CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 15

IRÈNE MEUNIER

Exercice 35.

1. Écrivez $\cos^5(x)$ en fonction de $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, $1 \leqslant n \leqslant 5$.
2. Calculer $\frac{\sin(6x)}{\sin(x)}$ en fonction de $\cos(x)$.

(1) La technique est d'utiliser les formules classiques : $\cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5$. Ici, on déroule grâce à la formule du binôme :

$$(e^{ix} + e^{-ix})^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} e^{i(5-2k)x}$$

Soit :

$$(e^{ix} + e^{-ix})^5 = e^{ix} + e^{-ix} + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix}) = 2\left(\cos(x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)\right)$$

Au bilan :

$$\cos(x) = \frac{1}{2^4}(11\cos(x) + 5\cos(3x))$$

(2) On a $\sin(6x) = \operatorname{Im}\left((e^{ix})^6\right) = \operatorname{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))^6\right)$. En outre, en utilisant la formule du binome, on a :

$$\begin{aligned}
(\cos(x) + i\sin(x))^6 =& i^6 \sin(x)^6 + 6\cos(x)i^5\sin^5(x) + 15\cos^2(x)i^4\sin^4(x) + \\
& 20\cos^3(x)i^3\sin^3(x) + 15\cos^4(x)i^2\sin^2(x) + 6\cos^5(x)i\sin(x) + \cos(x)^6 \\
=& -\sin(x)^6 + 6i\cos(x)\sin^5(x) + 15\cos^2(x)\sin^4(x) - \\
& 20i\cos^3(x)\sin^3(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) + i6\cos^5(x)\sin(x) + \cos(x)^6 \\
=& -\sin(x)^6 + \cos(x)^6 + 15\cos^2(x)\sin^4(x) - \\
& 15\cos^4(x)\sin^2(x) + i(6\cos(x)\sin^5(x) - 20\cos^3(x)\sin^3(x) + 6\cos^5(x)\sin(x))
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sin(6x) &= 6\cos(x)\sin^5(x) - 20\cos^3(x)\sin^3(x) + 6\cos^5(x)\sin(x) \\
&= 6\cos(x)(1-\cos^2(x))^2\sin(x) - 20\cos^3(x)(1-\cos^2(x))\sin(x) + 6\cos^5(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Soit après développement et regroupement des puissances de cos :

$$\frac{\sin(6x)}{\sin(x)} = 6\cos(x) - 26\cos^3(x) + 32\cos^5(x)$$

Exercice 36.

1. Linéariser $\cos^3(x)\sin^3(x)$.
2. Déduire de la question précédente une primitive de $(\sin(x)\cos(x))^3$.

(1) Par une formule de trigonométrie connue, on a : $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Alors $(\sin(x)\cos(x))^3 = \frac{1}{8}\sin^3(2x)$. En outre, $\sin^3(2x) = \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3$. Par la formule du binome : $(e^{2ix} - e^{-2ix})^3 = e^{i6x} - e^{-i2x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i6x} = 2i\sin(6x) - 2i.3\sin(2x)$. On en déduit :

$$(\sin(x)\cos(x))^3 = \frac{1}{8}\sin^3(2x) = -\frac{1}{32}(\sin(6x) - 3\sin(2x))$$

(2) Une primitive de $\sin(6x)$ est $-\frac{\cos(6x)}{6}$ et une primitive de $\sin(2x)$ est $-\frac{\cos(2x)}{2}$. Ainsi, une primitive de $(\sin(x)\cos(x))^3$ est $\frac{1}{32}(\frac{1}{6}\cos(6x) - \frac{3}{2}\cos(2x))$.

Exercice 37.

Calculer les quatre intégrales suivantes...

C'est l'occasion d'un récapitulatif partiel des techniques d'intégration que l'on a vues pendant ces TD.

(I) On veut calculer $I = \int_0^\pi \cos^{50}(x)\sin(x)dx$. On peut soit faire un changement de variable $u = \cos^{50}(x)$, soit reconnaître une dérivée : $(\cos^{51}(x))' = 51.\cos^{50}(x)\sin(x)$, Soit $\frac{\cos^{51}(x)}{51} = \cos^{50}(x)\sin(x)$. Ainsi :

$$I = \left[\frac{\cos^{51}(x)}{51}\right]_0^\pi = \frac{\cos^{51}(\pi)}{51} - \frac{\cos^{51}(0)}{51} = -\frac{2}{51}$$

(J) Ici, attention, les calculs vont être lourds... Mais c'est un bon entraînement, je ne détaillerai pas tout, plus c'est dur, plus c'est une raison pour essayer par vous-mêmes...

Tout d'abord, avant toute linéarisation, un bon réflexe à avoir est, quand c'est possible, de restreindre le plus possible l'intervalle d'intégration, par diverses symétries... Ici, si on pose $f(x) = \cos^4(2x)\sin^2(3x)$, on peut constater que f est π-périodique et paire. Ainsi :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\pi \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx \quad \text{(car f est périodique de période } \pi\text{)} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx \quad \text{(car f est paire)}
\end{aligned}$$

Méthode 1 : On peut, en première méthode, tenter de linéariser l'intégrande :

$$\begin{aligned}
\cos^4(2x)\sin^2(3x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2^4.(2i)^2}(e^{2ix}+e^{-2ix})^4(e^{3ix}-e^{-3ix})^2 \\
&= \frac{1}{2^4.(2i)^2}(e^{8ix}+e^{-8ix}+4e^{4ix}+4e^{-4ix}+6)(e^{6ix}+e^{-6ix}-2) \\
&= \frac{1}{2^4.(2i)^2}(e^{14ix}+e^{-14ix}+4(e^{10ix}+e^{-10ix})-2(e^{8ix}+e^{-8ix}) \\
&+6(e^{6ix}+e^{-6ix})-8(e^{4ix}+e^{-4ix})+5(e^{2ix}+e^{-2ix})-12) \\
&= \frac{1}{2^3.(2i)^2}(\cos(14x)+4\cos(10x)-2\cos(8x)+6\cos(6x)-8\cos(4x)+5\cos(2x)-6) \\
&= -\frac{1}{32}(\cos(14x)+4\cos(10x)-2\cos(8x)+6\cos(6x)-8\cos(4x)+5\cos(2x)-6)
\end{aligned}$$

Maintenant, l'expression à intégrer est plus simple :

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\pi \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx \\
&= -\frac{1}{32}\int_0^\pi (\cos(14x)+4\cos(10x)-2\cos(8x)+6\cos(6x)-8\cos(4x)+5\cos(2x)-6)dx \\
&= -\frac{1}{32}\int_0^\pi \left[\frac{\sin(14x)}{14}+4\frac{\sin(10x)}{10}-\ldots-6x\right]_0^\pi \\
&= \frac{6\pi}{32} \text{ (tout ce qui s'intègre en sin(...) est nul, reste le dernier terme)} \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

Méthode 2 : On linéarise à nouveau, mais en essayant d'être subtils (parfois ça marche, d'autres fois non, il faut persévérer). Ici, c'est plus ou moins utile. Ma tentative :

$$\begin{aligned}
J &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx\right)
\end{aligned}$$

(on essaie de réduire l'intervalle d'intégration,
souvent pour effectuer des changements de variable qui soient effectivement bijectifs)

On fait ensuite un changement de variable dans la deuxième intégrale, $u = x - \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx &= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \cos^4(2u+\pi)\sin^2(3(u+\frac{\pi}{2}))du \\
&= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \cos^4(2u)\sin^2(3u+\frac{\pi}{2})du \\
&= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \cos^4(2u)\left(-\cos(3u)\right)^2 du \\
&= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \cos^4(2u)\cos^2(3u)du \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2v)\cos^2(3v)dv
\end{aligned}$$

(on a fait le changement de variable v = -u en tenant compte de la parité de cosinus)

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
J &= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)\sin^2(3x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)\cos^2(3x)dx) \\
J &= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)(\sin^2(3x)+\cos^2(3x))dx) \\
J &= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)dx)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\cos^4(2x) &= \left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{\cos(8x)+4\cos(4x)+3}{8}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
J &= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(2x)dx) \\
&= 2(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(8x)+4\cos(4x)+3}{8}dx) \\
&= \left[\ldots + \frac{3x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

(K) On a $K = \int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} \cos^5(7x)\sin^7(-3x)dx$. On n'a franchement pas très envie d'attaquer une linéarisation ici... Mais on peut observer avant. Si on pose : $f(x) = \cos^5(7x)\sin^7(-3x)$, on peut noter que $f(-x) = \cos^5(7(-x))\sin^7(-3(-x)) = \cos^5(7x)(-\sin^7(-3x)) = -f(x)$ (par parité du cos et imparité du sin). Ainsi, f est impaire, et comme on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à zéro, c'est un résultat connu que l'intégrale sera nulle. Démonstration dans le cas général : L'idée est de faire le changement de variable $u = -v$.

Démonstration.

$$I = \int_{-a}^{a} f(u)du = \int_{a}^{-a} f(-v)(-1)dv = -\int_{-a}^{a} f(v)dv$$

D'où $2I = 0$, et donc $I = 0$. □

Ici, on est typiquement dans ce cas de figure, donc on peut dire, sans plus de calcul : $K = 0$.

(l) On a $L = \int_0^{\pi} x^3\cos(x)dx$. Lorsqu'on on a un intégrande de la forme $P(x)\cos(x)$ ou $P(x)\sin(x)$ avec P un polynome, une méthode classique consiste à faire des IPP successives, en dérivant le polynome, afin de faire baisser son degré, jusqu'à ce qu'il disparaisse. Comme l'intégrale de cos ou sin reste grosso modo sin ou cos, on n'a pas de problème de ce côté. On peut faire la même chose en passant en complexes, puis en prenant la partie réelle ou imaginaire à la fin. L'exponentielle complexe change encore moins de tête en l'intégrant.

On attaque donc en posant $u(x) = x^3$ et $v'(x) = \cos(x)$, $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} L &= \underbrace{\left[x^3 \sin(x)\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 3x^2 \sin(x)dx \\ &= -3 \int_0^\pi x^2 \sin(x)dx \end{aligned}$$

On recommence avec $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin(x)$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\cos(x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin(x)dx &= \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos(x)dx \\ &= \pi^2 + 0 + 2 \int_0^\pi x \cos(x)dx \\ &= \pi^2 + 2 \left([x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)dx \right) \\ &= \pi^2 - 2 \left[-\cos(x)\right]_0^\pi \\ &= \pi^2 - 2.2 \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Au bilan :

$$L = -3(\pi^2 - 4)$$