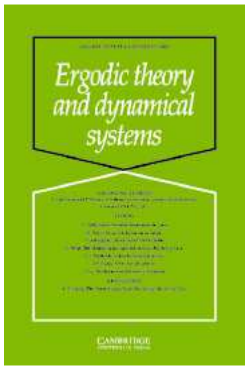

Entropie topologique des applications méromorphes

VINCENT GUEDJ

Ergodic Theory and Dynamical Systems / Volume 25 / Issue 06 / December 2005, pp 1847 - 1855
DOI: 10.1017/S0143385705000192, Published online: 28 October 2005

Link to this article: http://journals.cambridge.org/abstract_S0143385705000192

How to cite this article:
VINCENT GUEDJ (2005). Entropie topologique des applications méromorphes. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 25, pp 1847-1855 doi:10.1017/S0143385705000192

Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2005), **25**, 1847–1855
doi:10.1017/S0143385705000192

Printed in the United Kingdom

Entropie topologique des applications méromorphes

VINCENT GUEDJ

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 04, France
(e-mail: guedj@picard.ups-tlse.fr)

(*Received* 27 *September* 2004 *and accepted in revised form* 26 *March* 2005)

Résumé. Nous montrons que l'entropie topologique des applications méromorphes n'est pas un invariant biméromorphe. Cela fournit un contre-exemple à une conjecture de Friedland. Nous proposons une version raffinée de cette conjecture.

0. *Introduction*

Soit X une variété kählerienne compacte connexe et $f : X \to X$ un endomorphisme holomorphe. Il résulte des travaux de Gromov [**Gr77**] et Yomdin [**Y87**] que l'entropie topologique de f est donnée par $h_{\mathrm{top}}(f) = \log r(f)$, où $r(f)$ désigne le rayon spectral de l'action linéaire induite par f sur la cohomologie, $f^* : H^\bullet(X) \to H^\bullet(X)$.

Lorsque $f : X \to X$ est seulement méromorphe, il a été conjecturé par Friedland [**Fr91**] qu'une telle égalité subsiste si l'on remplace $r(f)$ par un rayon spectral asymptotique (noté plus loin $\lambda(f) = \max \lambda_j(f)$).

Il faut cependant préciser la définition de l'entropie topologique (l'application f n'est pas continue aux points d'indétermination). Nous en proposons dans la §1 deux définitions naturelles dont nous montrons qu'elles coincident toujours (Lemme 1.1) et conduisent à une notion d'entropie topologique qui n'est malheureusement pas invariante par conjugaison biméromorphe (Exemple 1.4).

Nous introduisons dans la §2 les *degrés dynamiques* de l'application f. Ceux-ci sont invariants par conjugaison biméromorphe et donnent une majoration de l'entropie topologique (Théorème 2.2)

$$h_{\mathrm{top}}(f) \le \max_{1 \le j \le k} \log \lambda_j(f).$$

La non-invariance de $h_{\mathrm{top}}(\cdot)$ sous conjugaison biméromorphe montre qu'il ne peut pas y avoir toujours égalité, contredisant ainsi la conjecture de Friedland.

On peut espérer minorer l'entropie topologique via le *principe variationnel* que nous rappelons dans la §3. Nous pensons que la conjecture de Friedland est vraie lorsque les degrés dynamiques $\lambda_j(f)$ sont deux à deux distincts et nous en proposons une version très précise sous cette hypothèse.

1. *Entropie topologique*

Soit X une variété kählerienne compacte connexe munie d'une forme de Kähler ω. On notera d la distance associée à ω. Quitte à dilater ω, on peut toujours supposer que $d \leq 1$ sur $X \times X$.

Soit $f : X \to X$ une application méromorphe *dominante*, i.e. dont le jacobien ne s'annule pas identiquement. Nous noterons I_f l'ensemble d'indétermination de f (l'ensemble des points en lesquels f n'est pas holomorphe) ; c'est un sous-ensemble analytique de X de codimension ≥ 2.

Nous souhaitons définir et étudier l'entropie topologique de f. Lorsque $I_f = \emptyset$, f est en particulier continue et on peut prendre n'importe laquelle des définitions équivalentes usuelles de l'entropie d'un endomorphisme continu d'un espace métrique compact (voir, e.g., [**KH95**]). Supposons à présent $I_f \neq \emptyset$. On peut décider de travailler sur le plus grand ensemble totalement invariant (non compact) qui évite les points d'indétermination et utiliser la définition de Bowen [**Bo73**] de l'entropie topologique. C'est le point de vue adopté dans [**G03**], où l'on pose

$$\Omega_f := X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(I_f),$$

et

$$h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Bow}}(f) := \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \log \max\{\sharp F / F(N,\varepsilon)\text{-séparé dans } \Omega_f\}.$$

Rappelons qu'un ensemble F est dit (N,ε)-séparé si $d_N(x,y) \geq \varepsilon$, pour tout couple de points distincts (x,y) de F, où $d_N(x,y) := \max_{0 \leq j \leq N-1} d(f^j(x), f^j(y))$.

Une approche alternative, dans l'esprit de Gromov [**Gr77**], est de considérer l'entropie du graphe itéré de f. Posons

$$\Gamma_f^\infty := \overline{\{\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega_f^{\mathbb{N}} / x_n = f^n(x_0) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}}.$$

L'espace $X^{\mathbb{N}}$ est compact pour la topologie produit. Celle-ci est métrisable, on peut par exemple considérer la distance $d_\infty(\hat{x}, \hat{y}) = \max_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} d(x_n, y_n)$. Le graphe infini Γ_f^∞ est un compact de $X^{\mathbb{N}}$ sur lequel agit naturellement (et continûment) le décalage à gauche $\hat{f}$, étendant l'action de f sur X. On pose alors

$$h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Gr}}(f) := h_{\mathrm{top}}(\hat{f}).$$

C'est la définition adoptée par Friedland dans [**Fr91**].

On vérifie aisément que ces définitions ne dépendent pas de la distance choisie sur X. Elles sont en fait équivalentes :

LEMME 1.1. $h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Gr}}(f) = h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Bow}}(f)$.

Démonstration. Soit S un ensemble (N,ε)-séparé dans Ω_f. Soit $\pi : \Gamma_f^\infty \to X$ la projection sur le premier facteur et $\hat{S} = \pi^{-1}(S)$. Pour $\hat{x} \in \hat{S}$, on note $x = \pi(\hat{x})$ l'élément de S correspondant. Comme $d_\infty(\hat{f}^j \hat{x}, \hat{f}^j \hat{y}) \geq d(f^j x, f^j y)$, l'ensemble $\hat{S}$ est (N,ε)-séparé dans Γ_f^∞. On en déduit $h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Bow}}(f) \leq h_{\mathrm{top}}^{\mathrm{Gr}}(f)$.

Réciproquement soit $\hat{S}$ un ensemble (N,ε)-séparé dans Γ_f^∞. Comme $\Omega_f^{\mathbb{N}}$ est dense dans Γ_f^∞, on peut bouger légèrement les points de $\hat{S}$ pour obtenir un ensemble $\tilde{S}$ de même cardinal que $\hat{S}$ dont les points sont $(N, \varepsilon/2)$-séparés et se trouvent dans $\Omega_f^{\mathbb{N}}$. Observons que si $d_\infty(\hat{x}, \hat{y}) \geq \varepsilon/2$, alors $d_\infty(\hat{x}, \hat{y}) = 2^{-n} d(x_n, y_n)$ pour un indice $n \leq M(\varepsilon) = \varepsilon/2 \log 2$ (rappelons que l'on a supposé $d(\cdot, \cdot) \leq 1$). Soit $(\hat{x}, \hat{y})$ un couple de points distincts de $\tilde{S}$. On note $x = \pi(\hat{x})$, $y = \pi(\hat{y})$. Alors

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq j \leq N+M(\varepsilon)-1} d(f^j(x), f^j(y)) &\geq \max_{0 \leq j \leq N-1} \max_{0 \leq n \leq M(\varepsilon)} 2^{-n} d(f^j x_n, f^j y_n) \\ &= \max_{0 \leq j \leq N-1} d_\infty(\hat{f}^j \hat{x}, \hat{f}^j \hat{y}) \\ &\geq \varepsilon/2,\end{aligned}$$

donc $S = \pi(\tilde{S})$ est $(N + M(\varepsilon), \varepsilon/2)$-séparé dans Ω_f et a même cardinal que $\hat{S}$. Il s'ensuit $h_{\text{top}}^{\text{Gr}}(f) \leq h_{\text{top}}^{\text{Bow}}(f)$. □

Remarque 1.2. Il est tentant de vouloir considérer l'ensemble

$$\tilde{\Gamma}_f^\infty := \{\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} / (x_i, x_{i+1}) \in \Gamma_f\},$$

sur lequel agit également le décalage $\hat{f}$. Ici $\Gamma_f \subset X^2$ désigne le graphe méromorphe de f dans X^2 (adhérence du graphe holomorphe). En général $\tilde{\Gamma}_f^\infty$ peut être beaucoup plus grand que Γ_f^∞ et conduire à une entropie infinie, comme sur l'exemple suivant : considérons

$$\Phi : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (w^2, z) \in \mathbb{C}^2$$

et notons $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ son extension méromorphe à $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup L_\infty$. Il y a exactement un point d'indétermination $I_f = \{p\} \subset L_\infty$ sur lequel f contracte la droite L_∞. Comme $f(p) = L_\infty$, Γ_f contient $\{p\} \times L_\infty$ d'où $\tilde{\Gamma}_f^\infty$ contient tous les points de la forme

$$(p_1, p, p_2, p, p_3, \ldots), \quad \text{avec } p_i \in L_\infty \text{ arbitraire :}$$

ainsi $(\tilde{\Gamma}_f^\infty, \hat{f})$ contient un décalage sur un nombre infini de symboles !

Observons qu'ici $\Omega_f^{\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $\tilde{\Gamma}_f^\infty$.

Dans la suite nous noterons simplement $h_{\text{top}}(f)$ l'entropie topologique de l'application f. Voici quelques propriétés élémentaires de cette notion dont nous laissons la preuve au lecteur.

PROPOSITION 1.3.

(1) *Soit Y une variété kählerienne compacte, $\pi : X \to Y$ une application holomorphe surjective et $g : Y \to Y$ une application méromorphe dominante telles que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Alors $h_{\text{top}}(g) \leq h_{\text{top}}(f)$. En particulier l'entropie topologique est invariante par conjugaison biholomorphe.

(2) *Soit Y une variété kählerienne compacte et $g : Y \to Y$ une application méromorphe dominante. Soit $f \times g$ le produit direct de f et g sur la variété kählerienne $X \times Y$. Alors*

$$h_{\text{top}}(f \times g) = h_{\text{top}}(f) + h_{\text{top}}(g).$$

(3) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{\text{top}}(f^n) = n h_{\text{top}}(f)$.*

La propriété 1.3(1) ci-dessus est classique en théorie ergodique: l'entropie d'une application domine l'entropie de ses facteurs topologiques. Comme nous considérons des applications méromorphes, il est tentant de vouloir établir une telle propriété en supposant simplement π méromorphe dominante. L'exemple suivant montre que ce n'est pas possible.

Exemple 1.4. Considérons l'endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$,

$$\Phi : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z^d, w+1) \in \mathbb{C}^2,$$

où d est un entier ≥ 2. Notons f l'extension méromorphe de Φ à $\mathbb{P}^2$. Elle s'écrit en coordonnées homogènes

$$f[z : w : t] = [z^d : wt^{d-1} + t^d : t^d],$$

où $L_\infty := (t = 0)$ désigne la droite à l'infini. On vérifie aisément que l'ensemble d'indétermination I_f est réduit au point $p = [0 : 1 : 0]$, et que f contracte la droite L_∞ sur le point fixe attractif $q = [1 : 0 : 0]$. Comme $\mathbb{C}^2$ est totalement invariant par f, on a nécessairement $f(p) = L_\infty$. Le graphe infini se décompose donc en

$$\Gamma_f^\infty = (\Gamma_f^\infty \cap (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{N}}) \bigcup \widehat{L}_\infty,$$

où $\widehat{L}_\infty$ désigne l'ensemble des suites $\hat{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont du type

$$x_n = p \text{ pour } n \leq n_0 - 1, \quad x_{n_0} \in L_\infty, \quad x_n = q \text{ pour } n \geq n_0 + 1$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Lorsque $n_0 = +\infty$, on obtient la suite constante $\hat{p} = (p)$. La suite constante $\hat{q} = (q)$ concerne le cas $n_0 = 0$. Ces deux suites sont des points fixes de l'application $\hat{f}$: $\hat{q}$ est un point fixe attractif, tandis que $\hat{p}$ est un point de type selle.

La dynamique de f (respectivement $\hat{f}$) est non récurrente dans $\mathbb{C}^2$ (respectivement dans $\Gamma_f^\infty \cap (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{N}}$) : l'orbite de tout point $a \in \mathbb{C}^2$ converge vers la droite L_∞. On en déduit que l'ensemble non errant de $\hat{f}$ se situe dans $\widehat{L}_\infty$. Mais la dynamique de $\hat{f}$ sur $\widehat{L}_\infty$ est également triviale: l'orbite de tout point $\hat{x}$ différent de $\hat{p}$ converge vers le point fixe $\hat{q}$. L'ensemble non errant de $\hat{f}$ est donc réduit aux deux points fixes $\hat{p}$ et $\hat{q}$. On en déduit

$$h_{\text{top}}(f) = 0.$$

On aurait pu par ailleurs considérer l'extension g de Φ à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On obtient dans ce cas $g = P \times h$, où $P : z \in \mathbb{P}^1 \mapsto z^d \in \mathbb{P}^1$ est un endomorphisme holomorphe de la sphère de Riemann d'entropie $\log d$, et $h : w \in \mathbb{P}^1 \mapsto w + 1 \in \mathbb{P}^1$ est un automorphisme de la sphère de Riemann (d'entropie nulle). Ainsi

$$h_{\text{top}}(g) = \log d > 0.$$

Or $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont birationnellement équivalents. On ne peut donc pas tolérer de flèche π méromorphe dans l'assertion 1.3(1).

L'exemple précédent montre en particulier que l'entropie topologique n'est pas invariante par conjugaison biméromorphe.

2. *Degrés dynamiques*

Il est souvent difficile de calculer l'entropie topologique d'une application donnée. Suivant Gromov [**Gr77**] et Friedland [**Fr91**], nous introduisons à présent des invariants numériques qui permettent de majorer celle-ci.

Définition 2.1. Pour $1 \leq j \leq k = \dim_{\mathbb{C}} X$, on définit le $j^{\text{ième}}$ degré dynamique $\lambda_j(f)$ de f par

$$\lambda_j(f) := \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_{X \setminus I_{f^n}} (f^n)^* \omega^j \wedge \omega^{k-j}\right]^{1/n}.$$

On vérifie aisément que $\lambda_j(f)$ ne dépend pas du choix de la forme de Kähler ω. Nous renvoyons le lecteur à [**RS97, G03, DS04**] pour une liste de propriétés remarquables de ces degrés dynamiques. Nous nous contentons ici de rappeler que les degrés dynamiques sont des invariants biméromorphes.

Soit Γ_f^N le graphe d'ordre N de f : c'est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension k dans X^N, défini par

$$\Gamma_f^N := \overline{\{(x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \Omega_f^N / x_i = f^i(x), 0 \leq i \leq N-1\}}.$$

Notons $\pi_i : X^N \to X$ la projection sur le i^e facteur et $\omega_N := \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i^* \omega$ la forme de Kähler induite sur X^N. Gromov a introduit dans [**Gr77**] l'invariant

$$\mathrm{lov}(f) := \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\left[\int_{X^N} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k\right]$$

et établit l'estimation suivante, lorsque f est holomorphe :

THÉORÈME 2.2. (Gromov)

$$h_{\mathrm{top}}(f) \leq \mathrm{lov}(f).$$

La preuve de Gromov passe sans difficulté au cas méromorphe. Elle repose sur les deux observations suivantes :

(1) Si F est un ensemble (N, ε)-séparé dans Ω_f pour la distance d associée à ω, alors $F_N := \{(x, f(x), \ldots, f^{N-1}(x)) \in X^N / x \in F\}$ est un ensemble $(1, \varepsilon)$-séparé dans Γ_f^N pour la distance d_N associée à ω_N. Les boules $B_{d_N}(y, \varepsilon/2)$ sont donc disjointes pour $y \in F_N$, ce qui garantit

$$\sharp F \cdot \min_{y\in F_N} \int_{B_{d_N}(y,\varepsilon/2)} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k \leq \int_{X^N} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k.$$

(2) Le volume d'une boule centrée en un point y de Γ_N est minoré indépendamment de N et de y. Plus précisément il existe $C = C(X, \omega) > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $y \in \Gamma_f^N$, alors

$$\int_{B_{d_N}(y,\varepsilon/2)} [\Gamma_f^N] \wedge \omega_N^k \geq C\varepsilon^{2k}.$$

C'est l'observation désormais classique de Lelong qui permet de définir le nombre de Lelong d'un courant positif fermé de bidimension (k, k) (ici le courant d'intégration sur Γ_f^N).

La croissance des volumes des graphes itérés Γ_f^N s'estime grâce aux degrés dynamiques. En s'inspirant des travaux de Newhouse [**N88**], Friedland a montré [**Fr91**] que

$$\mathrm{lov}(f) = \max_{1 \leq j \leq k} \log \lambda_j(f)$$

lorsque f est holomorphe. Ce résultat est encore vrai dans le cas méromorphe, mais nécessite des estimées plus délicates (voir [**RS97, G03, DS04**]).

La conjecture de Friedland. Se pose alors la question de minorer l'entropie topologique. Lorsque f est holomorphe, il résulte des travaux de Yomdin [**Y87**] qu'on a également la minoration $h_{\mathrm{top}}(f) \geq \max_{1 \leq j \leq k} \log \lambda_j(f)$, d'où l'égalité. Friedland conjecture dans [**Fr91**] qu'il en est toujours ainsi pour les endomorphismes rationnels des variétés projectives. L'exemple 1.3 fournit un contre-exemple particulièrement simple à cette conjecture : on vérifie en effet aisément que $\lambda_1(f) = \lambda_2(f) = d$, donc

$$h_{\mathrm{top}}(f) = 0 < \mathrm{lov}(f) = \log d.$$

3. *Une conjecture raffinée*

L'exemple 1.3 montre qu'il est vain d'essayer de minorer à la Yomdin l'entropie topologique d'une application méromorphe, à moins d'avoir un contrôle très précis de la dynamique près des points d'indétermination (comme c'est par exemple le cas pour les applications de Hénon complexes [**Sm90**]). Une alternative fructueuse consiste à utiliser le principe variationnel que nous rappelons à présent.

Soit ν une mesure de probabilité dans X telle que $\nu(\Omega_f) = 1$. Comme ν ne charge pas les points d'indétermination, son image directe $f_*\nu$ est bien définie et on dira que ν est *invariante* lorsque $f_*\nu = \nu$. Une telle mesure est *ergodique* si les ensembles f-invariants sont soit de ν-mesure nulle, soit de ν-mesure totale (cela fait sens puisque Ω_f est f-invariant). Pour une telle mesure nous définissons son *entropie métrique* $h_\nu(f)$ en suivant Brin–Katok [**BK83**] : pour presque tout $x \in \Omega_f$,

$$h_\nu(f) = \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{N \to +\infty} -\frac{1}{N} \log \nu(B_N(x, \varepsilon)),$$

où $B_N(x, \varepsilon) = \{y \in \Omega_f / d_N(x, y) < \varepsilon\}$. Nous renvoyons le lecteur à [**KH95**, Ch. 4.3] pour une définition plus classique de cette notion. On obtient une minoration de l'entropie topologique grâce au principe suivant.

Principe variationnel.

$$\sup\{h_\nu(f)/\nu \text{ ergodique et } \nu(\Omega_f) = 1\} \leq h_{\mathrm{top}}(f).$$

La preuve est une conséquence immédiate du principe variationnel classique (voir Théorème 4.5.3 dans [**KH95**]) si on travaille avec le graphe infini : à toute mesure de probabilité f-ergodique ν sur Ω_f correspond une unique mesure $\hat{f}$-ergodique $\hat{\nu}$ sur Γ_f^∞ dont l'entropie coincide avec celle de ν et est majorée par $h_{\text{top}}(\hat{f}) =: h_{\text{top}}(f)$ (voir [**R67**]).

Observons cependant qu'on ne dispose ainsi que d'une inégalité : une mesure d'entropie presque maximale dans $(\Gamma_f^\infty, \hat{f})$ peut être localisée au dessus des points d'indétermination et ne pas charger Ω_f. C'est précisément ce qui se passe dans l'exemple qui suit.

Exemple 3.1. Considérons l'endomorphisme polynomial de $\mathbb{C}^2$

$$\Phi : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z[z-w], w+1) \in \mathbb{C}^2.$$

Notons f son extension méromorphe à $\mathbb{P}^2$. Son ensemble d'indétermination est réduit aux deux points $p_1 = [0 : 1 : 0]$, $p_2 = [1 : 1 : 0]$ qui se situent sur la droite à l'infini $L_\infty = (t = 0)$. Celle-ci est contractée par f sur le point fixe attractif $q = [1 : 0 : 0]$. L'invariance de $\mathbb{C}^2$ montre que $f(p_1) = f(p_2) = L_\infty$, on a donc $\Omega_f = \mathbb{C}^2$.

Il n'y a aucune mesure de probabilité invariante dans $\mathbb{C}^2$ puisque $f^n \to L_\infty$. On a donc

$$\sup\{h_\nu(f)/\nu \text{ ergodique et } \nu(\Omega_f) = 1\} = 0.$$

Cependant f est d'entropie topologique $\log 2$. En effet $(\Gamma_f^\infty, \hat{f})$ contient le décalage sur les deux symboles $\{p_1, p_2\}^{\mathbb{N}}$.

Il est néanmoins utile de chercher à construire une mesure de probabilité invariante qui ne charge pas les points d'indétermination et soit d'entropie ausi grande que possible : on récupère alors une minoration de l'entropie topologique via le principe variationnel. Pour pouvoir transporter une telle mesure par une application biméromorphe, il faut que celle-ci ne charge pas les sous-ensembles analytiques propres. C'est précisément le problème dans l'exemple 1.3 : la mesure $d\theta/2\pi \otimes \delta_\infty$ est d'entropie maximale pour l'application $g = (z^d, w+1)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, mais elle est portée par la courbe $(w = \infty)$ qui est contractée sur un point lorsque l'on passe au modèle $(f, \mathbb{P}^2)$. Nous conjecturons que cela ne se produit pas lorsque les degrés dynamiques sont distincts (rappelons que $\lambda_1(g) = \lambda_2(g) = d$ dans l'exemple 1.3). Plus précisément :

CONJECTURE 3.2. *Soit $f : X \to X$ une application méromorphe dominante telle que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ pour un entier l, $1 \leq l \leq k$.*

Alors il existe une unique mesure de probabilité invariante μ_f qui ne charge pas les hypersurfaces et vérifie

(1) *μ_f est mélangeante, d'entropie maximale*

$$h_{\mu_f}(f) = h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_l(f).$$

(2) *μ_f est hyperbolique. Ces exposants de Lyapunov vérifient*

$$\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_l \geq \tfrac{1}{2}\log(\lambda_l(f)/\lambda_{l-1}(f)) > 0$$

et

$$0 > -\tfrac{1}{2}\log(\lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)) \geq \chi_{l+1} \geq \cdots \geq \chi_k.$$

(3) *Les points périodiques selles de type $(k-l, l)$ s'équidistribuent selon μ_f.*

Les quelques lignes qui suivent se veulent une justification heuristique du caractère canonique de la mesure μ_f dont la conjecture prédit l'existence. Pour simplifier nous nous restreignons au cas de l'espace projectif complexe $X = \mathbb{P}^k$.

- Russakovskii et Shiffman ont montré [**RS97**], lorsque $\lambda_l(f) > \lambda_{l-1}(f)$, que les préimages des sous-espaces linéaires génériques de codimension l dans $\mathbb{P}^k$ sont asymptotiquement équidistribuées. On espère qu'elles s'équidistribuent selon un courant positif fermé T_l^+ de bidegré (l, l) tel que $f^*T_l^+ = \lambda_l(f)T_l^+$. L'existence d'un tel courant a été démontrée par Sibony [**S99**] lorsque $l = 1$ (sous une hypothèse de stabilité algébrique) et par Russakovskii et Shiffman [**RS97**] lorsque $l = k$.
- On peut démontrer un phénomène analogue d'équidistribution des images directes de sous-espaces linéaires génériques de dimension l lorsque $\lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$. On s'attend également à ce qu'elles s'équidistribuent selon un courant positif fermé T_{k-l}^- de bidegré $(k - l, k - l)$ tel que $f_*T_{k-l}^- = \lambda_l(f)T_{k-l}^-$. L'existence d'un tel courant est montrée dans [**G02**] lorsque $k - l = 1$.
- Lorsque $\lambda_l(f) > \lambda_{l-1}(f)$ et $\lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$, les propriétés de concavité des degrés dynamiques (voir Proposition 1.2 dans [**G03**]) assurent alors que $\lambda_l(f)$ domine en fait tous les autres degrés dynamiques. La mesure canonique naturelle serait alors $\mu_f := T_l^+ \wedge T_{k-l}^-$, si tant est que l'on sache donner un sens à ce produit extérieur.

Plusieurs travaux récents s'articulent autour de cette question :

- La conjecture est démontrée lorsque $l = k$ (voir [**BD01, G03, DS04**]). Dans ce cas tous les exposants de Lyapunov sont positifs et les points périodiques à considérer sont les points répulsifs.
- La conjecture est également connue dans le cas des applications de Hénon complexes [**BLS93**] et des automorphismes des surfaces projectives [**Ca01**]. Plusieurs résultats partiels ont été établis pour les applications biméromorphes des surfaces kählériennes (voir notamment [**DF01, BD03, Du04**]). Cependant, même le cas des endomorphismes birationnels (quelconques) du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$ est ouvert.
- Quelques résultats partiels ont été obtenus en dimension plus grande, dans le cas des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$ (voir [**S99, GS02, G04**]) et des automorphismes des variétés kählériennes compactes [**DS03**].

Remerciements. Cette note a largement bénéficié d'échanges dynamiques avec Romain Dujardin et Charles Favre. Qu'ils en soient chaleureusement remerciés ici.

RÉFÉRENCES

[BD01] J.-Y. Briend et J. Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), 145–159.

[BD03] E. Bedford et J. Diller. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math. J.* **128**(2) (2005), 331–368.

[BK83] M. Brin et A. Katok. On local entropy. *Geometric Dynamics (Rio de Janeiro, 1981) (Lecture Notes Math., 1007)*. Springer, Berlin, 1983, 30–38.

[BLS93] E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ IV: the measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.* **112** (1993), 77–125.

E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. *Invent. Math.* **114** (1993), 277–288.

[Bo73] R. Bowen. Topological entropy for non compact sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **184** (1973), 125–136.

[Ca01] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Math.* **187**(1) (2001), 1–57.

[DF01] J. Diller et C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.* **123**(6) (2001), 1135–1169.

[DS03] T.-C. Dinh et N. Sibony. Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds. *J. Amer. Math. Soc.* **18**(2) (2005), 291–312.

[DS04] T.-C. Dinh et N. Sibony. Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **37**(6) (2004), 959–971.

[Du04] R. Dujardin. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J.* à paraître.

[Fr91] S. Friedland. Entropy of polynomial and rational maps. *Ann. Math.* **133** (1991), 359–368.

[G02] V. Guedj. Dynamics of polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$. *Amer. J. Math.* **124**(1) (2002), 75–106.

[G03] V. Guedj. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Ann. Math.* **161**(3) (2005), 1589–1607.

[G04] V. Guedj. Courants extrémaux et dynamique complexe. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* à paraître.

[Gr77] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Manuscrit (1977) publié dans L'Enseignement Mathématique* **49** (2003), 217–235.

[GS02] V. Guedj et N. Sibony. Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^k$. *Ark. Mat.* **40**(2) (2002), 207–243.

[KH95] A. Katok et B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 1995.

[N88] S. E. Newhouse. Entropy and volume. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **8** (1988), 283–299.

[R67] V. A. Rohlin. Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations. *Russian Math. Surveys* **22** (1967), 1–52.

[RS97] A. Russakovskii et B. Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), 897–932.

[S99] N. Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997). Panor. Synthèses*. Vol. 8. Mathematics Society of France, Paris, 1999, pp. 97–185.

[Sm90] J. Smillie. The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **10**(4) (1990), 823–827.

[Y87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.* **57** (1987), 285–300.