

SURFACES DE RIEMANN

TD n° 2

Thèmes : *Formes différentielles, cohomologie.*

Exercice 1 – Formule de Stokes.

1. Soit R un rectangle (plein) du plan et ω une 1-forme lisse définie au voisinage de R . À l'aide du théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\partial R} \omega = \iint_R d\omega$$

2. Faire de même avec un triangle plein.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas de surface de Riemann compacte $X \subset \mathbb{C}^N$.

Exercice 3

Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe et $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda$ la projection canonique.

1. Soit $z_0 \in \Lambda$ et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = tz_0$. Montrer que $\pi \circ \gamma$ est un lacet sur X
2. Calculer

$$\int_{\pi \circ \gamma} dz$$

3. Calculer

$$\int_X dz \wedge d\bar{z}$$

Exercice 4

Soit X la surface de Riemann correspondant à la fonction $y = \sqrt[3]{1-x^3}$, muni de sa projection $p : X \rightarrow \mathbb{C}$ sur la première variable x .

1. Montrer que le chemin fermé γ_0 du plan $\mathbb{C}$ représenté sur la Figure 1 ci-dessous est l'image par p d'un chemin fermé γ .
2. En intégrant la forme différentielle $\omega = \frac{dx}{y}$ sur γ , montrer l'identité

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 5

Montrer qu'il existe une inclusion

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^*).$$

On pourra utiliser les fonctions $z \mapsto z^n$.

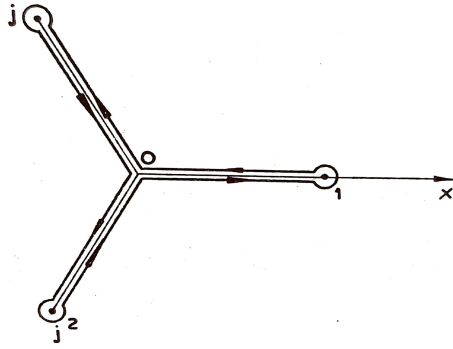


Figure 1: Un lacet du plan

Exercice 6

Montrer que l'espace de cohomologie $\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$ est engendré par la classe de $\frac{dz}{z} \in H^0(\mathbb{C}^*, \Omega_{\mathbb{C}^*}^1)$, et donc que

$$\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1) \simeq \mathbb{C}.$$