
POINTS DE VUE ALGÈBRIQUES ET ANALYTIQUES SUR LA NOTION DE POSITIVITÉ EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

par

Henri Guenancia

Table des matières

Introduction	1
Partie I. Géométrie algébrique et géométrie analytique complexe	2
1. La notion de diviseur en géométrie algébrique.....	2
2. Fibrés en droites holomorphes et métriques hermitiennes.....	3
3. Faisceaux cohérents et principe GAGA.....	4
Partie II. Notions de positivité en géométrie complexe	5
4. Positivité des diviseurs : le point de vue algébrique.....	5
4.1. Théorie de l'intersection.....	5
4.2. Cônes de diviseurs.....	6
4.3. Vers le MMP.....	8
5. Positivité des fibrés en droites : le point de vue analytique.....	9
5.1. Métriques hermitiennes singulières.....	9
5.2. Cônes de courants et classes de cohomologie.....	10
Partie III. La théorie L^2 et les méthodes modernes	11
6. Idéaux multiplicateurs et grands théorèmes.....	11
7. L'exposant de singularité complexe.....	12
Références.....	14

INTRODUCTION

Dans les lignes qui vont suivre, nous allons parler de géométrie algébrique complexe et de géométrie analytique complexe, en utilisant la notion centrale de positivité pour fédérer comme pour distinguer ces deux points de vue sur la géométrie complexe. Au fond, il s'agit des mêmes objets que l'on désire étudier dans ces deux domaines, mais les méthodes utilisées, si elles peuvent parfois s'avérer semblables, sont souvent fondamentalement différentes.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude envers Sébastien Boucksom, Olivier Debarre et Andreas Höring pour leur enseignement auquel ces modestes notes doivent beaucoup. Je tiens à remercier particulièrement Sébastien Boucksom pour m'avoir fait découvrir la richesse du monde complexe.

PARTIE I

GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE COMPLEXE

Le point de départ de la géométrie algébrique (resp. analytique) complexe est l'étude des systèmes d'équations polynomiales (resp. holomorphes), donnant lieu à des objets fondamentaux appelés variétés. Aujourd'hui, il existe deux théories géométriques bien distinctes, dont les objets sont pour l'une les variétés algébriques complexes (ou encore schémas séparés intègres de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{C})$) munies de la topologie de Zariski habituelle et de leur faisceau structural des fonctions régulières, et pour l'autre les variétés analytiques avec leur faisceau structural des fonctions holomorphes, jouissant de deux topologies possibles : la topologie usuelle de la géométrie différentielle et la topologie de Zariski holomorphe — plus rarement utilisée cependant.

1. La notion de diviseur en géométrie algébrique

C'est une notion fondamentale, et à ce titre, elle admet beaucoup d'interprétations différentes et intéressantes. On se souvient que lors de l'étude des surfaces de Riemann (variétés holomorphes de dimension 1), le terme de diviseur réfère à une somme formelle finie de points de la variété, et c'est avec cette notion (munie de son interprétation en termes de fibrés en droites) qu'on peut exprimer le théorème de Riemann-Roch, point d'orgue de la théorie :

$$h^0(X, L) - h^1(X, L) = \deg L + 1 - g(X)$$

pour tout fibré en droites L sur X une surface de Riemann compacte.

C'est cette notion là de diviseur que l'on voudrait généraliser aux variétés algébriques quelconques. En ce sens, on va définir un diviseur (qui sera dit de Weil) sur une variété algébrique normale (les anneaux locaux sont intégralement clos) comme une somme formelle d'hypersurfaces (sous-schémas fermés intègres de codimension 1). Dans un contexte très général, cette notion n'est pas très pratique à manipuler, et on préfère définir les diviseurs de Cartier, qui sont donnés par des équations locales dans le corps des fonctions (plus précisément, un diviseur de Cartier est une section globale de $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$). Cependant, dans un cadre un peu plus restreint (variétés localement factorielles, par exemple les variétés lisses), les notions de diviseurs de Cartier et de Weil coïncident.

Pourquoi introduire les diviseurs? Beaucoup de réponses sont possibles, mais disons qu'une bonne raison est que sur les variétés projectives irréductibles par exemple, il n'y a pas de fonctions globalement définies non constantes. Alors, au lieu de demander des « vraies » fonctions, on peut demander des fonctions dont la valeur en tant que nombre complexe n'est pas bien définie, mais dépend de la trivialisation ; en revanche, la notion de zéro ou de pôle de telles fonctions est bien définie. En termes plus mathématiques, on regarde les sections globales de fibrés non triviaux, et pour des bons fibrés — la notion de positivité n'est pas loin ! — on aura des espaces de sections non nuls, et même parfois très gros !

Parlons maintenant un peu du faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ associé à un diviseur de Cartier D . Une manière très commode de voir $\mathcal{O}_X(D)$ est de définir ses germes comme étant les fonctions $s \in K(X)$ telles qu'au point considéré, $\text{div}(s) + D \geq 0$. Vu comme faisceau inversible, il est localement égal à $f_i^{-1}\mathcal{O}_X$ où f_i^{-1} est une équation locale de D , et vu comme fibré en droites, il admet donc une section méromorphe (correspondant à la fonction constante 1) de diviseur égal à D précisément. Si D est effectif, alors la section est bien sûr régulière, et on a ainsi réussi à construire une « fonction » à zéros fixés (avec multiplicité).

Inversement, tout fibré en droites E admettant une section globale méromorphe non nulle s est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_X(\text{div}(s))$ via $f \in \mathcal{O}_X(\text{div}(s))(U) \mapsto fs$.

Ainsi apparaît naturellement la classe des fibrés en droites admettant une section méromorphe non nulle. En général, cette classe ne contient pas tous les faisceaux inversibles sur un schéma général, mais c'est le cas dans beaucoup de situations, comme dans la notre (schémas intègres et schémas projectifs par exemple). En effet, dans le premier cas, il est facile de voir que tout faisceau inversible se réalise comme sous-faisceau du faisceau constant des fonctions méromorphes, et alors on peut

facilement construire explicitement un diviseur de Cartier D tel que le faisceau inversible en question soit isomorphe à $\mathcal{O}_X(D)$.

Dès lors, on a un isomorphisme de groupe donné par $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$, entre les classes de diviseurs de Cartier (modulo l'équivalence linéaire) et les classes de faisceaux inversibles (modulo isomorphisme) encore appelé groupe de Picard et noté $\text{Pic}(X)$.

Il apparaît donc ici une différence importante entre les géométries algébrique et analytique : certains fibrés en droites analytiques peuvent ne pas avoir de sections méromorphes (montrer l'existence de fonctions méromorphes sur une variété complexe — ou plus généralement sur un fibré en droites — est toujours difficile, c'est d'ailleurs l'étape principale du théorème de Riemann-Roch pour les surfaces de Riemann), cette différence par rapport au cas algébrique provenant essentiellement des natures opposées des topologies de Zariski et usuelle.

Pour finir cette partie sur l'objet $\mathcal{O}_X(D)$, remarquons que ce dernier possède à la fois un aspect géométrique ou divisoriel (somme formelle d'hypersurfaces) et un aspect algébrique ou faisceautique (fibré en droites), ce qui fait qu'on peut « restreindre D à D » ! C'est en ce sens qu'il faut considérer la suite exacte fondamentale, pour D une hypersurface, exprimant que l'idéal du sous-schéma fermé localement principal associé à l'hypersurface D est $\mathcal{O}_X(-D)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_D(D) \longrightarrow 0$$

2. Fibrés en droites holomorphes et métriques hermitiennes

On quitte provisoirement le monde des schémas pour celui des variétés holomorphes. Il existe un objet, qui a priori ne provient pas particulièrement de la géométrie complexe mais plutôt de la géométrie différentielle, et qui revêt une importance capitale lorsque les structures sous-jacentes sont holomorphes ; il s'agit des métriques sur un fibré vectoriel. Typiquement, elles se construisent localement dans des trivialisations, puis se globalisent grâce à des partitions de l'unité. Ce sont donc des objets $\mathcal{C}^\infty$ et sûrement pas analytiques !

Mais dans le cas où le fibré (E, h) est holomorphe, on dispose d'un opérateur de dérivation $\bar{\partial}_E$, de la connexion de Chern D_h , et de sa courbure Θ_h . Ce dernier tenseur, qu'on peut voir comme une $(1, 1)$ -forme fermée dans le cas d'un fibré en droites, est l'objet caractéristique pour l'étude du fibré en question (et donc par extension de la variété sous-jacente).

Par commodité, on préfère parfois considérer l'objet local associé à la métrique (ou sa courbure) : si $\tau : L|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}$ est une trivialisatation du fibré en droites L , on peut écrire, pour $x \in U$ et $v \in L_x$, $h_x(v) = |\tau(v)|^2 e^{-2\varphi(x)}$, ce qui définit localement une fonction lisse φ (c'est au signe près le logarithme de la norme de la section 1 dans la trivialisatation), appelée poids de la métrique h .

Nous avons expliqué heuristiquement pourquoi l'étude des diviseurs ou fibrés en droites sur une variété devrait nous renseigner sur la variété elle-même. Un des paradigmes majeurs de ce principe est le théorème de plongement de Kodaira que nous allons expliquer maintenant.

On se donne un fibré en droites (L, h) holomorphe hermitien sur une variété complexe X ; on dit que ce dernier est à courbure positive si la forme de courbure $i\Theta_h = i\partial\bar{\partial}\varphi$ définit un produit hermitien sur TX , ou encore, en coordonnées, en écrivant $\Theta_h = \sum \omega_{j,k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, si la matrice hermitienne $(\omega_{j,k})$ est définie positive. Notons au passage que $i\Theta_h$ induit dans ce cas une métrique de Kähler sur X . Enfin, on dit que L est positif s'il existe une métrique hermitienne h sur L telle que (L, h) soit à courbure positive.

Théorème 2.1 (Kodaira). — *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors un fibré en droites holomorphe sur X est positif si et seulement s'il est ample.*

Ce théorème est assez frappant à vrai dire, car il relie directement une condition géométrique sur une variété (son caractère projectif) à une condition de positivité de fibré en droites.

Remarque 1.

En un sens la condition est licite, car si Θ_h est positive, alors L ne peut pas avoir de métrique à courbure négative : la classe de cohomologie $[\Theta_h]$ ne dépend pas de h (c'est à un coefficient près la (première) classe de Chern de L), et son intégrale est strictement positive.

Voilà donc notre premier contact — fructueux qui plus est — avec la notion de positivité, du point de vue des formes différentielles. Bien sûr, nous y reviendrons en détail dans la partie suivante.

3. Faisceaux cohérents et principe GAGA

Cette partie est un résumé très bref du principe GAGA (Géométrie Algébrique - Géométrie Analytique), et nous ne ferons qu'expliquer l'énoncé fondamental du théorème de Serre.

Le problème naïf naturel est le suivant : soit X une variété complexe (holomorphe), peut-on trouver des équations locales polynomiales définissant la même variété ?

Pour formaliser cette question, il faut savoir construire une « variété complexe analytique » à partir d'une variété algébrique complexe. Mais pour cela, il faut une bonne notion de variété analytique singulière, donc à la fois une bonne topologie et des bons faisceaux. Et cette notion, c'est celle d'*espace analytique complexe*, à savoir un espace topologique $\mathfrak{X}$ muni d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, qui soit localement isomorphe en tant qu'espace annelé à un espace du type $(Y, \mathcal{O}_Y)$ où Y est un fermé usuel du polydisque unité D de $\mathbb{C}^n$, ensemble des zéros communs à des fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_r$, et où $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_D / (f_1, \dots, f_r)$ avec $\mathcal{O}_D$ désignant le faisceau des germes de fonctions analytiques sur D .

On peut alors construire un foncteur h (pour holomorphe) de la catégorie des schémas de type fini sur $\mathbb{C}$ vers la catégorie des espaces analytiques complexes, et on notera X_h l'espace analytique associé au schéma X . De manière similaire, on peut associer à tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}_h$ sur X_h , et définir pour tout entier $q \geq 0$ une application naturelle

$$\alpha_q : H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_h, \mathcal{F}_h)$$

entre les groupes de cohomologie définis par foncteur dérivé.

Alors, on peut se demander si le foncteur h induit une équivalence de catégories pour les faisceaux, ce qui répondrait à notre problème (dans le cadre plus général d'une sous-variété $Y \subset X$) en prenant un faisceau du type $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y$. Il se trouve que ce n'est pas le cas en général, mais le théorème de Serre nous dit qu'il suffit de se restreindre à la classe des schémas projectifs pour que la question ait une réponse positive :

Théorème 3.1 (Serre). — *Soit X un schéma projectif sur $\mathbb{C}$. Alors le foncteur h induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celle des faisceaux analytiques cohérents sur X_h . De plus, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X , les applications naturelles $\alpha_q : H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_h, \mathcal{F}_h)$ sont des isomorphismes pour tout entier q .*

Ainsi, pour tout sous-espace analytique compact $\mathfrak{X}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, il existe un sous-schéma $X \subset \mathbb{P}^n$ tel que $X_h = \mathfrak{X}$. Ce résultat, dû initialement à Chow, s'inscrit dans les nombreuses conséquences du principe GAGA.

Revenons à notre question de départ : partant d'une variété complexe compacte, existe-t-il sur cette dernière une structure de variété algébrique ? Via le principe GAGA, ce sera le cas si la variété de départ est projective, et la question de la projectivité des variétés complexes apparaît alors comme fondamentale. D'ailleurs, c'est une question toujours difficile de savoir si une variété compacte donnée est projective (cf par exemple le difficile théorème de plongement de Kodaira). Très succinctement, nous allons présenter quelques résultats importants.

Tout d'abord, on sait depuis Riemann que toute variété complexe compacte de dimension 1, ou encore surface de Riemann, est projective, et plus précisément se plonge dans $\mathbb{P}^3$.

En ce qui concerne la dimension 2, un résultat de Chow et Kodaira montre qu'une condition suffisante de projectivité est l'existence de deux fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Cette dernière condition est naturelle en fait : si une variété complexe $\mathfrak{X}$ provient d'une variété algébrique X via le foncteur h , alors le corps des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{X}$ est isomorphe au corps des fonctions rationnelles de X , donc ils ont en particulier même degré de transcendance, égal à la dimension de X . D'où l'idée d'étudier particulièrement les variétés compactes ayant un corps de fonctions méromorphes de degré de transcendance maximal (c'est un théorème de Siegel, Remmert et Thimm que $K(\mathfrak{X})$ a un degré de transcendance toujours inférieur à $\dim \mathfrak{X}$) égal à la dimension de la variété : ce sont les variétés de Moishezon.

Moishezon a démontré que de telles variétés deviennent projectives après un nombre fini d'éclatements de centre lisse ; en particulier, elles sont biméromorphes à une variété projective. Pour finir, mentionnons un autre résultat de Moishezon affirmant que lorsqu'on impose à ces variétés d'être kähleriennes, elles sont automatiquement projectives.

PARTIE II

NOTIONS DE POSITIVITÉ EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

En géométrie complexe, on étudie particulièrement les hypersurfaces et les courbes, ou plus généralement par les diviseurs et les 1-cycles. On peut chercher à mettre ces deux objets en dualité ; c'est un des buts de la théorie de l'intersection. Alors, on obtient des quantités *réelles*, et c'est leur signe qui va nous intéresser.

4. Positivité des diviseurs : le point de vue algébrique

4.1. Théorie de l'intersection. — La première chose à faire, c'est donc de définir l'« intersection » au sens algébrique. L'idée, c'est que le produit $(H \cdot C)$ d'une hypersurface et d'une courbe doit être le nombre de points d'intersection entre ces deux objets lorsqu'ils se coupent transversalement. Jusque là, on n'obtient que des nombres (entiers) positifs.

Pour les surfaces projectives lisses X par exemple, diviseurs et 1-cycles sont la même chose, et pour deux courbes (sous-schémas fermés intègres de dimension 1) C et D distinctes, il faut prendre en compte la multiplicité. Une solution possible est de recourir à la structure de schéma fini de l'intersection $C \cap D := \text{Spec}(\prod_x \mathcal{O}_{C \cap D, x})$ (x varie dans l'intersection ensembliste finie $C \cap D$) en définissant $\mathcal{O}_{C \cap D, x} = \mathcal{O}_{X, x} / (f, g)$ où f (resp. g) est un générateur de l'idéal de C (resp. D) en $x \in C \cap D$. Alors, on pose

$$(C \cdot D) = h^0(X, \mathcal{O}_{C \cap D}).$$

Se pose alors la question du sens à donner à $(C \cdot C)$; l'idée est de définir un produit d'intersection (bilinéaire) pour les classes d'équivalence linéaire de diviseurs (ou de courbes ici) : c'est licite car on peut vérifier que $(C \cdot D) = \deg \mathcal{O}_C(D)$, qui par symétrie ne dépend que des classes de C et D . Alors, on remplace C par un diviseur linéairement équivalent qui ne possède pas C dans son support, et le tour est joué. De manière surprenante, on va alors trouver des courbes dont l'auto-intersection pourra être négative !

En guise d'application, voyons comment on peut montrer le théorème de Bézout avec ce langage. On se donne deux courbes de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ notées C et D , de degré respectif c et d . Rappelons qu'une hypersurface H de $\mathbb{P}^n$ est définie par un polynôme (irréductible) homogène P_H , dont le degré est par définition le degré de l'hypersurface. Alors, comme P_C/x_0^c est une fonction rationnelle, son diviseur $\text{div}(P_C) - c \text{div}(x_0) = C - c\{x_0 = 0\}$ est trivial, et donc C est linéairement équivalent à cH_0 où $H_0 = \{x_0 = 0\}$. Or, H_0 est linéairement équivalent à $H_1 = \{x_1 = 0\}$, et donc $(H_0^2) = (H_0 \cdot H_1) = 1$ car H_0 et H_1 se rencontrent transversalement au point $[0 : 0 : 1]$. Ceci montre que $(C \cdot D) = (cH_0 \cdot dH_0) = cd(H_0^2) = cd$ ce qu'il fallait montrer.

Pour passer au cas général des variétés projectives, il existe essentiellement deux méthodes, l'une purement algébrique, et l'autre provenant de la géométrie différentielle. Nous allons présenter brièvement les deux.

- La première possibilité consiste à prendre $D_1, \dots, D_n$ ($n = \dim X$) des diviseurs que l'on voit comme fibrés en droites, et de définir $(D_1 \cdot \dots \cdot D_n)$ comme étant l'intégrale

$$\int_X c_1(\mathcal{O}_X(D_1)) \wedge \dots \wedge c_1(\mathcal{O}_X(D_n))$$

où les $c_1(\mathcal{O}_X(D_i))$ sont les classes de Chern des fibrés, donc des $(1, 1)$ formes réelles provenant de la cohomologie $H^2(X, \mathbb{Z})$; le produit d'intersection ainsi défini est bien à valeurs entières, et ne dépend bien sûr que de la classe d'équivalence linéaire des D_i . Enfin, on peut vérifier que si les D_i se rencontrent transversalement, alors la quantité calculée correspond bien au nombre de points d'intersection. Quant au produit d'un diviseur et d'une courbe (étendu aux 1-cycles par bilinéarité), la définition est très naturelle :

$$(D \cdot C) = \int_C c_1(\mathcal{O}_X(D)).$$

- Étudions maintenant l'approche algébrique : soient $D_1, \dots, D_r$ des diviseurs de Cartier sur X projective. Alors un théorème garantit que la fonction $(m_1, \dots, m_r) \mapsto \chi(X, m_1 D_1 + \dots + m_r D_r)$ coïncide sur $\mathbb{Z}^r$ avec un polynôme à coefficients rationnels de degré majoré par $\dim X$. Alors, si

$r = n = \dim X$, on définit $(D_1 \cdot \dots \cdot D_r)$ comme le coefficient dominant en $m_1 \cdots m_r$ de ce polynôme. Ainsi, on a :

$$\chi(X, mD) = m^n \frac{(D^n)}{n!} + O(m^{n-1}).$$

Il est important de noter que $(D_1 \cdot \dots \cdot D_r)$ est multilinéaire en les D_i , à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D_i .

L'importance de la théorie de l'intersection est qu'elle permet de reformuler de manière simple et efficace des notions géométriques subtiles. En voici un exemple typique, et très important :

Théorème 4.1 (Nakai-Moishezon). — *Un diviseur de Cartier D sur une variété projective X est ample si et seulement si pour toute sous-variété intègre $Y \subset X$ de dimension r , on a*

$$((D|_Y)^r) > 0.$$

Ce critère se généralise évidemment aux $\mathbb{Q}$ -diviseurs de Cartier amples, mais aussi aux $\mathbb{R}$ -diviseurs amples (c'est à dire des combinaisons réelles positives de diviseurs de Cartier amples) ; c'est un théorème de Campana et Peternell. Il suggère une définition, qui aurait du mal à trouver une formulation purement géométrique ou cohomologique :

Définition 4.2. — Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective X . On dit que D est numériquement effectif (*nef* en abrégé) si pour toute sous-variété intègre $Y \subset X$ de dimension r , on a $((D|_Y)^r) \geq 0$.

On peut vérifier que la notion de diviseur nef est plus stable que l'amplitude : par exemple, le tiré en arrière d'un diviseur nef est nef, la somme de deux diviseurs nef est nef, la somme d'un ample et d'un nef est ample...

Revenons maintenant à notre objectif de départ qui était de définir un accouplement entre 1-cycles et diviseurs ; si plus généralement on se donne l'image $f : C \rightarrow X$ d'une courbe projective sur X projective, et si D est un diviseur sur X , alors on pose $(D \cdot C) = \deg(f^*D)$ où l'on réalise D comme faisceau inversible pour pouvoir le tirer en arrière.

Mentionnons pour finir une propriété souvent utilisée, à savoir la formule de projection : si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme entre variétés projectives, et si C est une courbe sur X et D un diviseur de Cartier sur Y , alors

$$(\pi^*D \cdot C) = (D \cdot \pi_*C)$$

où $\pi_*C = \deg(C \xrightarrow{\pi} \pi(C)) \pi(C)$ si $\pi(C)$ est une courbe — C étant propre sur $\mathbb{C}$, son image est fermée et irréductible, c'est donc soit une courbe, soit un point —, et 0 sinon (si π n'est pas fini, alors par définition, $\deg(\pi) = 0$).

4.2. Cônes de diviseurs. — On peut maintenant considérer une nouvelle relation d'équivalence sur les diviseurs (de Cartier, comme toujours) d'une variété projective, plus faible que l'équivalence linéaire ; c'est l'équivalence numérique :

$$D \equiv_{\text{num}} D' \iff \forall C, \quad (D \cdot C) = (D' \cdot C)$$

où C désigne une courbe intègre.

On notera $N^1(X)_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des classes d'équivalences numériques de diviseurs, et $N_1(X)_{\mathbb{Z}}$ celui des courbes (avec une définition semblable), ce qui fait du produit d'intersection une forme bilinéaire réelle non dégénérée entre $N^1(X)_{\mathbb{R}} = N^1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ et $N_1(X)_{\mathbb{R}} = N_1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$. Enfin, un objet important est le cône des courbes, noté $\text{NE}(X)$, engendré — comme cône — par les classes $[C]$ de courbes intègres. Par la suite, nous prenons le parti de considérer principalement l'espace $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ plutôt que son dual ; bien sûr, beaucoup de résultats que l'on mentionnera s'y transposent, mais il se trouve que le point de vue divisoriel est plus efficace, notamment lorsqu'on veut généraliser certains énoncés au cas singulier, ce qui est crucial pour le MMP (Minimal Model Program) entre autres.

Quel est l'intérêt d'introduire cette nouvelle relation d'équivalence ?

Tout d'abord, et c'est très important, comme $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ se réalise dans $H^2(X, \mathbb{R})$ (en effet, la première classe de Chern donne un morphisme $N^1(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ et deux fibrés en droites de même classe de Chern sont numériquement équivalents), c'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de *dimension finie*. Ainsi, on va disposer d'une bonne notion de compacité, pouvoir considérer plus facilement des cônes convexes

(c'est l'objet caractéristique de la notion de positivité)...

D'autre part, un certain nombre de propriétés des diviseurs (amplitude, caractère nef/gros) sont des propriétés numériques (ie si un diviseur vérifie cette propriété, tous les diviseurs qui lui sont numériquement équivalents la vérifient aussi), et pour les deux premières par exemple, elle se *vérifient* numériquement :

Théorème 4.3. — Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective X .

- (i) D est nef si et seulement si pour toute courbe intègre C , on a $(D \cdot C) \geq 0$.
- (ii) D est ample si et seulement si pour tout $z \in \overline{\text{NE}}(X) \setminus \{0\}$, on a $(D \cdot z) > 0$.

Le deuxième point est connu sous le nom de critère de Kleiman, et toute la subtilité réside dans le fait qu'il ne suffit pas de prendre l'intersection avec les courbes entières pour vérifier l'amplitude. Cependant, on conjecture que c'est suffisant dans le cas particulier où $D = K_X$ est le fibré canonique de X . Une conséquence facile de ce résultat est que le tiré en arrière d'un faisceau ample par un morphisme fini est encore ample.

On voudrait maintenant introduire une autre notion de positivité, numérique elle aussi, traduisant l'abondance des sections d'un fibré (ou plutôt d'une de ces puissances) :

Proposition 4.4. — Soit D un diviseur de Cartier sur une variété projective X de dimension n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) On a $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{h^0(X, mD)}{m^n} > 0$;
- (ii) Un multiple de D est linéairement équivalent à $A + E$ avec A ample et E effectif;
- (iii) Un multiple de D est numériquement équivalent à $A + E$ avec A ample et E effectif;
- (iv) L'application $\varphi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes m}))$ définie par $L^{\otimes m}$ est birationnelle sur son image pour un certain $m > 0$.

Définition 4.5. — Si D vérifie les propriétés de la proposition précédente, on dit que D est gros (ou big).

Lorsque D est nef, une version raffinée du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch donne l'estimation asymptotique $h^0(mD) = \frac{(D^n)}{n!} m^n + O(m^{n-1})$, et ainsi un diviseur nef est gros si et seulement si $(D^n) > 0$. En particulier, le tiré en arrière d'un diviseur nef et gros par un morphisme génériquement fini et surjectif est encore nef et gros.

D'autre part, toujours pour D gros, si la variété X est normale, alors sous l'hypothèse que l'anneau de sections $R(X, D) = \bigoplus_{m=0}^{+\infty} H^0(X, mD)$ est de type fini, on peut montrer que X est birationnelle à une variété projective normale X_D où D « devient » ample. Notons que l'hypothèse de finitude de l'anneau de sections n'est pas gratuite, loin de là, mais qu'elle est garantie par exemple si D est semi-ample, ce qui par définition signifie que pour des m suffisamment divisibles, mD est globalement engendré.

Pour clarifier les relations entre ces diverses notions, on note $\text{Amp}(X)$, $\text{Nef}(X)$, $\text{Big}(X)$, $\text{Eff}(X)$ les cônes ample, nef, gros et effectif de X respectivement. Par définition, ce sont les cônes convexes réels engendrés par les classes numériques de diviseurs amples, nef, etc. Alors on a :

- $\overline{\text{Amp}(X)} = \text{Nef}(X)$;
- $\text{Amp}(X) = \text{Int}(\text{Nef}(X))$;
- $\text{Big}(X) = \text{Int}(\text{Eff}(X))$;
- $\overline{\text{Big}(X)} = \overline{\text{Eff}(X)}$ s'appelle le cône pseudo-effectif, et est noté $\text{Pseff}(X)$;
- $\text{Big}(X) = \text{Int}(\text{Pseff}(X))$.

Depuis peu, on dispose d'une caractérisation du type critère de Kleiman pour les diviseurs pseudo-effectifs :

Théorème 4.6 (Boucksom-Demailly-Păun-Peternell, 04). — Soit D un $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier sur une variété projective lisse X .

Alors D est pseudo-effectif si et seulement si $(D \cdot C) \geq 0$ pour toute courbe intègre C telle que C est dans une famille couvrante, ie $C \in (C_t)_{t \in T}$, $\bigcup_{t \in T} C_t = X$.

4.3. Vers le MMP. — Nous allons maintenant conclure cette partie par une série de théorèmes qui se déduisent (non sans mal!) les uns des autres. Ces résultats seront une des multiples preuves que les objets introduits sont intéressants à étudier, et ils achèveront ainsi de montrer l'efficacité du point de vue de la positivité en géométrie algébrique.

Le but majeur de la géométrie étant de comprendre les variétés, il nous faut donc comprendre les morphismes de variétés, et en particulier les morphismes vers $\mathbb{P}^N$. Un des outils majeurs, et intensivement développé dans ce texte, est la notion de fibré en droites ou de diviseur ; en effet, ces derniers permettent de définir des applications rationnelles vers $\mathbb{P}^N$, et il est donc naturel de s'intéresser aux diviseurs amples (tout grand multiple induit un plongement), semi-amples (des grands multiples induisent un morphisme), gros (un multiple induit une application birationnelle sur son image)...

Alors pour toutes ces classes de diviseurs, on va chercher des théorèmes d'annulation (ou de prolongement), ou encore des théorèmes garantissant l'absence de point base. Nous énoncerons ces résultats dans le cas lisse, même si aujourd'hui ils admettent des versions singulières (sous des hypothèses de type klt) qui sont très utilisées dans le programme du modèle minimal (MMP) :

Théorème 4.7 (Kawamata-Viehweg). — *Soit X une variété projective lisse, A un $\mathbb{R}$ -diviseur de Cartier nef et gros tel que $A - [A]$ soit à croisements normaux simples. Alors :*

$$\forall q > 0, \quad H^q(X, K_X + [A]) = 0.$$

Théorème 4.8 (Base-point-free, Kawamata). — *Soit X une variété projective lisse, D un diviseur de Cartier nef tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $aD - K_X$ soit nef et gros. Alors pour tout m suffisamment grand, $|mD|$ est sans point base.*

Un autre théorème fondamental est donnée par le théorème du cône de Mori, qui décrit (partiellement) la structure du cône fermé des courbes pour une variété projective lisse en terme de rayons extrémaux.

Théorème 4.9 (Théorème du cône de Mori). — *Soit X une variété projective lisse, il existe une famille dénombrable de courbes rationnelles $(\Gamma_i)_{i \in I}$ sur X telles que*

$$0 < (-K_X \cdot \Gamma_i) \leq \dim X + 1$$

et

$$\overline{\text{NE}}(X) = \overline{\text{NE}}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} \mathbb{R}^+ [\Gamma_i],$$

où les $\mathbb{R}^+ [\Gamma_i]$ sont tous les rayons extrémaux qui rencontrent $N_1(X)_{K_X < 0}$; ces rayons sont de plus localement discrets dans le demi-espace $K_X < 0$.

Mentionnons pour finir que le base-point-free (appliqué à un diviseur d'appui) garantit pour tout rayon extrémal $R = \mathbb{R}^+ [\Gamma]$ l'existence d'une contraction élémentaire de Mori $c_R : X \rightarrow Y$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telle que Y est normale, c_R est à fibres connexes, et que l'on a :

- $(K_X \cdot \Gamma) < 0$;
- Pour toute courbe intègre C de X , c_R contracte C si et seulement si $[C] \in R$;
- On a la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Pic}(Y) & \xrightarrow{c_R^*} & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & L & \longmapsto & (L \cdot C) \end{array}$$

La dernière condition exprime qu'un fibré de X est d'intersection nulle avec le rayon R si et seulement s'il provient d'un fibré sur Y . Quant à la flèche injective, elle est automatique par la formule de projection vu que c_R est à fibres connexes.

Le fait que l'on puisse contracter les rayons extrémaux (ou même les faces extrémales) K_X -négatifs constitue un point clé du MMP : l'idée générale est la recherche d'un modèle birationnel de X (variété normale) dit minimal, ou encore tel que K_X soit nef. Un tel modèle $X_{\min}$ vérifie que tout morphisme birationnel $X_{\min} \rightarrow Y$ est en fait un isomorphisme. Alors, partant de X , si K_X n'est pas nef, on applique les résultats précédents pour obtenir une variété normale Y (un problème majeur est que Y n'est pas forcément lisse même si X l'est) ; alors soit $\dim Y < \dim X$ et on décide de s'arrêter, soit la dimension est préservée, auquel cas on essaye d'appliquer à nouveau notre procédé à Y . Sans rentrer dans les détails, ceci n'est pas toujours possible à cause des singularités éventuelles de Y .

En fait, en acceptant dans notre cadre des variétés à singularités « modérées », le procédé décrit est en fait toujours défini (c'est un résultat récent connu sous le doux nom de BCHM — pour Birkar, Cascini, Hacon et McKernan). Quant à la terminaison du processus, c'est encore une autre question, partiellement résolue à l'heure actuelle.

5. Positivité des fibrés en droites : le point de vue analytique

5.1. Métriques hermitiennes singulières. — On va maintenant aller un peu plus loin en ce qui concerne les métriques hermitiennes sur un fibré en droites holomorphe. En géométrie différentielle, voire dans certaines parties de la géométrie holomorphe, on ne travaille qu'avec des variétés lisses (la raison étant, en géométrie différentielle, que les zéros de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pouvant être n'importe quel fermé) à moins justement d'étudier des phénomènes de type catastrophes. Pour contourner cette contrainte, on considère le point de vue dual au point de vue géométrique, à savoir le point de vue fonctionnel. En effet, il est plus facile de manipuler des fonctions non lisses que des variétés singulières, a priori. Cette idée générale a été appliquée par Demailly aux fibrés en droites holomorphes dans les années 90, c'est l'objet de la définition suivante :

Définition 5.1. — Soit L un fibré en droites holomorphe sur une variété X . Une métrique singulière sur L est une métrique h qui est donnée dans toute trivialisation $\tau : L|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{C}$ par :

$$h(v) = |\tau(v)|^2 e^{-2\varphi(x)}, \quad x \in U, v \in L_x$$

où $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(U)$ est une fonction arbitraire, appelée poids de la métrique h relativement à la trivialisation τ .

La fonction poids φ est un objet local, et si f est un changement de trivialisation, on a $\varphi' = \varphi + \log |f|$ avec f holomorphe non nulle. Ainsi, $\partial\bar{\partial}\varphi$ (calculé au sens des courants, ce qui est possible car φ est localement intégrable) ne dépend pas de la trivialisation, et définit une $(1,1)$ -forme fermée appelée courant de courbure de la métrique singulière h .

Si l'on veut éviter d'employer la terminologie des courants, on peut calculer $\partial\bar{\partial}\varphi$ en approximant φ par des fonctions lisses ψ_n , calculer $\partial\bar{\partial}\psi_n$, puis par continuité faible des opérateurs différentiels, il suffit de prendre la limite au sens faible pour obtenir $\partial\bar{\partial}\varphi$.

Il est approprié d'introduire ici la notion de fonction psh. Pour cela, rappelons nous qu'une métrique lisse h de poids local (lisse) φ est à courbure positive si la forme différentielle $i\partial\bar{\partial}\varphi$ induit une métrique hermitienne sur TX . L'analogue singulier de cette notion est précisément la plurisousharmonicité :

Définition 5.2. — Soit φ une fonction semi-continue supérieurement sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, et localement intégrable. Alors φ est dite plurisousharmonique (psh) si pour tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et tout point $a \in \Omega$, la distribution

$$Hu(\lambda) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a) \lambda_i \bar{\lambda}_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est une mesure positive.

Il est facile de voir que l'on peut définir la notion de fonction psh sur une variété. Les exemples les plus simples de fonctions psh sont de la forme $\log \sum |f_i|^2$ où les f_i sont des fonctions holomorphes. Ainsi, avec des sections globales non nulles $s_1, \dots, s_r$ d'un certain fibré en droites, il est facile de définir une métrique singulière à courant de courbure positif — la notion de courant positif est bien sûr définie par dualité une fois celle des formes différentielles connue — par l'expression $\log \sum |s_i|^2$. Si les s_i forment un système linéaire sans point base (i.e. elles ne s'annulent pas en même temps), alors on obtient en fait une métrique lisse ; sinon, la métrique est singulière le long de l'ensemble analytique $\{s_1 = \dots = s_r = 0\}$.

La question naturelle à se poser est : pourquoi introduire ces objets singuliers ? Une partie de la réponse se situe dans le dictionnaire suivant, donné par Demailly, et qui montre que ces nouveaux concepts fournissent un bon cadre pour développer une théorie analytique de la positivité, donnant ainsi un autre éclairage sur la théorie de l'intersection définie par l'intégration des classes de Chern. D'autres éléments de réponses viendront également au cours de la dernière partie, entièrement consacrée aux méthodes analytiques récentes (années 90) :

Théorème 5.3 (Demailly). — *Si L est un fibré holomorphe sur une variété projective X , et si ω est une métrique kählérienne, alors on a les propriétés suivantes :*

- $L \in \text{Pseff}(X) \iff L$ admet une métrique singulière h avec $\Theta_h \geq 0$;
- $L \in \text{Big}(X) \iff \exists \epsilon > 0$ tel que L admet une métrique singulière h avec $\Theta_h \geq \epsilon \omega$;
- $L \in \text{Nef}(X) \iff \forall \epsilon > 0, L$ admet une métrique lisse h avec $\Theta_h \geq -\epsilon \omega$;
- $L \in \text{Amp}(X) \iff \exists \epsilon > 0$ tel que L admet une métrique lisse h avec $\Theta_h \geq \epsilon \omega$.

5.2. Cônes de courants et classes de cohomologie. — A ce stade, on peut penser à changer un peu notre point de vue par rapport à l'approche algébrique. Au lieu de penser en termes de diviseurs ou de fibrés en droites, on va plutôt penser en termes de classes de Chern de fibrés, ou plus généralement en termes de classes de cohomologie de courants. Pour cela, il faut quand même effectuer quelques vérifications : d'abord, qu'un fibré en droites est numériquement trivial si et seulement si sa classe de Chern est nulle (un sens étant évident), ensuite, que la notion de diviseur effectif garde un sens, et aussi qu'en raisonnant sur ces classes de cohomologie, on ne traite pas avec des objets sans liens avec des fibrés en droites.

Le premier point est loin d'être évident. En fait, un résultat difficile établit qu'un fibré en droites est numériquement trivial si et seulement si une de ces puissances est algébriquement trivial, *ie* est une déformation (au-dessus d'une courbe lisse même) du fibré trivial. Mais alors, si la cohomologie des faisceaux cohérents n'est pas conservée par déformation, celle pour le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}$ (ou $\underline{\mathbb{R}}$) l'est car c'est un invariant topologique, et le théorème d'Ehresmann nous dit qu'une telle déformation est triviale au sens différentiel donc topologique.

Pour le deuxième point, on utilise la formule de Lelong-Poincaré pour f une fonction holomorphe sur une variété : $\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \log |f|^2 = [\text{div}(f)]$, où $[D]$ est le courant défini par linéarité, égal lorsque D est une hypersurface analytique H au courant d'intégration sur H . Plus précisément, $\langle [H], u \rangle = \int_{H_{\text{reg}}} u$ pour u une $(n-1, n-1)$ -forme ; l'intégrale étant bien définie. De plus, $[H]$ définit ainsi un courant de bidegré $(1, 1)$ fermé et positif. En se souvenant que courants et formes différentielles induisent la même cohomologie de de Rham, on déduit des résultats précédents la formule

$$c_1(\mathcal{O}_X(D)) = [D] \quad (\text{en cohomologie})$$

et en particulier, si D est effectif, alors $c_1(\mathcal{O}_X(D))$ est bien représentée par un courant positif.

Quant au dernier point, le théorème de Lefschetz nous garantit que sur une variété complexe X , une classe de cohomologie entière (*ie* dans l'image du morphisme $H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$) induit par l'inclusion de faisceaux $\underline{\mathbb{Z}} \subset \underline{\mathbb{R}}$ est la classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe si et seulement si elle est de type $(1, 1)$. Ainsi, le bon espace de cohomologie à regarder est le groupe dit de Néron-Severi :

$$\text{NS}(X) = H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) / \text{tors} \subset H^2(X, \mathbb{R}),$$

et plus précisément, c'est l'espace vectoriel $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}} = \text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$ qui va jouer le rôle de $N^1(X)_{\mathbb{R}}$; abstraitement, ce sont les mêmes espaces, mais c'est la manière de les réaliser qui est différente dans ces deux approches.

Ainsi, on a une bonne correspondance entre les cônes de diviseurs et les cônes de classes de cohomologie *entières*. L'avantage du point de vue cohomologique est qu'il se généralise facilement au contexte analytique des variétés kählériennes compactes : au lieu de considérer des combinaisons réelles de classes entières, on va considérer directement des classes $(1, 1)$ réelles de courants. Alors, on prendra pour définition des notions de positivité usuelles celles données par le théorème de Demailly en termes de métriques (éventuellement singulières) en les convertissant en termes de courants ; par exemple, une classe $\{T\}$ est nef s'il existe pour tout $\epsilon > 0$, il existe un représentant lisse T_{ϵ} tel que $T_{\epsilon} \geq -\epsilon \omega$, et dire que la classe $\{T\}$ est pseudo-effective signifie qu'elle est représentée par un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$. Alors les cônes convexes nef et pseudo-effectif correspondants sont fermés dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$.

Avec cette terminologie, on peut même introduire un nouveau cône qui va jouer le rôle du cône ample pour une variété kählérienne compacte : c'est le cône de Kähler $K(X) \subset H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$, cône (ouvert) formé des classes de cohomologie de formes de Kähler. A priori, ce cône n'est pas contenu dans $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$, et même il se peut qu'il ne le rencontre pas (par le théorème de Kodaira, il se rencontrent

— nécessairement en un ouvert non vide de $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ — si et seulement si X est projective). Alors, il est très facile de voir que l'adhérence du cône de Kähler (dans $H_{\mathbb{R}}^{1,1}$) est le cône nef. Un des résultats majeurs concernant le cône de Kähler est dû à Demailly et Păun, et constitue une sorte de généralisation du théorème de Nakai-Moishezon :

Théorème 5.4 (Demailly-Păun, 01). — *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors le cône de Kähler de X est l'une des composantes connexes de l'ensemble $\mathcal{P}$ des classes $\{\alpha\}$ de cohomologie réelles de type $(1,1)$ telles que pour tout ensemble analytique irréductible Y de dimension p , on ait :*

$$\int_Y \alpha^p > 0$$

De plus, dans le cas où X est projective, Demailly et Păun montrent que $\mathcal{P}$ est connexe, et obtiennent donc une caractérisation très concise des classes de Kähler générales, ie n'appartenant pas forcément à $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$. En revenant au cas kählérien compact, on peut en déduire plusieurs caractérisations semblables du cône nef, et montrer ainsi que le dual du cône nef est engendré par les classes de cohomologie des courants $[Y] \wedge \omega^{p-1}$ où Y est un ensemble analytique irréductible de dimension p , et où ω varie dans les classes de Kähler de X .

PARTIE III LA THÉORIE L^2 ET LES MÉTHODES MODERNES

Dans cette section, on abandonne véritablement l'approche purement algébrique pour se concentrer sur des méthodes intégrales. Ces dernières, propres à la géométrie analytique, fournissent des résultats très forts, dont certains n'ont à ce jour pas vraiment d'équivalent algébrique. Conceptuellement, l'outil donné par l'intégrale de Lebesgue permet d'étudier directement les propriétés des variétés, alors qu'en géométrie algébrique, on est bien souvent obligé de considérer des log-résolutions, pour ensuite, lorsque c'est possible, redescendre sur la variété de départ les propriétés établies en haut.

6. Idéaux multiplicateurs et grands théorèmes

Le point de départ consiste vraisemblablement à « résoudre le $\bar{\partial}$ ». Cette question générale de la résolution de l'équation $\bar{\partial}f = g$ pour g une forme $\bar{\partial}$ -fermée, est d'une grande importance en géométrie complexe ; beaucoup de résultats sont connus à ce sujet, mais en ce qui nous concerne, nous allons nous concentrer sur un résultat dû à Hörmander et Andreotti-Vesentini, mais dont la formulation actuelle — en particulier l'absence de l'hypothèse de complétude de la métrique — revient à Demailly :

Théorème 6.1. — *Soit (X, ω) une variété kählérienne de dimension n , supposée faiblement pseudo-convexe. On considère E un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière dont le poids local est noté $\varphi \in L_{\text{loc}}^1$. On suppose qu'au sens des courants, on a $i\Theta(E) = 2i \partial\bar{\partial}\varphi \geq \epsilon\omega$ pour un certain réel $\epsilon > 0$. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T_X^* \otimes E)$ vérifiant $\bar{\partial}_E g = 0$, il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T_X^* \otimes E)$ telle que*

$$\bar{\partial}_E f = g \quad \text{et} \quad \int_X |f|^2 e^{-2\varphi} dV_{\omega} \leq \frac{1}{q\epsilon} \int_X |g|^2 e^{-2\varphi} dV_{\omega}.$$

Certes, les notations sont compliquées, mais l'idée générale — ce que certains aiment à appeler la « philosophie » — est que pour des fibrés à courbure positive, on sait résoudre l'équation $\bar{\partial}f = g$ tout en contrôlant la norme L^2 de la solution f .

En géométrie, un certain nombre de résultats sont des théorèmes d'annulation de cohomologie ou plus précisément des théorèmes de prolongement (les deux sont liés bien sûr!). En fait, comme le théorème précédent le suggère, la bonne classe de fonctions à considérer est la classe des fonctions L^2 (on reste volontairement vague ici). On va donc, suivant Nadel, introduire un faisceau d'idéaux sur toute variété complexe, appelé faisceau d'idéaux multiplicateur.

Il est cependant intéressant de savoir que Nadel a introduit ces faisceaux en 1989, en même temps qu'il donnait son théorème d'annulation central, dans le but de donner un critère efficace d'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano.

Définition 6.2. — Soit X une variété complexe, φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset X$. Le faisceau d'idéaux multiplicateur associé à φ , $\mathcal{I}(\varphi)$, est formé des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{\Omega, x}$ telles que $|f|^2 e^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans des coordonnées locales quelconques près de x .

Ainsi, ce faisceau mesure les singularités de la fonction φ , et plus précisément, la variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ est l'ensemble des points au voisinage desquels $e^{-2\varphi}$ n'est pas intégrable.

D'autre part, Nadel a montré que ce faisceau est bien un faisceau cohérent d'idéaux, donc c'est un objet raisonnable au sens de la géométrie analytique. En particulier, on peut considérer la cohomologie à valeurs dans ce faisceau. Cela donne lieu, une fois réinterprété le théorème de résolution du $\bar{\partial}$ précédent en termes d'idéaux multiplicateurs, au théorème fondamental suivant :

Théorème 6.3 (Nadel). — Soit (X, ω) une variété kählérienne de dimension n , supposée faiblement pseudoconvexe. On considère E un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière de poids local φ . Supposons qu'il existe une fonction continue strictement positive ϵ sur X telle que $i\Theta(E) \geq \epsilon\omega$. Alors

$$\forall q > 0, \quad H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + E) \otimes \mathcal{I}(\varphi)) = 0.$$

Ce théorème peut être vu comme une généralisation naturelle du théorème de Kodaira ; mieux encore, Demailly a montré qu'on pouvait déduire le théorème de Kawamata-Viehweg du théorème de Nadel. D'autre part, le théorème de Nadel admet assez facilement des versions singulières, et en particulier, il permet la généralisation dans le langage des paires klt du théorème de Kawamata-Viehweg logarithmique.

On va finir cette partie en mentionnant un des multiples théorèmes d'extension L^2 que possède la géométrie complexe, celui-ci étant très certainement un des — voire le — plus important, au regard des myriades de résultats qui lui sont conditionnés. Bien sûr, il admet énormément de variantes (versions locales et globales, codimension 1 et codimension quelconque), nous allons en donner une version assez générale :

Théorème 6.4 (Ohsawa-Takegoshi-Manivel). — Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe borné, et soit $Y \subset \Omega$ une sous-variété complexe lisse de codimension r définie par une section s d'une certain fibré en droites holomorphe hermitien E à tenseur de courbure borné. On suppose que s est partout transverse à la section nulle, et qu'on a l'inégalité $|s| \leq e^{-1}$ sur Ω . Alors il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de E) telle que : pour toute fonction psh φ sur Ω , pour toute fonction holomorphe f sur Y telle que $\int_Y |f|^2 |\Lambda^r(ds)|^{-2} e^{-2\varphi} dV_Y < +\infty$, il existe une fonction holomorphe F sur Ω prolongeant f telle que

$$\int_{\Omega} \frac{|F|^2}{|s|^2 \log^2 |s|} e^{-2\varphi} dV_{\Omega} \leq C \int_Y \frac{|f|^2}{|\Lambda^r(ds)|^2} e^{-2\varphi} dV_Y.$$

En termes un peu moins barbares, si on se donne une fonction f holomorphe sur une sous-variété vérifiant une condition L^2 sur cette sous-variété, alors il existe un prolongement F de f à la variété tout entière, de norme 2 majorée à une constante universelle près (ne dépendant que du diamètre de Ω) par la norme 2 de la restriction.

On sait construire facilement des prolongements de fonctions holomorphes avec norme 2 finie sur des ouverts de Stein, comme c'est le cas ici. Toute la force du théorème réside dans l'universalité de la constante, qui permet d'obtenir des résultats d'effectivité, comme nous le verrons dans la section suivante.

7. L'exposant de singularité complexe

On va maintenant attacher à toute fonction psh un nombre réel qui mesure ses singularités. C'est l'objet de la définition suivante :

Définition 7.1. — Soit X une variété complexe, K un compact de X , et φ une fonction psh sur X . L'exposant de singularité complexe de φ sur K est le nombre réel

$$c_K(\varphi) = \sup\{c \geq 0; e^{-2c\varphi} \text{ est } L^1 \text{ sur un voisinage de } K\}.$$

Remarquons que la condition L^1 est licite : on l'impose au voisinage de chaque point de K via des ouverts de cartes, puis on recouvre K par un nombre *fini* de tels voisinages. Ainsi, la condition apparemment globale se vérifie localement, et la définition est bien licite sur une variété complexe quelconque.

On peut faire le lien avec les idéaux multiplicateurs : $c_K(\varphi)$ est le supremum des réels $c \geq 0$ tels que $\mathcal{I}(c\varphi)$ est trivial (c'est-à-dire égal à $\mathcal{O}_X$) sur un voisinage de K .

Une des conjectures majeures concernant l'exposant de singularité complexe, formulée par Demailly et Kollár, dit que le supremum n'est jamais un maximum :

Conjecture 7.2 (Conjecture d'ouverture). — Soit X une variété complexe, et $K \subset X$ un compact. Pour toute fonction φ psh sur X , et tout voisinage U de K , on a

$$\int_U e^{-2c_K(\varphi)\varphi} dV = +\infty$$

Cette conjecture (sous une version quelque peu généralisée) est démontrée dans le cas où φ est à singularités analytiques (c'est-à-dire pour φ à singularités de la forme $\alpha \log \sum |f_i|$ avec des fonctions f_i holomorphes), ainsi que si φ est localement à symétrie radiale (i.e. ne dépend que de $|z_1|, \dots, |z_n|$), ou encore si $\dim X \leq 2$ (Favre-Jonsson, 05).

Le théorème suivant, d'apparence élémentaire, est en réalité un résultat profond et difficile, qui s'appuie de manière essentielle sur le théorème d'Ohsawa-Takegoshi pour la question de l'effectivité, qui échappe aux méthodes algébriques de résolution des singularités.

Théorème 7.3 (Demailly-Kollár). — Soit X une variété complexe, et $K \subset X$ un compact. On note $\mathcal{P}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions psh localement intégrables sur X , muni de sa topologie naturelle. Alors :

- (1) L'application $\varphi \mapsto c_K(\varphi)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{P}(X)$;
- (2) (Version effective) Soit $\varphi \in \mathcal{P}(X)$ donnée. Si $c < c_K(\varphi)$ et ψ converge vers φ dans $\mathcal{P}(X)$, alors $e^{-2c\psi}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ en norme L^1 sur un certain voisinage de K . Comme cas particulier, on obtient :

- (3) L'application $\mathcal{O}(X) \ni f \mapsto c_K(f)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de convergence uniforme sur les compacts. De plus, si $c < c_K(f)$ et g converge vers f dans $\mathcal{O}(X)$ alors $|g|^{-2c}$ converge vers $|f|^{-2c}$ en norme L^1 sur un certain voisinage de K .

La preuve de ce résultat se déroule en deux grandes étapes : d'abord, on démontre le résultat de semi-continuité de l'exposant de singularité holomorphe (c'est-à-dire qu'on se restreint aux fonctions psh de la forme $\log |f|$ avec f holomorphe) ; pour ce faire, on utilise de manière essentielle des log-résolutions analytiques conduisant à une caractérisation de l'exposant de singularités sous forme d'estimées de volumes. Une fois cette étape franchie, le point clé est d'approcher en un sens très fort une fonction psh générale par des fonctions à singularités analytiques, ce que garantit un théorème de Demailly (92). Insistons bien sur le fait qu'à chaque fois, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi est d'une importance cruciale.

Remarque 2.

Bien sûr, ce résultat est très spécifique au cas complexe : en effet, prenons $f(x) = \sqrt{x}$ approchée uniformément sur $[0, 1]$ par une suite P_n de polynômes qu'on peut prendre nuls en 0. Alors, on a pour tout n l'inégalité $c_0(P_n) \leq 1/2$ alors que $c_0(f) = 1$.

Références

- [BDIP96] J. BERTIN, J.-P. DEMAILLY, L. ILLUSIE & C. PETERS – *Introduction à la théorie de Hodge*, Panorama et Synthèses, vol. 3, Soc. Math. de France, 1996.
- [Dem] J.-P. DEMAILLY – « Complex Analytic and Algebraic Geometry », Livre en préparation.
- [Dem01] ———, *Multiplier ideal sheaves and analytic methods in algebraic geometry*, Lecture Notes, vol. 6, ICTP, 2001.
- [DK01] J.-P. DEMAILLY & J. KOLLÁR – « Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), p. 525–556.
- [DP04] J.-P. DEMAILLY & M. PĂUN – « Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold », *Annals of Math.* **159** (2004), p. 1247–1274.
- [Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [Laz04] R. LAZARSFELD – *Positivity in Algebraic Geometry I & II*, Springer, 2004.
- [Tay02] J. TAYLOR – *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*, American Mathematical Society, 2002.