
ANALYSE VARIATIONNELLE ET
OPTIMISATION

Éléments de Cours, exercices et
problèmes corrigés

D. AZÉ J.-B. HIRIART-URRUTY

Table des matières

Avant-Propos	9
Abréviations et Notations	11

Partie I Éléments de Cours

1 Rappels et compléments d'analyse	17
1.1 Principe variationnel d'Ekeland	17
1.2 Différentiabilité	19
1.3 Fonctions convexes	21
2 Introduction à la problématique de l'optimisation	25
2.1 Le problème de l'optimisation avec contrainte	25
2.1.1 Existence d'une ou plusieurs solutions	26
2.1.2 Conditions nécessaires et conditions suffisantes d'optimalité ..	29
2.1.3 Résolution numérique	29
2.2 Théorèmes de séparation et de dualité	30
2.2.1 Notations	30
2.2.2 Théorèmes de séparation	32
2.2.3 Un théorème général de dualité	37
2.2.4 Polyèdres dans \mathbb{R}^n	38
3 Introduction à la programmation linéaire	45
3.1 Le problème de la programmation linéaire	45
3.2 Dualité en programmation linéaire	49
3.2.1 Le théorème de dualité et quelques conséquences	49
3.2.2 Quelques cas particuliers	54
3.2.3 Application : systèmes d'inéquations linéaires	56
3.3 Perturbation des données	58

4	Conditions d'optimalité	63
4.1	Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre	63
4.1.1	Cas de contraintes d'égalité	63
4.1.2	Cas de contraintes d'inégalité	66
4.1.3	Cas de contraintes d'inégalité et d'égalité	70
4.2	Conditions du second ordre	77
4.3	Dualisation de LAGRANGE	81
5	Introduction aux espaces de Hilbert	83
5.1	Définitions basiques	83
5.2	Le Théorème de projection	86
5.3	Bases hilbertiennes	90
6	Introduction à la formulation variationnelle de problèmes aux limites ..	95
6.1	Introduction	95
6.2	Un premier exemple type	95
6.3	Un deuxième exemple type	99
6.4	D'autres exemples	99
6.5	Introduction à la méthode des éléments finis	99

Partie II Exercices et problèmes corrigés

7	Exercices en dimension finie	105
N° 1	Intérieur relatif d'un convexe	105
N° 2	Résultats de séparation	106
N° 3	Cône polaire	108
N° 4	Fermeture de l'enveloppe positive I	109
N° 5	Fermeture de l'enveloppe positive II	110
N° 6	Lemme de Farkas	111
N° 7	Caractérisation de la non vacuité d'un polyèdre	112
N° 8	Lemme de Gordan	113
N° 9	Cône normal à un polyèdre convexe	114
N° 10	Distance à un demi-espace	115
N° 11	Existence de points extrémaux d'un convexe	116
N° 12	Quelques propriétés des polyèdres	117
N° 13	Intérieur d'un cône polyédral	119
N° 14	Dualité en programmation linéaire	119
N° 15	Fonction d'appui d'un convexe	120
N° 16	Caractère borné de l'ensemble des solutions primales en programmation linéaire	121
N° 17	Caractère borné de l'ensemble des solutions duales en programmation linéaire	122
N° 18	Persistence de l'ensemble des solutions primales en programmation linéaire	124
N° 19	Théorème de Carathéodory	125
N° 20	Théorème de Minkowski	126

N° 21	Directions extrémales d'un cône convexe.....	127
N° 22	Points extrémaux d'un polyèdre.	128
N° 23	Theorème de Weyl I.	130
N° 24	Théorème de Weyl II.	131
N° 25	Analyse variationnelle de formes quadratiques convexes.	132
N° 26	Généralisation de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.	144
N° 27	Caractérisation de la positivité d'une fonction quadratique. ...	146
N° 28	Minimisation du quotient de deux fonctions quadratiques.	147
N° 29	Minimisation d'une fonction bi-quadratique.	148
N° 30	L'inégalité de KANTOROVITCH en bref.	150
N° 31	Test de positivité du complément de SCHUR via l'Optimisation. 152	
N° 32	Le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS par l'Optimisation. ...	154
N° 33	Un problème de régression en Statistique.	157
N° 34	Minimisation d'une énergie électrostatique.	158
N° 35	Minimisation d'une somme d'angles en 3D.....	162
N° 36	Minimisation d'une énergie à volume fixé.	164
N° 37	Maximisation d'un volume sous une contrainte de ficelage. ...	166
N° 38	Maximisation de l'aire d'un triangle de périmètre donné.	168
N° 39	Maximisation de l'aire d'un quadrilatère de périmètre donné. .	171
N° 40	Minimisation des aires des parties latérales d'un tétraèdre.	174
N° 41	Le théorème de PYTHAGORE en 3D. Minimisation de l'aire d'une plaque posée sur les trois axes de coordonnées.	177
N° 42	Maximisation du volume d'un container dans une coque ellipsoïdale.	182
N° 43	Minimisation d'une énergie dans un problème de type COULOMB.	185
N° 44	Analyse variationnelle de la factorisation polaire d'une matrice	187
N° 45	Un problème d'approximation matricielle.	189
N° 46	Maximisation d'une fonction produit sur la sphère-unité.	191
N° 47	Minimisation d'une fonction de type produit sur le simplexe-unité. Une application géométrique dans le plan.	192
N° 48	Minimisation d'une fonction quadratique sur le simplexe-unité.	196
N° 49	La projection sur le simplexe-unité	198
N° 50	Minimisation d'une fonction du type entropie sur le simplexe-unité.	203
N° 51	Minimisation partielle d'une fonction quadratique. Application à l'inégalité de BERGSTRÖM.	205
N° 52	Position d'équilibre d'un fil élastique suspendu.	208
N° 53	Interprétation des conditions nécessaires d'optimalité à l'aide de la décomposition de MOREAU.	215
N° 54	Etude de cas : un exemple de modélisation : le choix du meilleur investissement financier.	217
N° 55	Etude de cas : un exemple de modélisation : un problème d'optimisation linéaire avec contraintes en probabilités.	222
N° 56	Convexes du plan d'aire maximale.	225
N° 57	Convexes compacts du plan de largeur constante.	227

N° 58	Enveloppe convexe vs. enveloppe plénière d'un ensemble de matrices.	230
N° 59	Deux convexes compacts voisins (de matrices) comparés par leurs fonctions d'appui.	232
N° 60	Différenciation des points extrémaux d'un convexe compact à l'aide d'une fonction.	234
N° 61	Une involution dans la famille des fonctions convexes de la variable positive réelle.	235
N° 62	Une fonction de valeurs propres.	237
N° 63	Caractérisation par log-convexité de la fonction gamma d'EULER.	239
N° 64	Calcul d'une intégrale liée à la distance à un polyèdre convexe du plan.	241
N° 65	Volume du polaire d'un convexe à l'aide de sa fonction d'appui.	243
N° 66	Minimisation du parcours de visite de trois droites de l'espace.	245
N° 67	Inégalité de WIRTINGER. Application à la minoration des périodes pour les solutions d'une équation différentielle vectorielle autonome.	247
N° 68	Convexité du quotient d'une fonction quadratique par une norme.	250
8	Exercices en dimension infinie	253
N° 69	Densité des fonctions régulières dans L^1	253
N° 70	Régularisation par convolution.	254
N° 71	Intégration par parties.	257
N° 72	Nullité de la distribution associée à une fonction.	257
N° 73	Espaces de Sobolev à une variable.	258
N° 74	Théorème de Lax-Milgram.	260
N° 75	Théorème de Stampacchia.	261
N° 76	Formulation variationnelle.	261
N° 77	Calcul d'un cône polaire.	263
N° 78	Le problème du brachystochrone.	265
N° 79	Principe variationnel d'Ekeland.	268
N° 80	Applications du principe variationnel d'Ekeland en théorie du point fixe.	270
N° 81	Non existence de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace préhilbertien.	274
N° 82	Détermination de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé (de codimension 2) d'un espace préhilbertien.	276
N° 83	Un problème de commande optimale traité comme un problème de projection sur un sous-espace affine d'un espace préhilbertien.	277
N° 84	Variations sur les projections sur deux sous-espaces vectoriels fermés.	279
N° 85	Minimisation d'une fonctionnelle intégrale.	281
N° 86	Un problème de localisation de FERMAT.	283

N° 87	Convergence faible vs. convergence forte d'une suite dans un espace de HILBERT.	287
N° 88	Obstacles empêchant une suite faiblement convergente de converger (fortement).	290
N° 89	Inégalité d'OPIAL.	292
N° 90	Le problème des points les plus éloignés.	292
N° 91	Projection de l'origine sur un demi-espace fermé d'un espace de HILBERT.	294
N° 92	Projection sur un cône convexe fermé d'un espace de HILBERT. Décomposition de MOREAU.	295
N° 93	Règles de calcul sur les cônes polaires.	301
N° 94	Dérivée directionnelle de l'opérateur de projection sur un convexe fermé d'un espace de HILBERT.	301
N° 95	L'algorithme de J. VON NEUMANN des projections alternées sur deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de HILBERT.	304
N° 96	Trois applications du principe variationnel d'EKELAND.	308
N° 97	Une utilisation du principe variationnel d'EKELAND en analyse convexe.	311
N° 98	La règle de FERMAT asymptotique.	314
N° 99	Désaccord entre deux normes dans les conditions d'optimalité du 2^{nd} ordre.	315
N° 100	Un problème d'approximation en norme minimale.	317
N° 101	Calcul sous-différentiel et de transformées de Legendre-Fenchel de fonctions radiales.	320
N° 102	Formulation abstraite de l'algorithme ROF en traitement d'images.	324
N° 103	Séparation d'une fonction convexe et d'une fonction concave.	326
Sources	329
Bibliographie	331

Avant-Propos

En nous adressant avec cet ouvrage aux étudiants (et leurs enseignants) de niveaux **L3** et **M1** de mathématiques, nous avons conscience d'être déjà sur la pointe d'une pyramide...aucune comparaison donc avec des livres de cuisine ou de jeux populaires. Cela étant, soucieux de la *formation* des jeunes à laquelle nous avons consacré plusieurs décennies (des classes de secondaire jusqu'au doctorat à l'université), nous offrons ici une contribution supplémentaire qui pourra rendre quelques services.

Comme l'indique le titre de l'ouvrage, celui-ci comporte des éléments de Cours et une collection d'exercices et problèmes corrigés. Par "éléments de Cours" nous entendons un corpus *introductif* à l'Analyse variationnelle et l'Optimisation, qui, suivant les cursus, demande à être complété. L'approche est très progressive, dans un contexte de dimension finie tout d'abord, puis le cadre hilbertien, en soulignant les idées de base essentielles, et non les points "tétrapilectoniques" (*i.e.*, désignant l'art de couper les cheveux en quatre; néologisme attribué à U. ECO (1932-)). Si le cadre *convexe* joue un grand rôle, c'est qu'il est à la fois *formateur* et *explicatif*, y compris à l'égard de contextes qui, eux, n'ont rien de convexe. Pour les problèmes d'optimisation non convexes, l'accent est porté sur les points prépondérants que sont : les conditions d'optimalité, la dualisation, les techniques modernes comme celles issues du principe variationnel d'EKELAND.

Les exercices et problèmes corrigés (plus d'une centaine) constituent le coeur de l'ouvrage. En effet, comme l'étudiant-lecteur devrait le savoir, on ne progresse en mathématiques qu'en en faisant, en "séchant" sur des questions même...Chaque exercice est doté d'une, deux ou trois étoiles : ceux avec une étoile peuvent être immédiatement abordés, dès le L3 ; ceux avec deux étoiles sont "normaux" au niveau M1 ; ceux avec trois étoiles sont plus difficiles ou débordent du niveau ciblé, disons qu'ils relèvent déjà du M2. Le travail sur un exercice est l'occasion de tester ses connaissances, leur forme d'acquisition (active ou seulement passive), et aussi de réfléchir en "levant le nez de sa feuille" ; c'est ici l'occasion de rappeler ce que disait R. BARTHES (1915-1980), homme des pays de l'Adour s'il en est : "*Ne vous est-il jamais arrivé, lisant un livre, de vous arrêter sans cesse dans votre lecture, non par désintérêt, mais au contraire par afflux d'idées, d'excitations, d'associations ? En un mot, ne vous est-il pas arrivé de lire en levant la tête ?*".

Nous terminons en remerciant les Editions Cépaduès d'accueillir notre livre, contribuant ainsi, selon leurs dires publicitaires, à "diffuser le savoir et le savoir-faire toulousains".

Toulouse, 2004-2009

Les auteurs.