un fer à cheval. L'emboîtement entre les courbes des racines de E_n quand n croît s'expliquera par la Propriété 7 plus bas.

Y a-t-il, proportionnellement, davantage de racines situées dans le demi-plan gauche (du plan complexe) que dans le demi-plan droit ? La réponse est fournie, du moins asymptotiquement, dans l'énoncé qui suit.

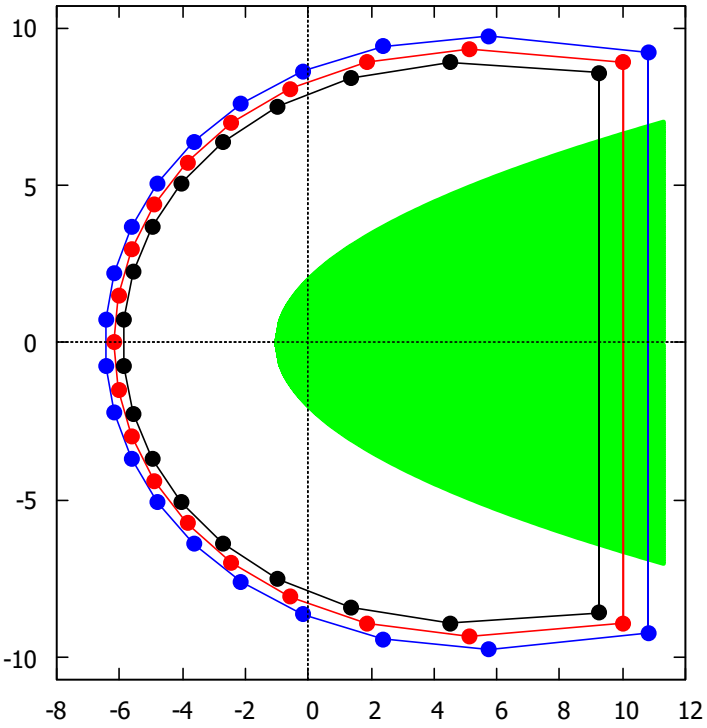


FIGURE 1 – En noir $n = 18$, en rouge $n = 19$, en bleu $n = 20$. En vert, la zone parabolique d'exclusion.

Désignons par $R_g(n)$ (resp. $R_d(n)$) le nombre de racines z_k de E_n situées dans le demi-plan gauche $\{z : \mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$ (resp. dans le demi-plan droit $\{z : \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$).

Propriété 7. *On a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_g(n)}{n} = \alpha \backsimeq 61,7\% \,;\; \lim_{n\to\infty} \frac{R_d(n)}{n} = \beta \backsimeq 38,3\%. \tag{6}$$

Voici maintenant, à propos des racines des E_n successifs, une jolie illustration du théorème de GAUSS & LUCAS. Rappelons que ce théorème nous dit que les racines du polynôme dérivé P' d'un polynôme P se trouvent dans le polytope convexe formé avec les racines de P (c'est-à-dire l'enveloppe convexe, ou encore l'ensemble des combinaisons barycentriques des racines de P). Ici, nous avons une situation bien particulière puisque le polynôme dérivé E_n' de E_n n'est autre que E_{n-1} (*cf.* Propriété 1).

Soit donc Π_n le polygone convexe formé avec les racines de E_n. On peut être plus précis sur les sommets de Π_n et sur l'emboîtement des Π_n quand n croît.

Propriété 8. *- Toutes les racines z_n de E_n sont exactement les sommets du polygone Π_n.*
- Pour $n \geqslant 3$, Π_{n-1} est contenu dans l'intérieur de Π_n.

On comprend que $n = 2$ ait été exclu de la deuxième partie du résultat car : Π_1 est le singleton $\{-1\}$, et Π_2 le segment joignant $-1 + i$ à $-1 - i$. De fait, Π_1 est contenu dans l'intérieur "relatif" de Π_2 (*i.e.*, intérieur de Π_2 dans la droite affine engendrée par Π_2).

L'inégalité (5) sur les modules $|z_{n,k}|$ des n racines de E_n, certes un peu grossière (mais on ne peut faire mieux en général), a conduit G. Szegő à considérer plutôt les $\zeta_{n,k} = \frac{z_{n,k}}{n}$, c'est-à-dire à réduire d'échelle de manière à tout ramener dans le disque unité. Un résultat fondamental de G. Szegő, publié en 1922 ([6]), concerne le comportement limite des n racines réduites $\zeta_{n,k}$ de E_n;

Propriété 9. *Quand $n \to \infty$, les $\zeta_{n,k}$ s'accumulent par l'extérieur sur la courbe fermée Γ d'équation*

$$\Gamma = \left\{\zeta : |\zeta| \leqslant 1 \text{ et } |\zeta| \,.\, \left|e^{1-\zeta}\right| = 1\right\}. \tag{7}$$

Réciproquement, tout point de Γ est un point d'accumulation de l'ensemble des $\zeta_{n,k}$.

En raison de sa forme (voir Figure 2), on appellera Γ "l'oeil de Szegő". La pointe de Γ touchant le cercle-unité par l'intérieur est le point $(1, 0)$, les deux points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées sont $(0, 1/e \backsimeq 0,37)$ et $(0, -1/e)$; l'oeil de Szegő contient en son intérieur un petit cercle de rayon $r \backsimeq 0,29$.

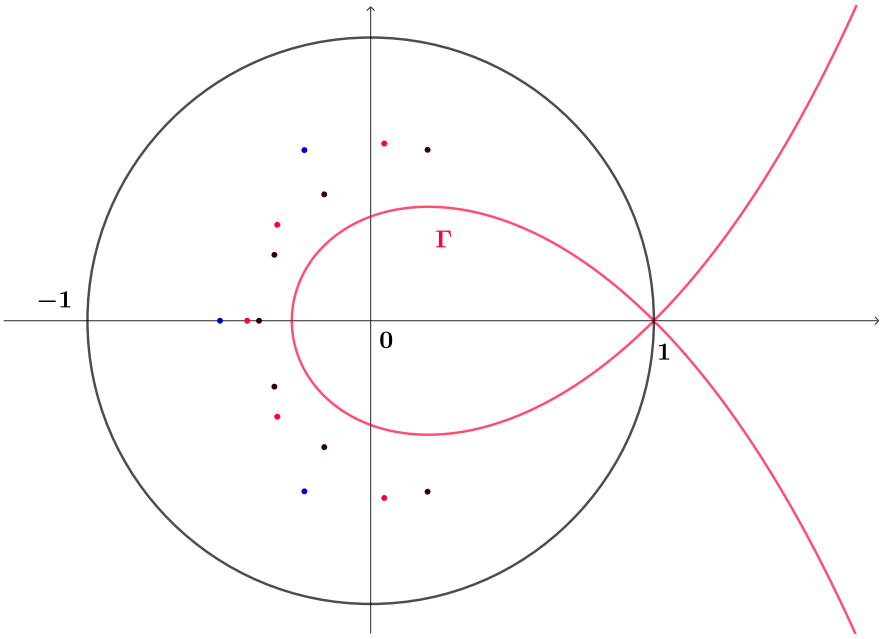


Figure 2 – La courbe Γ, les $\zeta_{n,k}$ pour $n = 3, 5, 7$.

Une autre manière d'exprimer ce comportement-limite est de considérer $\xi_{n,k} = \zeta_{n,k}.e^{-\zeta_{n,k}}$. Lorsque $n \to \infty$, les nombres complexes $\xi_{n,k}$ tendent "à s'accumuler" sur le cercle de centre 0 et de rayon $1/e$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| |\xi_{n,k}| - \frac{1}{e} \right| = 0 \ ; \tag{8}$$

de plus, ils tendent même à se "répartir régulièrement" sur le ce cercle.

La démonstration de la Propriété 9, ou plutôt de sa variante décrite au-dessus, a fait l'objet de sujets d'examen ou de concours, par exemple celui de Centrale-Supélec 2001 (MP, Sujet 1) [1].

On peut se poser la question de l'écartement entre les différentes racines $z_{n,k}$ de E_n ; voici un résultat quantitatif à ce sujet. On pose

$$d_n = \min_{k \neq l} |z_{n,k} - z_{n,l}| .$$

Propriété 10. *Pour tout $n \geqslant 2$, on a*

$$d_n \geqslant 0,29. \tag{8}$$

2. Et voila qu'apparaît une matrice épatante...

Alors qu'on ne s'y attend pas, va intervenir une matrice $n \times n$, assez simple, avec $z_1, z_2, ..., z_n$ dans sa définition, et dont une des propriétés, sa nilpotence, va caractériser les racines $z_1, z_2, ..., z_n$ du polynôme E_n. Cette matrice, la voici : pour $z_1, z_2, ..., z_n$ dans $\mathbb{C}$, soit

$$S_{z_1,z_2,...,z_n} = \begin{bmatrix} 1+z_1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+z_2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1+z_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1+z_n \end{bmatrix} ; \tag{9}$$

en bref, il y a $1+z_1, 1+z_2, ..., 1+z_n$ sur la diagonale, des 1 partout ailleurs. Cette matrice est symétrique, mais comme les z_i peuvent être complexes, cette propriété ne nous apporte pas grand chose. En revanche, il est bon d'observer que $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ est la somme d'une matrice diagonale $\mathrm{diag}(z_1, z_2, ..., z_n)$ et d'une matrice U de rang 1, celle qui a des 1 partout [3],

$$S_{z_1,z_2,...,z_n} = \mathrm{diag}(z_1, z_2, ..., z_n) + U. \tag{10}$$

Le résultat, un peu surprenant, que nous allons démontrer est le suivant :

Théorème. *La matrice $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ est nilpotente si, et seulement si, les $z_1, z_2, ..., z_n$ sont* exactement *les n racines du polynôme E_n .*

Rappelons qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente si une de ses puissances S^p est la matrice nulle. Il y a plusieurs façons de caractériser une matrice nilpotente, donnons les deux plus célèbres et utiles :

- La matrice S est nilpotente si, et seulement si, $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de S. Traduit avec le polynôme caractéristique P_S de S, cela donne

$$P_S(\lambda) = (-1)^n \lambda^n. \tag{11}$$

3. Les humoristes des mathématiques (il y en a !) appellent U "la matrice Attila"... Pourquoi ? Réponse : *"parce qu'il y a des (h)uns partout"*.

- La matrice S est nilpotente si, et seulement si,

$$\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^2) = \ ... \ = \mathrm{tr}(S^n) = 0. \tag{12}$$

Démonstrations du Théorème. Il y en a plusieurs de possibles, nous en donnons deux, toutes les deux basées sur la caractérisation (11), et donc sur la capacité à calculer facilement et économiquement $P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda) = \det(S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n)$. Une troisième possibilité de calcul de ce déterminant particulier est proposée en exercice.

Dit de manière plus détaillée : L'objectif est de démontrer que $P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}} = P_{z_1,z_2,...,z_n} - P'_{z_1,z_2,...,z_n}$, puis d'utiliser la caractérisation de la nilpotence de $S_{z_1,z_2,...,z_n}$, qui est que $P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$ (*cf.* (11)), enfin de conclure avec la Propriété 2 énoncée au §1.

Première démonstration. On commence par observer que

$$S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n = \mathrm{diag}(z_1 - \lambda, z_2 - \lambda, ..., z_n - \lambda) + U, \tag{13}$$

c'est donc la "perturbation" d'une matrice diagonale, $\mathrm{diag}(z_1 - \lambda, z_2 - \lambda, ..., z_n - \lambda)$, par une matrice de rang 1, $U = u.u^T$ où u est la matrice unicolonne $n \times 1$ (ou vecteur de $\mathbb{R}^n$) où il n'y a que des 1 partout. Perturber une matrice par une matrice de rang 1 est une situation que l'on retrouve fréquemment en Analyse matricielle (et ses applications en Analyse numérique et en Optimisation). Le résultat technique d'intérêt est comme suit : si A est une matrice inversible,

$$\det(A + uu^T) = \det A \times (1 + \left\langle A^{-1}u, u \right\rangle). \tag{14}$$

Habituellement, on présente cela sous une forme différente, $\langle A^{-1}u, u\rangle = \frac{\det(A+uu^T)}{\det A} - 1$, une façon d'exprimer la forme quadratique associée à A^{-1} à l'aide d'éléments liés à A. Pour une des démonstrations possibles de (14), voir [3, Tapa 190, partie *Hints*]. Néanmoins, pour le confort du lecteur, nous présentons en Annexe une preuve englobée dans un contexte plus général de calculs de déterminants.

Dans notre exemple, les choses sont simples puisqu'on va prendre $A = \mathrm{diag}(z_1 - \lambda, z_2 - \lambda, ..., z_n - \lambda)$ et $U = u.u^T$.

Supposons pour le moment que λ soit différent des z_i, de manière à assurer l'inversibilité de A. Alors, observant que $\det A = \prod_{i=1}^n (z_i - \lambda)$, que $A^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{z_1-\lambda}, \frac{1}{z_2-\lambda}, ..., \frac{1}{z_n-\lambda})$ et que $\langle A^{-1}u, u\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i-\lambda}$, il vient immédiatement de (14) :

$$\det(A + uu^T) = \prod_{i=1}^n (z_i - \lambda) \times \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i - \lambda}\right],$$

c'est-à-dire

$$\det(A + uu^T) = \prod_{i=1}^n (z_i - \lambda) + \sum_{i=1}^n \prod\nolimits_{j\neq i} (z_i - \lambda). \tag{15}$$

Cette expression (15) de $\det(S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n) = P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda)$, démontrée pour λ différent des z_i, s'étend par continuité à tout λ puisque $P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda)$ est un polynôme en λ.

On reconnaît dans l'expression de droite de (15) un format un peu particulier. En effet, si on note

$$P_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(z_i - \lambda) \tag{16}$$

le polynôme de degré n (le terme de plus haut degré en est $(-1)^n \lambda^n$) dont les racines sont $z_1, z_2, ..., z_n$, on constate que

$$\det(S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n) = P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda) = P_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda) - P'_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda). \tag{17}$$

Il n'y plus qu'à conclure avec la Propriété 2 énoncée au §1 et la première caractérisation de nilpotence plus haut :

$$\begin{aligned} S_{z_1,z_2,...,z_n} \text{ est nilpotente} &\Leftrightarrow P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n \\ &\Leftrightarrow P_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda) - P'_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n ; \end{aligned}$$

$$S_{z_1,z_2,...,z_n} \text{ est nilpotente } \Leftrightarrow P_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda) = (-1)^n n! E_n(\lambda). \tag{18}$$

La partie droite de (18) exprime bien que E_n a pour racines $z_1, z_2, ..., z_n$, les mêmes que pour $P_{z_1,z_2,...,z_n}$.

Exercice. Si on ne veut pas utiliser la formule (14), une autre manière d'opérer est de démontrer directement que, si

$$M_{a_1,a_2,...,a_n} = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1+a_n \end{bmatrix},$$

et si aucun des $a_i \in \mathbb{C}$ n'est nul, alors

$$\det M_{a_1,a_2,...,a_n} = a_1 a_2 ... a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}\right). \tag{19}$$

Cela se fait en jouant sur les colonnes C_i de la matrice : on remplace C_i par $C_i - C_n$, puis C_n par $C_n - \frac{C_1}{a_1} - \frac{C_2}{a_2} - ... - \frac{C_n}{a_n}$.

Ensuite, par un argument de continuité du déterminant, on démontre que, quels que soient les $a_i \in \mathbb{C}$,

$$\det M_{a_1,a_2,...,a_n} = a_1 a_2 ... a_n + \sum_{i=1}^{n} a_1 ... a_{i-1} a_{i+1} ... a_n.$$

Deuxième démonstration. La clé de la démonstration est le lemme suivant, dont l'approche est intéressante en soi.

Lemme. ([4, Exercice VII−7]). *Soit $v_1, v_2, ..., v_n$ des nombres complexes, et*

$$f(x) = (v_1 - x)(v_2 - x)...(v_n - x).$$

Alors, pour $a \neq b$ dans $\mathbb{C}$:

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & a & a & ... & a \\ b & v_2 & a & ... & a \\ b & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} & a \\ b & b & ... & b & v_n \end{bmatrix} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{a - b}. \tag{20}$$

Ensuite, pour $a = b$ dans $\mathbb{C}$:

$$\det \begin{bmatrix} v_1 & a & a & ... & a \\ a & v_2 & a & ... & a \\ a & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} & a \\ a & a & ... & a & v_n \end{bmatrix} = f(a) - a \times f'(a). \tag{21}$$

Démonstration du Lemme.

- L'astuce (redoutable et due à Adolf Hurwitz (1859 − 1919)) est la suivante : ajouter x aux n^2 coefficients de la matrice dans (20) dont on veut calculer le déterminant, de manière à en faire une matrice M_x paramétrée par x ; le résultat visé est le déterminant de M_0. Alors, dans M_x, retrancher la première colonne à toutes les autres (ainsi il ne reste de x que dans la première colonne), développer par rapport à la première colonne ; le déterminant de M_x est alors linéaire (ou plutôt affine) en x. Il existe donc α et β dans $\mathbb{C}$ tels que

$$\det M_x = \det \begin{bmatrix} v_1 + x & a + x & a + x & ... & a + x \\ b + x & v_2 + x & a + x & ... & a + x \\ b + x & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} + x & a + x \\ b + x & b + x & ... & b + x & v_n + x \end{bmatrix} = \alpha x + \beta. \tag{22}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients α et β, et cela est immédiat en choisissant successivement $x = -a$ puis $x = -b$:

$$\begin{aligned} -\alpha a + \beta &= \det \begin{bmatrix} v_1 - a & 0 & 0 & ... & 0 \\ b - a & v_2 - a & 0 & ... & 0 \\ b - a & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} - a & 0 \\ b - a & b - a & ... & b - a & v_n - a \end{bmatrix} = f(a) \\ &= (v_1 - a)(v_2 - a)...(v_n - a) = f(a) \,; \end{aligned}$$

$$-\alpha b + \beta = \det \begin{bmatrix} v_1 - b & a - b & a - b & ... & a - b \\ 0 & v_2 - b & a - b & ... & a - b \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} - b & a - b \\ 0 & 0 & ... & 0 & v_n - b \end{bmatrix} = f(b).$$

On en tire aussitôt

$$\beta = \frac{f(a) \times b - f(b) \times a}{b - a}$$

qui, d'après (22) écrit pour $x = 0$, n'est autre que le déterminant $\det M_0$ que nous cherchons à évaluer.

- Pour avoir la formule lorsqu $a = b$, on utilise la continuité du déterminant et la définition de la dérivée de f en a :

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} v_1 & a & a & ... & a \\ a & v_2 & a & ... & a \\ a & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} & a \\ a & a & ... & a & v_n \end{bmatrix} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \det \begin{bmatrix} v_1 & a & a & ... & a \\ a+\varepsilon & v_2 & a & ... & a \\ a+\varepsilon & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & v_{n-1} & a \\ a+\varepsilon & a+\varepsilon & ... & a+\varepsilon & v_n \end{bmatrix} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a) \times (a+\varepsilon) - f(a+\varepsilon) \times a}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(f(a) - a \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right) = f(a) - a \times f'(a).
\end{aligned}$$

Passons à présent à la démonstration du théorème annoncé.

Par la formule (21) du lemme précédent, le polynôme caractéristique $P_{S_{z_1,z_2,...,z_n}}(\lambda)$ de $S_{z_1,z_2,...,z_n}$, de définition $\det(S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n)$, devient

$$\begin{aligned}
\det(S_{z_1,z_2,...,z_n} - \lambda I_n) &= \det \begin{bmatrix} 1+z_1-\lambda & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+z_2-\lambda & 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1+z_{n-1}-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1+z_n-\lambda \end{bmatrix} \\
&= f(1) - f'(1),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
f(t) &= ((1+z_1-\lambda)-t)((1+z_2-\lambda)-t)...((1+z_n-\lambda)-t), \\
f'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} ((1+z_i-\lambda)-t).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(1) &= (z_1-\lambda)(z_2-\lambda)...(z_n-\lambda) = P_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda), \\
f'(1) &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (z_i-\lambda) = P'_{z_1,z_2,...,z_n}(\lambda).
\end{aligned}$$

On conclut ensuite comme dans la première démonstration.

Remarque. On peut être tenté - et nous l'avons été - de calculer les racines $z_1, z_2, ..., z_n$ de E_n en utilisant le caractère nilpotent de $S = S_{z_1,z_2,...,z_n}$ et la caratérisation (12) de la nilpotence qui va avec : $z_1, z_2, ..., z_n$ sont racines de E_n si, et seulement si, $\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(S^2) = ... = \mathrm{tr}(S^n) = 0$. Cela donne un système de n équations non linéaires, certes polynomiales, mais difficilement exploitables au-delà de $n = 3$. Cette approche, même par voie numérique, semble à écarter ; les méthodes traditionnelles de calcul direct des racines $z_1, z_2, ..., z_n$ de E_n (méthodes de Newton, d'homotopie) sont plus appropriées, d'autant que ces racines sont toutes simples et restent écartées (*cf.* Propriété (10)).

Nous terminons par un exercice, dû à Philippe Caldero (université de Lyon) qui, dans une de ses vidéos diffusées sur Youtube, montre que $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ est nilpotente dès que $z_1, z_2, ..., z_n$ sont les racines de E_n ; cela nous a motivés pour démontrer la réciproque. L'objectif de Caldero était de démontrer que *"Toute matrice (complexe) est semblable à une matrice symétrique"*.

Exercice. *Soit $z_1, z_2, ..., z_n$ les racines de E_n et considérons la matrice $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ définie en (9).*

- Vérifier que $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ est de rang $n-1$.

- Montrer que $S_{z_1,z_2,...,z_n}$ est semblable à

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Se rappelant que, par réduction de Jordan, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs du type $J(\lambda) = \lambda I_r + J_r$, montrer que A est semblable à une matrice symétrique.

Attention à bien lire et à ne pas comprendre "Toute matrice est semblable à une matrice symétrique réelle" !

Le résultat au-dessus est plus anecdotique que la condition nécessaire et suffisante de nilpotence car les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ jouent un rôle mineur ; dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ce sont les matrices hermitiennes (ou auto-adjointes) qui sont importantes et incontournables.

Annexe. *Un bien joli résultat sur les déterminants*

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (matrices à m lignes et n colonnes), $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. On peut donc faire le produit AB (qui est une matrice carrée (m,m)) ainsi que le produit BA (qui est une matrice carrée (n,n)). Alors :

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA). \qquad (a1)$$

Formule amusante, intéressante, utile, ou encore esthétique (comme on voudra) : dans $(a1)$, deux matrices carrées qui se ressemblent mais de taille différente donnent un même déterminant !

Cas particulier avec $m = 1$: Soit u et v deux vecteurs(-colonnes) de $\mathbb{R}^n$ ($\langle ., . \rangle$ y désignant le produit scalaire usuel) ; alors, en considérant que v est la matrice unicolonne A, et u^T la matrice uniligne B, il vient de $(a1)$:

$$\det(I_n + vu^T) = \det(I_1 + u^T v) = 1 + \langle u, v \rangle . \qquad (a2)$$

Avec une matrice inversible A, choisissons $v = A^{-1}u$; la formule $(a2)$ donne alors :

$$\begin{aligned} 1 + \left\langle u, A^{-1}u \right\rangle &= \det(I_n + A^{-1}uu^T) \\ &= \det(A^{-1} \times (A + uu^T)) = \frac{1}{\det A} \det(A + uu^T), \end{aligned}$$

ce qui est exactement (14).

Démonstration de (a1). Il suffit de gérer les multiplications de matrices par blocs et de connaître le déterminant d'une matrices diagonale par blocs.

Soit $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$, toutes les deux matrices carrées de taille $(m+n, m+n)$. Alors

$$\mathcal{AB} = \begin{bmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \mathcal{BA} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{bmatrix}.$$

Ces deux matrices diagonales par blocs (il y a deux blocs) ont même déterminant, le tour est joué.

Remerciements

Nos remerciements vont à J.-P. Calvi (Toulouse) pour la confection de la Figure 1 et à P. Caldero (Lyon) pour ses vidéos dont une a inspiré l'utilisation de la matrice nilpotente $S_{z_1,z_2,\ldots,z_n}$ dans le §2.

Références

1. F. Bayart, *Corrigé du sujet du concours Centrale-Supélec* 2001 *(filière MP, Sujet 1)*, www.biblimath.net>cen>2001.

2. B. Conrey and A. Ghosh, *On the zeros of the Taylor polynomials associated with the exponential function.* The American Mathematical Monthly, Vol. 95, n°6 (1988), 528 – 533.

3. J.-B. Hiriart-Urruty, *Mathematical tapas, Vol.* 1 *(for undergraduates).* Springer Undergraduate Mathematics Series (2016).

4. G. Polya and G. Szegö, *Problems and theorems in Analysis II*, Springer-Verlag (1976).

5. S. M. Zemyan, *On the zeroes of the Nth partial sum of the exponential series.* The American Mathematical Monthly, Vol. 112, n°10 (2005), 891 – 909.

6. G. Szegö, *Uber eine Eigenschaft der Exponentialreihe.* Sitzungber. Berl. Math. Ges. 21 (1922), 59 – 64.