L'inégalité de Fritz David CARLSON

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY [1] & PATRICE LASSÈRE [2]

Résumé. Nous revisitons une épatante inégalité de F. D. CARLSON (1934) relative à des sommes de séries et des intégrales, moins connue que d'autres dans le même registre.

Abstract. We revisit a stunning inequality of F. D. CARLSON (1934) dealing with sums of series and integrals, less known than others in the same register.

Mots-clés. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Inégalités sur les sommes de séries. Inégalités sur des intégrales.

2020 Mathematics Subject Classification. 26D15

1. Introduction

Produire et utiliser des inégalités est une activité des mathématiciens, au même titre que démontrer des théorèmes, corollaires et lemmes ; l'article [4] du premier auteur est centré autour de cette quête d'inégalités. Rappelons tout de suite l'importance de sans doute la plus célèbre d'entre elles, à savoir l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; bien peu de démonstrations d'autres inégalités échappent à son intervention (*cf.* [4]). Nous-mêmes, nous l'utiliserons à l'envi ici, sous différentes formes (dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, dans des espaces de suites de carré sommable, dans des espaces de fonctions de carré intégrable).

On ne présente plus les autres inégalités célèbres que voici, à propos de suites (a_n) de réels positifs ou nuls (et non nuls pour la troisième), valables dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad \text{(de T. Carleman),}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_n a_m}{n+m} \leq \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} a_m^2 \right)^{1/2}, \qquad \text{(de Hilbert),}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + \cdots + a_n} \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}. \qquad \text{(de Hardy)}$$

Pour être juste et précis, on devrait dire pour Hilbert et Hardy *une* de leurs inégalités car plusieurs portent les noms de ces deux grands mathématiciens. Les constantes, parfois un

1. Département de mathématiques de l'université Paul Sabatier de Toulouse.
Mél : jbhu@math.univ-toulouse.fr
2. Département de mathématiques de l'université Paul Sabatier de Toulouse.
Mél : patrice.lassere@math.univ-toulouse.fr

peu bizarres car inattendues, qui apparaissent dans ces inégalités, e, π, 2, sont "optimales" (*sharp* en anglais) au sens où on ne peut faire mieux si on veut garder la généralité de toutes les suites de réels positifs ou nuls. Et, bien sûr, ces inégalités apparaissent régulièrement dans de nombreux sujets d'examens et de concours.

Moins connue est l'inégalité du mathématicien suédois Fritz David Carlson (1888−1952) qui démontre ([1], 1934) l'élégante inégalité (stricte) suivante :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^4 < \pi^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right), \tag{1}$$

valable pour toute suite $(a_n)_n$ de nombres réels positifs non tout nuls. La constante π^2 est en outre optimale [3].

Et sa version "continue" :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt\right), \tag{2}$$

où f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (c'est ici un choix de classe de fonctions qui n'est pas la plus générale possible).

On désignera (1) comme l'inégalité "discrète" de Carlson et (2) comme l'inégalité "continue" de Carlson, le choix de ces deux qualificatifs étant clair et habituel dans tels contextes mathématiques.

Remarques : ◦ Bien observer que l'inégalité discrète est stricte (c'est pour cela qu'on demande aux a_n de ne pas être tous nuls), ce qui est assez rare dans ce genre d'inégalités, à la différence de sa version continue qui est une inégalité au sens large et pour laquelle on donnera plus loin des cas d'égalité. Aussi dans (1), les sommes commencent pour $n = 1$; en effet si on commence avec $n = 0$, l'inégalité est fausse : considérer $(a_n)_n = (a_0 = 1, a_1 = 0, ..., a_n = 0, \dots)$ qui donnerait $1 < 0$!

◦ Il ne coûte rien de supposer les $a_n \geq 0$ dans l'inégalité discrète (ou bien $f \geq 0$ dans l'inégalité continue (2)) car

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^4 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\right)^4 < \pi^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right).$$

3. Annoncée disponible et imprimée en 1934, le volume dans lequel fut publiée la note ne parut qu'en 1935, ce qui entraîne parfois des confusions dans les références faites par les auteurs dans la littérature.

Il s'agit bien de Carlson et non de Carson, Carleson ou de Clarkson, dont certains ont aussi des inégalités portant leur nom. Il y a encore de nos jours plusieurs mathématiciens portant le nom de Carlson. Ecrite en français, cette courte note de F. D. Carlson (cinq pages) est introuvable, mais une traduction en anglais est disponible en Appendice B de l'ouvrage [7].

F. D. Carlson a dirigé le fameux institut de mathématiques Mittag-Leffler près de Stockholm après le décès du directeur précédent T. Carleman en 1949. Carlson a co-dirigé le travail de thèse des deux étudiants en doctorat suivants : H. Rådström bien connu des spécialistes d'Analyse convexe et des multiapplications (*set-valued analysis*), G. Dahlquist grand spécialiste des méthodes numériques de résolution d'équations différentielles.

∘ Il ne coûte rien non plus de supposer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2 < +\infty$ (de façon similaire pour l'inégalité (2) : $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt < +\infty$), il en est alors de même des deux autres sommes, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, et éviter la situation triviale où le terme de droite de l'inégalité vaut $+\infty$.
∘ À l'aide des suites particulières du type $a_n = \frac{a}{n^2+a^2}$, $a > 0$, on peut montrer qu'on ne peut faire mieux que π^2 dans l'inégalité (1) (en jouant, pour cela, sur le fait qu'on peut faire tendre a vers $+\infty$). Les calculs exacts des sommes des séries en jeu sont un peu compliqués, mais on peut majorer et minorer les sommes de ces séries par des intégrales ; ce n'est ni plus ni moins que ce qu'on fera plus loin.

2. L' "équivalence" entre les deux inégalités

On va voir que les deux inégalités (1) et (2) sont "presque" équivalentes au sens où : (1) implique (2), et (2) implique (1) avec une inégalité au sens large (un $\leq$ remplace le $<$).

• **Le discret implique le continu** : On suppose donc (1) acquise, et soit $f \geq 0$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt < +\infty$.
Pour tout $A > 0$, posons $a_k = f(kA/n),\ k = 1, \ldots, n$; alors par (1) :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kA}{n}\right)\right)^4 < \pi^2 \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kA}{n}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 f\left(\frac{kA}{n}\right)^2\right),$$

ou encore par homogénéité en a_k de (1),

$$\left(\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kA}{n}\right)\right)^4 < \pi^2 \left(\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kA}{n}\right)^2\right)\left(\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kA}{n}\right)^2 f\left(\frac{kA}{n}\right)^2\right).$$

On reconnait des sommes de Riemann associées aux fonctions en jeu, et donc en prenant la limite sur n on obtient :

$$\left(\int_0^A f(t)dt\right)^4 \leq \pi^2 \left(\int_0^A f(t)^2 dt\right)\left(\int_0^A t^2 f(t)^2 dt\right). \tag{2_A}$$

(observer que l'inégalité au départ stricte ne peut être maintenue que large ici). Cette inégalité étant vraie pour tout $A > 0$, il ne reste plus qu'à faire tendre A vers $+\infty$ pour en déduire l'inégalité (2).

• **Le continu implique le discret au sens large** : À vrai dire, (2) implique la version (légèrement) plus faible de (1), à savoir avec une inégalité large à la place de la stricte. Il suffit pour y accéder de choisir pour f la fonction en escalier vérifiant $f(t) = a_k$ pour $t \in]k-1, k]$.

3. Les démonstrations de Hardy de l'inégalité de Carlson

À la suite de la publication du travail de Carlson $(1934-1935)$ il ne faut attendre que quelques mois (1936, [3]) avant que le célèbre mathématicien anglais Godfrey Harold Hardy propose deux nouvelles preuves d'une diabolique et élégante simplicité des inégalités (1) et (2) (pour Carlson ce n'était pas vraiment le cas, son approche était basée sur la théorie analytique des fonctions).

• **Première démonstration de (1).** En suivant Hardy, posons[4] $S=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $T=\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2$; alors, pour α, β strictement positifs,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^2 &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sqrt{\alpha+\beta n^2}.\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta n^2}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(\alpha+\beta n^2)\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha+\beta n^2}\right) \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\alpha S+\beta T)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha+\beta n^2}\right) \text{ (selon la définition de } S \text{ et } T\text{)} \\
&< (\alpha S+\beta T) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\alpha+\beta t^2} \text{ (inégalité stricte claire entre la somme et l'intégrale)} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(S\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+T\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}\varphi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \text{ (par intégration de } \frac{1}{1+u^2}\text{)},
\end{aligned}
$$

où $\varphi(x)=Sx+T/x$. L'inégalité stricte étant vérifiée pour tous α, β strictement positifs, et comme

$$\inf_{x>0} \varphi(x)=\varphi\left(\sqrt{\frac{T}{S}}\right)=\sqrt{ST},$$

on en déduit l'inégalité discrète de Carlson

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^2 < \frac{\pi}{2}\varphi\left(\sqrt{\frac{T}{S}}\right) = \pi\sqrt{ST} = \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/2}.$$

CQFD.

• **Seconde démonstration de (1).** On se donne encore une suite $(a_n \geq 0)_n$ de réels non tous nuls telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2 < +\infty$ et on définit une fonction f_N par $f_N(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx)$, où N est un entier assez grand pour avoir $f_N(0)=\sum_{n=1}^{N} a_n > 0$. Avec cette expression de $f_N(x)$ et celle de $f_N'(x)=-\sum_{n=1}^{N} n a_n \sin(nx)$, l'intégration de fonctions trigonométriques sur $[0,\pi]$ conduit facilement à :

$$S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_N(t)^2 dt, \quad T_N=\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_N'(t)^2 dt. \tag{3}$$

4. On conserve ces notations tout au long de ce texte.

Observons que

$$\int_0^\pi f_N(t)dt = \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N a_n \cos(nt)\right) dt = \sum_{n=1}^N \left(\int_0^\pi a_n \cos(nt)dt\right) = 0 \ ; \tag{4}$$

en conséquence, il existe $0 < \zeta < \pi$ tel que $f_N(\zeta) = 0$. On peut même choisir $\zeta = \inf\{c \in]0,\pi[\, : f_N(c) = 0\}$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^2 &= f_N(0)^2 - f_N(\zeta)^2 = -2\int_0^\zeta f_N(t)f_N'(t)dt \quad (\text{car } \left(f_N^2\right)' = 2f_N f_N') \\
&\leq 2\int_0^\zeta |f_N(t)|.|f_N'(t)|\,dt \leq 2\int_0^\pi |f_N(t)|.|f_N'(t)|\,dt \\
&\leq 2\sqrt{\left(\int_0^\pi f_N(t)^2dt\right)\left(\int_0^\pi f_N'(t)^2dt\right)} \quad ((\text{toujours...}) \text{ Cauchy-Schwarz}) \\
&= 2\sqrt{\frac{\pi S_N}{2}.\frac{\pi T_N}{2}} = \pi\sqrt{S_N T_N} \leq \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Le passage à la limite quand $N \to +\infty$, suivi de l'élévation au carré de l'inégalité résultante, donnent l'inégalité au sens large (1) de Carlson.

Hardy avait utilisé la fonction $f_\infty(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ et des résultats et techniques sur les séries de Fourier. Sa démonstration du fait que l'inégalité obtenue est bien stricte si les a_n ne sont pas tous nuls comporte quelques "trous" que nous n'avons pas réussi à combler [5]. Nous nous contentons donc ici de la démonstration de l'inégalité au sens large de Carlson.

4. Cas d'égalité dans l'inégalité de Carlson continue

On peut directement démontrer l'inégalité continue et étudier le cas d'égalité en reprenant la première démonstration de Hardy au paragraphe précédent.

Soit $f \geq 0$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt < +\infty$; alors pour

5. Nous remercions Bernard Randé de nous avoir fait toucher du doigt cette difficulté.

$\alpha, \beta > 0$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha+\beta t^2} f(t).\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}dt\right)^2 \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} (\alpha+\beta t^2) f(t)^2 dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha+\beta t^2}dt\right) \\
&\quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= (\alpha\widehat{S}+\beta\widehat{T})\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\pi}{2}\left(\widehat{S}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\widehat{T}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \\
\text{(où, bien entendu, } \widehat{S} &= \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \text{ et } \widehat{T} = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt) \\
&\leq \pi\sqrt{\widehat{S}\widehat{T}} = \pi\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2}\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (2) est ainsi démontrée. CQFD. ■

Avouons que l'intervention de ces fonctions $\sqrt{\alpha+\beta t^2}$ dans cette démonstration, comme des suites $\sqrt{\alpha+\beta n^2}$ dans la première preuve de Hardy au paragraphe 3, est un *Deus* ou *Diabolus ex machina* difficile à comprendre au premier abord.

Pour le cas d'égalité, il force l'égalité lorsque l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au-dessus, f doit être de la forme $\frac{\gamma}{\alpha+\beta t^2}$ ou encore, par homogénéité, $\frac{1}{1+\beta t^2}$. Dans ce cas, pour le membre de gauche de l'inégalité de Carlson,

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)dt)\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\beta t^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4\beta},$$

tandis que pour le membre de droite,

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt} &= \pi\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\beta t^2)^2}\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+\beta t^2)^2}\right)^{1/2} \\
&= \pi\sqrt{\frac{\pi}{4\sqrt{\beta}}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}-\frac{\pi}{4\sqrt{\beta}}\right)\frac{1}{\beta}} = \frac{\pi^2}{4\beta},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité. Conclusion : Il y a bien égalité dans la formule de Carlson continue si et seulement si $f(t) = \frac{\gamma}{\alpha+\beta t^2}$ avec α et β strictement positifs.

5. L'inégalité de Carlson pour des sommes finies

Une conséquence immédiate de l'inégalité de Carlson discrète est

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star, \qquad \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^4 < \pi^2\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2\right). \tag{5}$$

La constante π^2 n'a plus de raison d'être optimale ; désignons par C_N la constante optimale :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^4 < C_N \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2\right). \tag{6}$$

On montre sans effort, en adaptant la première démonstration de Hardy (*cf.* paragraphe 3), que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^4 < (2\arctan(N))^2 \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2\right). \tag{7}$$

On a donc $C_N \leq (2\arctan(N))^2$ mais, bien que $(2\arctan(N))^2$ croisse vers π^2 avec N, cette fois $(2\arctan(N))^2$ n'est pas la constante optimale. Cela ne marche déjà pas pour $N = 1$ où $C_1 = 1 < (2\arctan(1))^2 = \pi^2/4$, ni pour $N = 2$ car $C_2 = \sup_{\alpha>0} \frac{(1+\alpha)^4}{(1+\alpha^2)(1+4\alpha^2)} \simeq 2.03 < 4.9 \simeq (2\arctan(2))^2$.

Montrons tout de même l'inégalité (7). Le cheminement de Hardy conduit immédiatement à

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^2 < (\alpha S + \beta T)\int_0^N \frac{dt}{\alpha + \beta t^2},$$

soit

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^2 < (\alpha S + \beta T)\,\frac{\arctan\left(N\sqrt{\beta/\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

En choisissant $\alpha = T$ et $\beta = S$ il vient

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^2 &< 2\sqrt{ST}\arctan\left(N\sqrt{S/T}\right) \\
&\leq 2\sqrt{ST}\arctan(N) \quad (\text{car } S \leq T) \\
&= 2\arctan(N)\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

CQFD. ■

6. L'inégalité de Carlson pour les intégrales sur un segment

À la différence du cas des sommes finies, si on intègre f sur un segment, la constante π^2 reste optimale et, en outre, l'inégalité est cette fois stricte pour les fonctions non nulles :

$$\forall A > 0, \qquad \left(\int_0^A f(t)dt\right)^4 < \pi^2 \left(\int_0^A f(t)^2 dt\right)\left(\int_0^A t^2 f(t)^2 dt\right). \tag{8}$$

L'inégalité large a déjà été démontrée précédemment (formule (2_A)), *montrons que* π^2 *est optimale.* Pour cela considérons à nouveau les fonctions $f_\alpha(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$, $\alpha > 0$; alors

$$\begin{aligned}
\int_0^A f_\alpha(t)dt &= \arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right), \\
\int_0^A f_\alpha(t)^2dt &= \frac{1}{2\alpha}\left(\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right) - \frac{A\alpha}{\alpha^2+A^2}\right), \\
\int_0^A t^2 f_\alpha(t)^2dt &= \frac{\alpha}{2}\left(\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right) - \frac{A\alpha}{\alpha^2+A^2}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \frac{\left(\int_0^A f_\alpha(t)dt\right)^4}{\left(\int_0^A f_\alpha(t)^2dt\right)\left(\int_0^A t^2 f_\alpha(t)^2dt\right)} = \frac{4\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right)^4}{\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+A^2}\right)^2} \tag{9}$$

et, finalement,

$$\frac{\left(\int_0^A f_\alpha(t)dt\right)^4}{\left(\int_0^A f_\alpha(t)^2dt\right)\left(\int_0^A t^2 f_\alpha(t)^2dt\right)} = \frac{4\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right)^4}{\arctan\left(\frac{A}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+A^2}\right)^2} \nearrow \pi^2 \text{ quand } \alpha \to 0^+.$$

On ne peut donc faire mieux que π^2 dans (8).

L'inégalité dans (8) est bien stricte pour les fonctions non nulles. En effet, comme vu au paragraphe 4, l'égalité dans l'inégalité de Carlson ne se produit que pour des fonctions f très particulières, et une fonction prolongée par 0 à partir de A n'en fait pas partie.

Pour d'autres aspects de l'inégalité de Carlson, la référence [7] ne manque pas d'inspiration et est la plus complète.

7. Généralisations

Il va sans dire qu'on ne compte plus les généralisations de cette inégalité de Carlson (dans [7]) ; pour prendre un exemple, R. M. Gabriel ([2]) prouve (entre autres) que pour tout $p > 1$:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^\star, \qquad \left(\sum_{n=1}^N a_n\right)^{2p} < 4\left(\frac{\Gamma^2(1/(2p-2))}{2\Gamma(1/(p-1))}\right)^{2p-2}\left(\sum_{n=1}^N a_n^p\right)\left(\sum_{n=1}^N n^{2p-2}a_n^p\right), \tag{10}$$

et donc

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{2p} \leq 4\left(\frac{\Gamma^2(1/(2p-2))}{2\Gamma(1/(p-1))}\right)^{2p-2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2p-2}a_n^p\right), \tag{11}$$

où Γ désigne la fonction gamma usuelle.

En faisant $p = 2$ on retrouve l'inégalité discrète de Carlson car

$$4\left(\frac{\Gamma^2(1/(2p-2))}{2\Gamma(1/(p-1))}\right)^{2p-2} \underset{(\text{ pour } p=2)}{=} \Gamma^4(1/(2)) = \pi^2, \tag{12}$$

se rappelant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

Commentaires et remerciements

Dans [5, Tapa 217], le premier auteur avait proposé l'inégalité de Carlson continue, issue de la référence [8], sans savoir (l'auteur de l'ouvrage [8] consulté à l'époque non plus) qu'elle portait ce nom, accompagnée d'une démonstration utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais cette démonstration conduisait à une constante de majoration supérieure à l'optimale π^2. Cela arrive parfois dans les démonstrations d'autres inégalités où les constantes obtenues dépendent de l'approche suivie. C'est le cas de la démonstration de l'inégalité de Grothendieck et de la constante de majoration qui va avec ; on ne sait d'ailleurs toujours pas quelle est cette valeur optimale (*cf.* [6]).

C'est notre ancien collègue Philippe Laurençot (CNRS et Université de Savoie) qui nous a signalé le lien de [5, Tapa 217] avec l'inégalité de Carlson. Mais toute la suite n'aurait pas été possible sans le concours de notre dévouée et efficace bibliothécaire de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, Dominique Barrère, qui nous a obtenu une copie scannée de l'ouvrage [7]. Nous les en remercions chaleureusement.

Références

1. F. D. Carlson, *Une inégalité*, Ark. Mat. Astr. Fysik 25B (1934), pp. 1 – 5.
2. R. M. Gabriel, *A extension of an inequality due to Carlson*, Journal London Math. 12 (1937) pp. 130 – 132.
3. G. H. Hardy, *A note on two inequalities*, Journal London Math. 11 (1936) pp. 167 – 168.
4. J.-B. Hiriart-Urruty, *La lutte pour les inégalités*, Revue de la filière mathématiques RMS (ex-Revue de Mathématiques Spéciales), vol. 122, n°2 (2011 – 2012), pp. 12 – 18.
5. J.-B. Hiriart-Urruty, *Mathematical Tapas*, vol. 2 (From Undergraduate to Graduate, L3-M1), Springer Undergraduate Mathematical Series (2017).
6. J.-B. Hiriart-Urruty et P. Lassère, *L'inégalité de Grothendieck en bref... 1ère partie. Des normes matricielles à la présentation détaillée de l'inégalité.* A paraître dans la revue Quadrature.
7. L. Larsson, L. Maligranda, J. Pečarić and L. E. Persson, *Multiplicative Inequalities of Carlson Type and Interpolation,* World Scientific Publishing Company (2006).
8. J. M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press (2004). Réédité plusieurs fois depuis.