L'inégalité de Grothendieck en bref...

2ème partie. De son utilisation en Optimisation combinatoire moderne

par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1] et Patrice Lassère [2]

Résumé. Après avoir montré d'une manière accessible, graduée et commentée ce que sont l'inégalité et la constante de Grothendieck (1953), le tout dans une première partie de même titre, nous indiquons ici, dans une deuxième partie, comment ces résultats mathématiques anciens peuvent être utilisés en Optimisation combinatoire moderne.

Introduction

L'inégalité de Grothendieck s'est invitée en Optimisation combinatoire moderne, c'est d'ailleurs ce qui nous avait motivés à la regarder d'un peu plus près ; cela a été fait dans une première partie avec le même titre-bandeau que la présente note (voir [4]). Cette inégalité est apparue en Optimisation combinatoire comme un *concept unifiant* ; cela est montré dans l'important article de survol de S. Khot et A. Naor ([5]), dont les considérations vont au-delà de notre modeste introduction, mais qu'un lecteur intéressé pourrait être désireux de consulter pour approfondissements.

Analyse matricielle et *Optimisation* sont les deux mots-clés de notre présentation ici, *Analyse matricielle* l'était déjà pour la première partie. Nous allons donc commencer par parcourir ce qui, dans ces deux domaines importants des mathématiques, nous est strictement nécessaire.

1. Optimisation linéaire *versus* Optimisation SDP [3] : une présentation synthétique

Pour une initiation à l'Optimisation en général, on pourra se référer à l'opuscule [2] ; ce qui suit en est en grande partie tiré.

1.1 Optimisation linéaire

Dit de manière succincte, l'Optimisation linéaire concerne les problèmes d'optimisation où *toutes les données sont linéaires (ou affines)* comme fonctions des variables : la fonction-objectif f à maximiser (ou minimiser) est linéaire, $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, l'ensemble-contrainte S est un polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ (représenté sous forme condensée en, par exemple, $Ax = b$ et $x \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$) [4]. En notations plus détaillées,

1. Département de mathématiques, université Paul Sabatier de Toulouse.
http ://www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/

2. Département de mathématiques, université Paul Sabatier de Toulouse.
https ://perso.math.univ-toulouse.fr/lassere/

3. Nous récusons le vocable de *Programmation* souvent utilisé à la place d'*Optimisation* dans un tel contexte ; c'est une appellation malheureuse, un anglicisme, une traduction littérale de *Programming*. Rien à voir avec le codage informatique. *Optimisation* (à données) *linéaire(s)* est par exemple plus approprié que *Programmation linéaire.*

4. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ici, la notation condensée $u \geq v$ dans $\mathbb{R}^d$ signifie $u_i \geq v_i$ pour tout $i = 1, ..., d$.

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{L}}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } f(x) = \langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes } \langle a_j, x\rangle = b_j \text{ pour tout } j = 1, ..., m, \\ \text{(résumées en } Ax = b) \\ \text{et } x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \\ \text{(résumées en } x \geq 0). \end{array} \right.$$

C'est un domaine des Mathématiques appliquées qui a connu un développement extraordinaire au sortir de la Seconde Guerre mondiale, et qui reste en haut de l'affiche en Optimisation depuis plus de soixante ans. Il y a de nombreux résultats mathématiques et des algorithmes de résolution qui sont spécifiques à ce "monde linéaire". Citons un résultat d'*existence* de solutions :

Théorème 1. *Supposons que la fonction linéaire f soit majorée sur le polyèdre convexe fermé non vide S (c'est-à-dire $f^* = \sup_{x\in S} f(x)$ n'explose pas à $+\infty$) ; alors le problème de la maximisation de f sur S possède des solutions : il existe $x^* \in S$ tel que $f(x^*) = f^* = \sup_{x\in S} f(x)$.*

Ce qui fait marcher les choses pour ce résultat d'existence (un peu surprenant) est la linéarité (fonctionnelle) de f et la linéarité par morceaux (géométrique) - on dit aussi polyédralité - de S. Avec cette "rigidité" des données, on a évité les "variations de courbure" qui auraient permis, sinon, d'avoir une fonction f bornée supérieurement sur S sans que la borne supérieure soit atteinte (exemple simple : $f(x) = -e^x$ sur $S = \mathbb{R}^+$).

Du point de vue algorithmique et des applications, ce sont des problèmes d'optimisation linéaire à des millions de variables x_i que l'on sait résoudre aujourd'hui.

1.2 Optimisation SDP (ou sous contraintes de semidéfinie positivité)

Disons pour aller vite que ce domaine de l'Optimisation est le cousin matriciel du domaine présenté au-dessus au §1.1 : toutes les données sont linéaires en les variables en jeu, mais ces variables sont à présent des matrices symétriques. En anglais, SDP est un acronyme pour *SemiDefinite Programming*, que nous avons traduit en français par *Optimisation sous contraintes de semidéfinie positivité* (ou *Optimisation SDP,* conservant ainsi le sigle SDP). De quoi s'agit-il ? C'est une sorte d'optimisation à données (fonctions et contraintes) linéaires (voir 1.1) sur l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles $n \times n$. Si dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire (usuel) est $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, ce que l'on écrit aussi $x^T y$ (confondant le vecteur unicolonne u et la matrice U de taille $n \times 1$ avec les mêmes coefficients), celui de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \mathrm{tr}(XY) = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$ lorsque $X = [x_{ij}]$ et $Y = [y_{ij}]$. Nous utilisons ces deux notations différentes de produits scalaires pour distinguer ce qui se passe dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le format type d'un problème d'optimisation SDP est comme suit :

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } f(X) = \langle\langle C, X\rangle\rangle \\ \text{sous les contraintes } \langle\langle A_j, X\rangle\rangle = b_j \text{ pour tout } j = 1, ..., m, \\ \text{et } X \succeq 0, \end{array} \right.$$

la notation "$X \succeq 0$" signifiant "X est semidéfinie positive" (on dit aussi "positive" dans le système français). C'est l'occasion de rappeler l'importance des matrices (symétriques)

semidéfinies positives dans le contexte des applications en ingénierie, statistique, etc. L'article de revue [3], à vocation essentiellement pédagogique, rassemble toutes les propriétés utiles de ces matrices particulières.

Bien que la formulation du problème ($\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}}$), posé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, s'apparente beaucoup à celle de ($\mathrm{P}_{\mathcal{L}}$), posé dans $\mathbb{R}^n$, il faut noter le rôle particulier que joue la contrainte "$X \succeq 0$" (à l'origine de l'appellation utilisée), très différente à gérer, théoriquement comme numériquement, de la contrainte "$x \geq 0$". La situation n'est plus "linéaire-polyédrale" mais bien "convexe non-linéaire".

Pour l'existence de solutions dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}}$), il n'y a pas d'équivalent au Théorème 1. L'exemple suivant montre qu'un tel résultat est sans espoir.

Exemple 1. Considérons le problème d'optimisation SDP suivant, posé dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$:

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}})_2 \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } -x_{11} \\ \text{(c'est-à-dire Minimiser } f(X) = x_{11}) \\ \text{sous la contrainte } x_{12} = 1, \\ \text{et } X \succeq 0. \end{array} \right.$$

Il est bien du format ($\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}}$) avec $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $m = 1$ et $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Avoir $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \ni X = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ 1 & x_{22} \end{bmatrix} \succeq 0$, c'est-à-dire satisfaisant les contraintes de $(\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}})_2$, se traduit par :

$$x_{11} \geq 0, x_{22} \geq 0 \text{ et } x_{11}x_{22} - 1 \geq 0,$$

ou, de manière équivalente,

$$x_{11} > 0 \text{ et } x_{22} \geq \frac{1}{x_{11}}.$$

On voit ainsi que la valeur de la fonction-objectif, $f(X) = x_{11}$, peut être positive aussi petite que l'on veut ; donc $f^* = \inf_{X \in S} f(X) = 0$. Mais il n'y a pas de $X^* \in S$ (c'est-à-dire dans l'ensemble-contrainte S) pour laquelle $f(X^*) = \inf_{X \in S} f(X)$.

Du point de vue algorithmique, la situation de ($\mathrm{P}_{\mathcal{SDP}}$) est vraiment différente de celle de ($\mathrm{P}_{\mathcal{L}}$) ; les meilleurs algorithmes de résolution connus à ce jour s'essoufflent dès que la dimension n (taille des matrices) dépasse quelques centaines. Et c'est toujours la gestion de la contrainte conique (mais non-polyédrale) "$X \succeq 0$" qui est difficile et sans commune mesure avec celle de "$x \geq 0$".

1.3 Un exemple en Optimisation combinatoire

L'Optimisation combinatoire, ou discrète, ou en nombres entiers, diffère de l'Optimisation (dite) continue au sens où les variables en jeu sont des entiers, par exemple des variables de décision $x_i \in \{0, 1\}$ ("on fait ou on ne fait pas"), des variables de position $x_i \in \{-1, +1\}$ ("dans le même sens ou en opposition").

Que l'Optimisation combinatoire apparaisse comme un champ d'applications possibles de l'optimisation (continue) SDP (*cf.* sous-paragraphe précédent) est un peu surprenant. Voyons sur un exemple comment il intervient.

Considérons un problème d'optimisation combinatoire, posé en les variables $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, et formulé comme suit :

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } f(x) = \langle Cx, x \rangle \\ \text{sous les contraintes } \langle A_k x, x \rangle = b_k \text{ pour tout } k = 1, ..., m, \\ \text{et } x_i \in \{-1, +1\} \text{ pour tout } i = 1, ..., n, \end{array} \right.$$

où $C, A_1, ..., A_m \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$. En version un peu plus détaillée, cela donne :

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j \\ \text{sous les contraintes } \sum_{i,j} (A_k)_{i,j} x_i x_j = b_k \text{ pour tout } k = 1, ..., m, \\ \text{et } x_i \in \{-1, +1\} \text{ pour tout } i = 1, ..., n. \end{array} \right.$$

La fonction-objectif f est quadratique, les premières contraintes $\langle A_k x, x \rangle = b_k$ sont linéaires, mais la contrainte "dure" ici est celle qui impose aux coordonnées x_i de x d'être ± 1, que l'on peut aussi exprimer en $x_i^2 = 1$. Les problèmes d'optimisation tels que $(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}})$ sont connus comme étant presque toujours "NP-difficiles" (du point de vue complexité algorithmique ou "complexité computationnelle", dans le jargon spécialisé).

On peut prendre la matrice symétrique $C = [c_{ij}]$ de la fonction-objectif définie positive sans que cela réduise la difficulté du problème ; en effet, avec une matrice $C + rI_n$, la valeur de la fonction-objectif $f(x)$ n'est modifiée que d'une constante sur l'ensemble-contrainte puisqu'alors $\langle I_n x, x \rangle = \|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 = n$; il suffit de choisir $r > -\lambda_{\min}(C)$ ($\lambda_{\min}(C)$ étant la plus petite valeur propre de C) pour assurer que $C + rI_n$ est définie positive.

Alors, que fait-on devant ce problème $(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}})$ difficile ? On "relâche" certaines contraintes, ou on "élargit" l'espace de vie des variables, les mathématiciens disent qu'on "relaxe le problème". Voyons sur l'exemple en cours "les bienfaits d'une relaxation" (!) ... On part pour cela des observations simples suivantes : si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice $X = xx^T$ est semidéfinie positive et de rang 1 (si $x \neq 0$) ; les éléments diagonaux X_{ii} de X sont x_i^2 qui doivent être égaux à 1 ; par ailleurs, les termes *quadratiques* en x tels que $\langle Cx, x \rangle$ deviennent *linéaires* en X puisque $\langle Cx, x \rangle = \langle\langle C, X \rangle\rangle$ (une astuce de calcul bien utile !). Bref, on peut proposer une version relaxée de $(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}})$ sous la forme

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximiser } f(X) = \langle\langle C, X \rangle\rangle \\ \text{sous les contraintes } \langle\langle A_k, X \rangle\rangle = b_k \text{ pour tout } k = 1, ..., m, \\ X_{ii} = 1 \text{ pour tout } i = 1, ..., n, \\ \text{et } X \succeq 0. \end{array} \right.$$

Les n contraintes $X_{ii} = 1$ sont du même tonneau que les contraintes-égalités qui les précédent puisqu'elle peuvent s'exprimer comme $\langle\langle B_i, X \rangle\rangle = 1$, où la matrice B_i a des coefficients nuls partout sauf pour b_{ii} qui vaut 1. On reconnait en $(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax})$ un problème d'optimisation SDP, plus sympathique que $(\mathrm{P}_{\mathcal{OC}})$ puisque non seulement la fonction-objectif f est linéaire en la variable X mais, surtout, l'ensemble-contrainte (toujours sur la variable X) est un ensemble convexe fermé de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Cependant - car il y a un prix à payer -

($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) n'est pas équivalent à ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) puisque la contrainte "X doit être de rang 1", la plus ennuyeuse à vrai dire, ne figure plus. Le problème ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) est moins contraint, plus facile à résoudre, une situation intéressante donc... à condition de savoir combien on a perdu en passant de ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) à ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$).

Avec la correspondance $x \leftrightarrows X = xx^T$ entre les variables dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) et ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$), on peut facilement comparer dans un sens les valeurs optimales dans les deux problèmes : la valeur maximale dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) est supérieure ou égale à la valeur maximale dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$), bref : sup dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) $\geq$ sup dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$). Reste l'essentiel : comment évaluer une constante K telle que sup dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) $\leq K \times$ (sup dans ($\mathbb{P}_{\mathcal{OC}}$)) ... Et c'est là que peuvent être utiles l'inégalité et la constante de Grothendieck.

2. Rappels sur l'inégalité de Grothendieck

2.1 L'essence même de l'inégalité de Grothendieck (contenu repris de [4])

L'inégalité de Grothendieck est essentiellement une inégalité entre normes matricielles de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. La première de ces normes en jeu, absolument centrale et que nous retrouverons au sous-paragraphe suivant, est la norme $|||.|||_{\infty,1}$. Rappelons ses formulations équivalentes :

$$|||A|||_{\infty,1} = \begin{cases} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_1 \ = \sup_{\|x\|_\infty\leqslant 1} \|Ax\|_1 \ ; \\ \sup_{\|x\|_\infty\leqslant 1,\ \|y\|_\infty\leqslant 1} \langle Ax, y\rangle \ ; \\ \sup_{\|x\|_\infty=1,\ \|y\|_\infty=1} \langle Ax, y\rangle \ ; \\ \sup_{\substack{x_i=\pm 1,\\ y_j=\pm 1}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j\right). \end{cases} \tag{1}$$

L'autre ingrédient dans l'inégalité de Grothendieck est une autre norme matricielle, que nous notons $|||.|||_G$. Vite dit, $|||A|||_G$ est la généralisation, avec des vecteurs plutôt que des scalaires, de la dernière expression de $|||A|||_{\infty,1}$ au-dessus. Considérons pour cela m vecteurs unitaires (euclidiens) $u^{(i)}$ et n vecteurs unitaires (euclidiens) $v^{(j)}$ de $\mathbb{R}^d$ (ou, plus généralement, m vecteurs unitaires $u^{(i)}$ et n vecteurs unitaires $v^{(j)}$ d'un espace de Hilbert $(H,\ \langle .,.\rangle)$) et formons le scalaire $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \left\langle u^{(i)}, v^{(j)}\right\rangle$. Ceci n'est autre que la généralisation de l'expression entre parenthèses dans la quatrième ligne de (1) ; dans le cas de cette dernière ligne, les $u^{(i)} = x_i = \pm 1$ et $v^{(j)} = y_j = \pm 1$ sont des "vecteurs" unitaires de $H = \mathbb{R}^1$. La quantité considérée dans l'inégalité de Grothendieck est définie comme

$$|||A|||_G = \sup_{\substack{\left\|u^{(i)}\right\|=1 \text{ pour tout } i=1,..,m \\ \left\|v^{(j)}\right\|=1 \text{ pour tout } j=1,..,n \\ u^{(i)} \text{ et } v^{(j)} \text{ dans } H \\ (H,\langle .,.\rangle) \text{ espace de Hilbert}}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \left\langle u^{(i)}, v^{(j)}\right\rangle\right). \tag{2}$$

Il se trouve que $|||.|||_G$ est une norme sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, ce qui, d'ailleurs, est facile à vérifier directement. D'après ce que nous avons expliqué plus haut (choix de $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$), $|||.|||_G \geqslant |||.|||_{\infty,1}$. Plus intéressant et fondamental est que $|||.|||_G$ est majorée par un multiple de $||.||_{\infty,1}$ et la constante multiplicative K_G peut être rendue *indépendante de m, n et de*

l'espace de Hilbert H dans lequels vivent les m vecteurs unitaires $u^{(i)}$ et les n vecteurs unitaires $v^{(j)}$. C'est l'essence même de l'inégalité de GROTHENDIECK.

Théorème IG (A. GROTHENDIECK, 1953).
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $|||A|||_{\infty,1} \leqslant 1$. Alors, pour tout espace de HILBERT *$(H,\langle .,.\rangle)$, et tout jeu de m vecteurs unitaires $u^{(i)}$ et n vecteurs unitaires $v^{(j)}$ de H, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left\langle u^{(i)}, v^{(j)}\right\rangle\right| \leqslant K_G.$$

Cette constante (universelle) K_G ne dépend pas de m et n, ni de l'espace H (de sa dimension notamment) dans lequel vivent les vecteurs unitaires $u^{(i)}$ et $v^{(j)}$.
Dit autrement,

$$\begin{cases} |||A|||_G \leqslant K_G \ |||A|||_{\infty,1} \ \textit{pour tout } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \\ \qquad K_G \ \textit{constante indépendante de } m, n. \end{cases} \tag{3}$$

Voici quelques commentaires sur l'hypothèse et la conclusion de ce Théorème IG.
- Une formulation équivalente de l'*hypothèse* du Théorème IG (voir sa formulation (1)) est

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\right| \leqslant \|x\|_\infty \times \|y\|_\infty \ \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^m \textit{ et } y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

C'est une hypothèse plus forte qu'il n'y paraît..., même $A = I_n$ ne la satisfait pas (pour le voir, prendre pour x et y des vecteurs dont toutes les coordonnées valent 1).
- Dans la même lignée, une formulation équivalente de la *conclusion* du Théorème IG est : *Pour tout espace de* HILBERT *$(H, \langle .,.\rangle)$, et tout jeu de m vecteurs $u^{(i)}$ et n vecteurs $v^{(j)}$ de H, on a*

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left\langle u^{(i)}, v^{(j)}\right\rangle\right| \leqslant K_G \max_i \left\|u^{(i)}\right\| \times \max_i \left\|v^{(j)}\right\|. \tag{5}$$

Le Théorème IG est un théorème d'*existence d'une constante K* (indépendante de m et n) telle que

$$|||A|||_G \leqslant K \ |||A|||_{\infty,1} \text{ pour tout } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

La "meilleure" de ces constantes, c'est-à-dire la plus petite, est celle notée K_G et appelée *constante de* GROTHENDIECK. En se limitant à trois décimales après la virgule des données numériques, ce que l'on sait est : K_G est assurément strictement inférieur à $1,783$ (meilleure majoration numérique connue à ce jour) ; K_G est assurément strictement supérieur à $1,676$. En résumé, le meilleur encadrement numérique connu à ce jour de K_G est :

$$1,676 < K_G \ < 1,783. \tag{6}$$

2.2 Encore et toujours cette norme $|||.|||_{\infty,1}$ ...

Parmi les problèmes d'optimisation du type de ceux présentés au §1.3, il y a celui posé par la dite *coupe maximale* (*max cut* en anglais) d'un graphe. Sans entrer dans les détails qui nous éloigneraient trop de notre sujet, disons qu'il est central en Optimisation combinatoire et sert de fil rouge dans ce domaine. Il a même donné son nom à une norme matricielle liée à $|||.|||_{\infty,1}$, comme nous allons le voir à présent.

Pour $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit la quantité suivante

$$|||A|||_{nc} = \max_{\substack{I\subset[1,m]\\ J\subset[1,n]}} \left| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \right|. \tag{7}$$

Dans cette définition, il est implicitement supposé que I et J sont non vides. Il n'est pas difficile de voir que $|||.|||_{nc}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. L'indice nc est pour l'abréviation de *norme-coupe* (*cut-norm* en anglais), et rappeler ainsi que la construction et définition de cette norme ont pour soubassement les questions dites de *coupe maximale* dans la Théorie des graphes.

Les deux normes $|||.|||_{nc}$ et $|||.|||_{\infty,1}$ sont, bien sûr, équivalentes sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, mais on peut être plus explicite avec l'encadrement suivant :

Théorème 2. (*i*) *On a toujours*

$$|||A|||_{nc} \leq |||A|||_{\infty,1} \leq 4 \times |||A|||_{nc}. \tag{8}$$

(*ii*) *Dans le cas où la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de la matrice A est nulle, on a*

$$|||A|||_{\infty,1} = 4 \times |||A|||_{nc}. \tag{9}$$

Démonstrations.

(*i*) Première inégalité. Soit $I \subset [1,m]$ et $J \subset [1,n]$. Ainsi,

$$\left| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \right| \leq \sum_{i\in I} \left| \sum_{j\in J} a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j\in J} a_{ij} \right|.$$

A présent, soit x_J le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes x_i sont égales à 1 si $i \in J$ et à 0 sinon. Alors, $\|x_J\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j\in J} a_{ij} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_J\right)_j \right|, \\ \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_J\right)_j \right| &= \|Ax_J\|_1 \\ &\leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_1 = |||A|||_{\infty,1}. \end{aligned}$$

En conséquence, au vu de la définition de $|||A|||_{nc}$, on a bien $|||A|||_{nc} \leq |||A|||_{\infty,1}$.

(i) Deuxième inégalité. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs dont toutes les composantes valent ± 1. On peut partager la somme $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j$ en quatre sous-sommes,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j &= \sum_{(x_i=1,y_j=1)} a_{ij} - \sum_{(x_i=-1,y_j=1)} a_{ij} \\ &\quad - \sum_{(x_i=1,y_j=-1)} a_{ij} + \sum_{(x_i=-1,y_j=-1)} a_{ij}.\end{aligned}$$

Chaque sous-somme est de la forme $\sum_{i\in I, j\in J} a_{ij}$ avec des I, J dont la définition est claire. Par suite,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j \leq 4 \times \max_{\substack{I\subset[1,m]\\ J\subset[1,n]}} \left| \sum_{i\in I, j\in J} a_{ij} \right|.$$

Au vu des définitions (1) et (7) de $|||A|||_{nc}$ et $|||A|||_{\infty,1}$, on a bien $|||A|||_{\infty,1} \leq 4 \times |||A|||_{nc}$.

(ii) Soit $I^* \subset [1,m]$ et $J^* \subset [1,n]$ tels que $|||A|||_{nc} = \sum_{i\in I^*, j\in J^*} a_{ij}$. Dans le cas où ce serait $-\sum_{i\in I^*, j\in J^*} a_{ij}$, le raisonnement et les calculs sont les mêmes.

Définissons : $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x_i = 1$ si $i \in I^*, -1$ sinon ; $y \in \mathbb{R}^m$ avec $y_j = 1$ si $j \in J^*, -1$ sinon. L'astuce ici est que $1 + x_i$ vaut 2 ou 0 suivant que i est dans I^* ou non ; observation similaire pour $1 + y_j$. Ainsi, la somme ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}|||A|||_{nc} &= \sum_{i\in I^*, j\in J^*} a_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{1+x_i}{2}.\frac{1+y_j}{2} \\ &= \sum_{i,j} \frac{a_{ij}.1.1}{4} + \sum_{i,j} \frac{a_{ij}.x_i.1}{4} + \sum_{i,j} \frac{a_{ij}.1.y_j}{4} + \sum_{i,j} \frac{a_{ij}.x_i.y_j}{4} \\ &\leq \frac{|||A|||_{\infty,1}}{4} + ... + \frac{|||A|||_{\infty,1}}{4} \text{ (4 fois)} = |||A|||_{\infty,1}.\end{aligned}$$

L'intérêt de cette démonstration alternative de l'inégalité $|||A|||_{nc} \leq |||A|||_{\infty,1}$ est de voir que, dans le cas particulier où la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de A est nulle, il vient de la séquence au-dessus

$$|||A|||_{nc} \leq \frac{|||A|||_{\infty,1}}{4}.$$

Comme, de par (8) démontré plus haut, $|||A|||_{\infty,1}/4 \leq |||A|||_{nc}$, l'égalité (9) est démontrée.

CQFD.

La condition que la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de la matrice A est nulle n'est pas si contraignante que cela, témoin le résultat qui va suivre.

A partir de la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ créons la matrice augmentée $A' = [a'_{ij}] \in \mathcal{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} a'_{ij}=a_{ij} \text{ si } i=1,...,m \text{ et } j=1,...,n \\ \text{(dernière colonne) } a'_{i,m+1}=-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ pour tout } i=1,...,m \\ \text{(dernière ligne) } a'_{n+1,j}=-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \text{ pour tout } j=1,...,n \\ a'_{m+1,n+1}=0. \end{array}\right. \tag{10}$$

La somme de chaque ligne ainsi que la somme de chaque colonne de la matrice A' est nulle (cela a été fait pour !), mais ce passage de A à A' n'affecte pas les normes $|||.|||_{nc}$ puisque :

Théorème 3. *On a :*

$$|||A'|||_{nc} = |||A|||_{nc}\,. \tag{11}$$

Démonstration.

- La matrice A étant une sous-matrice de A', au vu de la définition (7) de $|||.|||_{nc}$, il est clair que $|||A|||_{nc} \leq |||A'|||_{nc}$.

- Réciproquement, soit $I^* \subset [1, m+1]$ et $J^* \subset [1, n+1]$ tels que $|||A'|||_{nc} = \left|\sum_{i\in I^*, j\in J^*} a'_{ij}\right|$.

Si $m+1 \notin I^*$, on garde I^*, qu'on renomme I^{**} ; si $m+1 \in I^*$, on remplace I^* par son complémentaire $[1, m+1]\setminus I^*$, qu'on appelle I^{**}.

Si $n+1 \notin J^*$, on garde J^*, qu'on renomme J^{**} ; si $n+1 \in J^*$, on remplace J^* par son complémentaire $[1, n+1]\setminus J^*$, qu'on appelle I^{**}.

Alors, puisque la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne de la matrice A' est nulle, on constate (cela a été fait pour !) que

$$\begin{array}{rcl} \left|\displaystyle\sum_{i\in I^{**}, j\in J^{**}} a'_{ij}\right| & = & \left|\displaystyle\sum_{i\in I^{*}, j\in J^{*}} a'_{ij}\right|, \\ \text{d'où } |||A'|||_{nc} & \geq & |||A|||_{nc}\,. \end{array}$$

Nous avons donc démontré que $|||A'|||_{nc} = |||A|||_{nc}$.

Il vient des résultats de ce sous-paragraphe 2.2 que la complexité des calculs de $|||.|||_{nc}$ et $|||.|||_{\infty,1}$ est la même.

3. L'inégalité de Grothendieck en Optimisation combinatoire

On reconnait dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) les mêmes expressions que dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) sauf que, cette fois-ci, on s'adresse à des vecteurs unitaires $u^{(i)}$ de $\mathbb{R}^n$, alors que dans ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) on ne considérait que des "vecteurs" unitaires x_i de $\mathbb{R}$.

Revenons à l'inégalité de Grothendieck rappelée plus haut au sous-paragraphe 2.1. On voit, en laissant tomber les détails, que ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}$) est lié à $|||C|||_{\infty,1}$ tandis que ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) est lié à $|||C|||_G$. Oublions les contraintes égalités pour une meilleure lisibilité. Alors, on paramétrise les matrices X vérifiant les contraintes de ($\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}$) en les écrivant sous forme de matrices de Gram ([3]) : $X = \left[\left\langle u^{(i)}, u^{(j)}\right\rangle\right]$, où les vecteurs $u^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ sont unitaires (car $\left\langle u^{(i)}, u^{(i)}\right\rangle = \left\|u^{(i)}\right\|^2 = X_{ii}$ doit être égal à 1). La fonction-objectif prend ainsi la forme

$\langle\langle C, X\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\left\langle u^{(i)}, u^{(j)}\right\rangle$, qui est précisément l'ingrédient que l'on trouve dans la définition de $|||C|||_G$. En conséquence :

Théorème 4. *On a :*

$$\text{sup dans } (\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}) \leq \text{sup dans } (\mathrm{P}_{\mathcal{OC}-relax}) \leq K_G \times (\text{sup dans } (\mathrm{P}_{\mathcal{OC}}))\,. \tag{12}$$

En bref : La valeur optimale dans le problème relaxé est plus grande que celle du problème originel (normal puisqu'on a "relaxé", on a agrandi le champ des possibilités), mais pas trop grâce au facteur K_G.

Dans certains problèmes d'optimisation combinatoire, on peut faire mieux que la majoration droite dans (12) ; néanmoins, l'intérêt de cette dernière est qu'elle est *universelle* et qu'elle fournit un ratio (ou borne d'approximation) *garanti,* (certes) théorique, entre la valeur optimale d'un problème réputé difficile et celle de sa version relaxée réputée plus facile.

Conclusion

L'inégalité de Grothendieck, un résultat de mathématiques vieux de soixante-dix ans, a des utilisations et répercussions dans un domaine de mathématiques appliquées (l'Optimisation combinatoire) moderne ; c'est souvent le lot des résultats de mathématiques. Ici, nous avons voulu simplement tirer le fil du début de cet écheveau. Le lecteur intéressé pourra repérer la littérature spécialisée à ce sujet, éventuellement s'y plonger, à l'aide des deux mots-clés suivants : inégalité de Grothendieck et Optimisation combinatoire.

Références

1. D. Dadush, *Geometric functional analysis.* Notes de cours téléchargeables à partir de son site web, Université d'Utrecht (Pays-Bas).

2. J.-B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire. Vol. 1 : Premiers pas en optimisation.* Collection Opuscules, Editions Ellipses (2008).

3. J.-B. Hiriart-Urruty and J. Malick, *A fresh variational look at the positive semidefinite world.* Journal of Optimization Theory and Applications, n°153 (2013), 551 − 577.

4. J.-B. Hiriart-Urruty et P. Lassère, *L'inégalité de Grothendieck en bref... 1ère partie. Des normes matricielles à la présentation détaillée de l'inégalité.* A paraître dans Quadrature (2026).

5. S. Khot and A. Naor, *Grothendieck-type inequalities in combinatorial optimization.* Communications Pure Appl. Math. 65 (2012), 992 − 1035.

6. R. Vershynin, *High-dimensional probability. An introduction with applications in data science* (2024). Livre téléchargeable à partir de son site web, Université de Californie à Irvine (USA).

Remerciements

Nous remercions Jean Bernard Lasserre (Toulouse), Frank Valentin (Cologne), Monique Laurent (Amsterdam) pour nous avoir signalé des références permettant d'éclairer l'entrée de ce dédale un peu technique de l'utilisation de l'inégalité de Grothendieck en Optimisation combinatoire moderne.