Préparation à l'Agrégation Interne

Vincent GUEDJ

26 janvier 2021

Table des matières

Introduction

Ce document est le support d'un cours-TD de préparation à l'Agrégation Interne dispensé par l'auteur à l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France) entre juin 2016 et décembre 2020.

Nous parcourons une bonne partie des paragraphes 5 à 12 du programme officiel (version 2021), sous forme d'exercices commentés et partiellement corrigés pour la plupart.

Le poly fait régulièrement référence à des ouvrages dont disposent les candidats au moment de leurs épreuves orales, notamment :

- *Géométrie, de la licence à l'agrégation* par M.Audin ;
- *Exercices de mathématiques oraux X-ENS*, algèbre 3, par S.Francinou, H.Gianella, et S.Nicolas.
- *Algèbre, 2e édition* par X.Gourdon ;
- *Algèbre linéaire, 2e édition* par J.Grifone ;
- *Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS*, tomes 1 et 2, par E.Leichtnam et X.Schauer.

J'ai également utilisé le site Exo7.emath.fr qui contient beaucoup d'exercices corrigés ; je vous recommande de le consulter régulièrement. Bon courage !

Le texte contient très probablement de nombreuses coquilles (typos, erreurs ou imprécisions). Merci d'avance de me les signaler en m'écrivant à vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr

Bonne lecture !

Chapitre 1

Algèbre linéaire : généralités

1.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

1.1.1 Ce qu'il faut savoir

Noyau, Image

On se donne E un K-espace vectoriel de dimension finie ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ principalement) et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On rappelle que le noyau

$$Ker(f) := \{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$$

est un sev qui mesure le manque d'injectivité de f et que l'image

$$Im(f) := \{y \in E \,/\, \exists x \in E,\ f(x) = y\}$$

est un sev qui mesure le caractère plus ou moins surjectif de f. Comme E est de dimension finie, ces deux sous-espaces sont reliés par la formule

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim E \tag{1.1}$$

qu'il faut savoir démontrer et qui indique en particulier que f est injectif ssi il est surjectif, ssi il est bijectif. Ce résultat est faux en dimension infinie.

Notez que lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, la formule (1) reste valable mais la conséquence injectif=surjectif=bijectif n'est valable que si $\dim E = \dim F$.

Supplémentaires

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Leur intersection $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel (vérifiez le !), mais c'est rarement le cas de leur réunion :

$F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

On considère à la place la somme $F+G$ constituée de toutes les sommes d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On a alors

$$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F+G).$$

On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$, on écrit alors $F+G = F \oplus G$. Si de plus $F+G = E$, on dit que F et G sont supplémentaires et on écrit ainsi $F \oplus G = E$.

On dit que des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_s$ sont en somme directe si l'application linéaire

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_s) \in F_1 \times \cdots \times F_s \mapsto x_1 + \cdots + x_s \in E$$

est injective. Dans ce cas $\dim(F_1 + \cdots + F_s) = \sum \dim F_j$.
Attention. Cette condition implique que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$, mais elle est beaucoup plus forte que cela lorsque $s \geq 3$. Observez par exemple que les droites

$$F_1 = (x=0),\ F_2 = (y=0) \text{ et } F_3 = (x=y)$$

dans $\mathbb{R}^2$ sont d'intersection deux à deux réduites à zéro, mais ne sont pas en somme directe (pourquoi ?). On verra plus loin que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe (de même que les sous-espaces caractéristiques).

Sous-espaces propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de f lorsqu'il existe un vecteur non nul x de E (appelé vecteur propre) tel que $f(x) = \lambda x$. Cela revient à dire que l'endomorphisme $f - \lambda Id$ n'est pas injectif. L'ensemble $Ker(f - \lambda Id)$ des vecteurs propres associés à λ s'appelle le sous-espace propre associé à λ.

Une valeur propre est racine du polynôme caractéristique (et réciproquement). Les sous-espaces propres sont en somme directe (cela peut se montrer à l'aide du détrminant de Vandermonde que vous calculerez plus loin).

Polynômes d'endomorphisme

Rappelons que si $P = \sum a_i X^i \in K[X]$ est un polynôme, on définit le polynôme d'endomorphisme

$$P(f) := \sum a_i f^i \in \mathcal{L}(E),$$

où f^i désigne l'endomorphisme itéré $f \circ \cdots \circ f$ (i fois). On définit ainsi un morphisme d'algèbre de $K[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$ puisque

$$(P+Q)(f) = P(f) + Q(f) \text{ et } (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Notez que deux polynômes d'un même endomorphisme commutent, alors que la composition des endomorphismes n'est pas une loi commutative !

1.1.2 Quelques exercices

Exercice 1.1 (Classique). *Soit* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \ \ (a,b) \in \mathbb{Q}\}$. *Montrer que* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ *est un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel de dimension* 2.

————————

On vérifie aisément que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-sev de $\mathbb{R}$. Il est engendré par 1 et $\sqrt{2}$, donc de dimension au plus 2. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$.

————————

Exercice 1.2 (Classique, Gourdon exo 2 p112). *Soit* $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On note* $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda x} \in \mathbb{R}$. *Mq les* $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ *forment une famille libre de* E.

————————

Supposons qu'il existe une combinaison linéaire *finie* telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_{\lambda_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i x} = 0,$$

avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'on a nécessairement $a_1 = \cdots = a_n = 0$. On peut dériver j fois cette égalité, $0 \leq j \leq n-1$, et évaluer en $x = 0$ pour obtenir un système linéaire de Vandermonde

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)[a] = 0.$$

La conclusion résulte donc de l'inversibilité de la matrice de Vandermonde lorsque les λ_j sont deux à deux distincts. [Voir également Gourdon exo 2 p112.]

————————

Exercice 1.3 (Cours). *Soit* E *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continues et* 2π*-périodiques. Montrer que la famille* $e_j : \theta \mapsto e^{ij\theta}$ *est une famille infinie libre de vecteurs de* E*. Est-elle génératrice ?*

————————

On peut reprendre l'argument de l'exercice précédent pour montrer que la famille est libre. Elle n'est pas génératrice au sens algébrique du terme (il faudrait que toute fonction soit combinaison linéaire *finie* des e_j), mais elle l'est au sens Hilbertien comme l'indique le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier.

————————

Exercice 1.4 (Cours). *Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Montrer que S est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base.

—————————

L'équation caractéritique de cette équation différentielle linéaire du second ordre est $X^2 - 3X + 2 = 0$ qui admet pour solutions simples $X = 1$ et $X = 2$. On en déduit que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x} \in \mathbb{R}$ forment une base de l'espace des solutions.

Rappelons comment justifier cette assertion. Une méthode canonique consiste à se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 vectorielle et à utiliser l'exponentielle de matrice. On va ici procéder "à la main". Il est facile de s'assurer que l'ensemble des solutions est un un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le problème est de calculer sa dimension. Soit y une solution et considérons $z(t) = y(t)e^{-t}$. On vérifie par la formule de Leibnitz que

$$z'' = y''e^{-t} - 2y'e^{-t} + ye^{-t} = (3y' - 2y)e^{-t} - 2y'e^{-t} + ye^{-t} = (y' - y)e^{-t} = z'.$$

Posons à présent $w = z'e^{-t}$. Il vient $w' = (z''-z')e^{-t} \equiv 0$, donc w est constante. On en déduit $z'(t) = ae^t$ puis $z = ae^t + b$ donc $y(t) = ae^{2t} + be^t = ag + bf$.

—————————

Exercice 1.5 (Entraînement). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que*

$$Ker\, f \oplus Im\, f = E \Longleftrightarrow Imf = Imf^2.$$

—————————

On observe que $Ker\, f = Ker\, f^2 \iff Im\, f = Im\, f^2$, du coup on va montrer que

$$Ker\, f \oplus Im\, f = E \Longleftrightarrow Ker\, f = Ker\, f^2.$$

Supposons que $x \in Ker\, f \cap Im\, f$. Soit z tel que $f(z) = x$. Alors $f^2(z) = f(x) = 0$, donc $z \in Ker\, f^2 = Ker\, f$, donc $0 = f(z) = x$. On en déduit que $Ker\, f$ et $Im\, f$ sont en somme directe. Comme $\dim Ker\, f + \dim Im\, f = \dim E$, on en déduit que $Ker\, f \oplus Im\, f = E$.

Réciproquement supposons $Ker\, f \oplus Im\, f = E$. Soit $x \in Ker\, f^2$, alors $f(x) \in Ker\, f \cap Im\, f$ donc $f(x) = 0$, i.e. $x \in Ker\, f$. Ainsi $Ker\, f^2 \subset Ker\, f$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée.

—————————

Exercice 1.6 (Classique). *Soit $F, G \subset E$ deux sevs. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Ker(f) = F$ et $Im(f) = G$ ssi $\dim F + \dim G = \dim E$.*

—————————

La condition $\dim F + \dim G = \dim E$ est nécessaire puisque pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim E$. On suppose réciproquement cette condition vérifiée. Soit H un supplémentaire de F, il est donc de même dimension r que G. On note $\{h_1, \ldots, h_r\}$ et $\{g_1, \ldots, g_r\}$ des bases de H et G. Tout vecteur x de E se décompose de façon unique en $x = x_F + \sum_{j=1}^r \lambda_j h_j$, avec $\lambda_j \in K$ et $x_F \in F$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$f(x_F + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j h_j) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j g_j.$$

On vérifie aisément que $Ker(f) = F$ et $Im(f) = G$.

————————

Exercice 1.7 (Cours / Théorème des noyaux). *Montrer que si $P_1, \ldots, P_r \in K[X]$ sont premiers entre eux, alors*

$$Ker(P_1 \cdots P_r)(f) = \oplus_{i=1}^r Ker\, P_i(f).$$

————————

On note $F_i = Ker\, P_i(f)$. Il suffit, par récurrence, de traiter le cas $r = 2$: en effet, si F_1 est en somme directe avec $F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$, alors les sevs $F_1, \ldots, F_r$ sont en somme directe (vérifiez que vous savez rédiger cela).

On a toujours $Ker(P_1P_2)(f) \subset Ker\, P_1(f)$ et $Ker(P_1P_2)(f) \subset Ker\, P_2(f)$, donc $Ker(P_1P_2)(f) \subset Ker\, P_1(f) + Ker\, P_2(f)$. Les polynômes P_1, P_2 sont premiers entre eux ss'il existe $A, B \in K[X]$ tels que $AP_1 + BP_2 = 1$. Il s'ensuit pour tout $x \in E$,

$$A(f) \circ P_1(f)(x) + B(f) \circ P_2(f)(x) = x.$$

Si $x \in Ker\, P_1(f) \cap Ker\, P_2(f)$, on en déduit que $x = 0$, i.e. $Ker\, P_1(f)$ et $Ker\, P_2(f)$ sont en somme directe. De plus si $x \in Ker(P_1P_2)(f)$ alors $A(f) \circ P_1(f)(x) \in Ker\, P_2(f)$ car $P_2(f)(A(f) \circ P_1(f)(x)) = A(f) \circ (P_1P_2)(f)(x) = 0$. De même $B(f) \circ P_2(f)(x) \in Ker\, P_1(f)$, donc $Ker\, P_1(f) \oplus Ker\, P_2(f) \subset Ker(P_1P_2)(f)$.

————————

Exercice 1.8 (Classique, Gourdon p115). *Soit E un K-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1) Mq f est une homothétie ssi pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_x \in K$ tq $f(x) = \lambda_x x$.

2) Mq f est une homothétie ssi f commute avec tous les endomorphismes.

————————

1) Soit x, y deux vecteurs linéairement indépendants (si $n = 1$, l'exercice est trivial). On observe que

$$\lambda(x)x + \lambda(y)y = f(x) + f(y) = f(x+y) = \lambda(x+y)x + \lambda(x+y)y,$$

donc $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$. De même $\lambda(tx) = \lambda(x)$ pour tout $t \in K^*$, donc $\lambda(x) \equiv \lambda$ est constante, i.e. f est une homothétie.

Voir également Gourdon Proposition 3 p115.

2) On observe que pour tout x, il existe $\lambda(x) \in K$ tel que $f(x) = \lambda(x)x$. Sinon x et $f(x)$ sont linéairement indépendants ; on les complète en une base $\{x, f(x), e_3, \ldots, e_n\}$ et on définit l'endomorphisme g tel que $g(f(x)) = x$ et $g(x) = g(e_j) = 0$ pour $3 \leq j \leq n$. On obtient une contradiction car $g \circ f(x) = x \neq 0 = f \circ g(x)$. La conclusion résulte de la question précédente.

————————

Exercice 1.9. *[Entraînement / 2ème épreuve 2016] Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées muni de $N_\infty(x) := \sup_{n \in N} |x_n|$. On considère*

$$\sigma : x \in E \mapsto y \in E$$

définie par $y_n := x_{n+1}$, le "décalage à gauche".

1) Montrer que $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ est surjectif mais pas injectif.

2) Montrer de même que le décalage à droite est injectif mais pas surjectif.

3) Calculer la norme d'opérateur de ces deux endomorphismes.

4) Calculer les composés de ces deux décalages.

————————

[Cet exercice est au coeur de la partie III de la deuxième épreuve écrite de 2016.]

1) L'application σ est clairement un endomorphisme de E : elle vérifie $\sigma(0) = 0$, $\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x)$, $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ et l'image d'une suite bornée est bornée.

Etant donnée une suite $y \in E$, la suite x définie par

$$x_0 = 0 \text{ et } x_n = y_{n-1} \text{ pour } n \geq 1$$

appartient à E et vérifie $\sigma(x) = y$, donc σ est surjectif. Notons que l'on a encore $\sigma(x') = y$ si x' désigne la suite obtenue en remplaçant x_0 par 1. En particulier

$$\sigma((1, 0, \ldots, 0, \ldots)) = 0,$$

donc σ n'est pas injectif. Son noyau est la droite engendrée par $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

2) On note τ le décalage à droite, tel que

$$\tau(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

Pour que τ soit un endomorphisme, on est obligé de mettre 0 sur la première coordonnée. On obtient bien ainsi un endomorphisme injectif de E, mais son image est l'hyperplan des suites bornées dont la première coordonnée vaut zéro : τ n'est donc pas surjectif.

3) Le décalage à droite préserve la norme $||\tau(x)|| = ||x||$ tandis que $||\sigma(x)|| \leq ||x||$, avec inégalité stricte si $|x_0| > \sup_{j \geq 1} |x_j|$, mais égalité par exemple pour la suite constante égale à 1. On en déduit que

$$|||\tau||| = |||\sigma||| = 1.$$

4) On vérifie que $\sigma \circ \tau = Id$ tandis que

$$\tau \circ \sigma(x) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

est la projection sur $\mathrm{Im}\tau$.

————————

1.2 Dualité

Etant donné E un espace vectoriel sur un corps K, on note traditionnellement E^* le dual de E=l'ensemble des *formes linéaires* sur E, i.e. les applications linéaires $f : E \to K$ à valeurs dans K (l'unique e.v. sur K de dimension 1).

Lorsque E est de dimension infinie, on s'intéresse plutôt au dual topologique, i.e. l'ensemble des formes linéaires *continues*. Dans votre programme 5.6, on se restreint au cas de dimension finie.

Exercice 1.10 (Cours)**.** *Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base d'un Ke.v. E. Montrer qu'il existe des formes linéaires uniques $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ telles que*

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

—————————

Consultez votre cours de référence en Algèbre linéaire.

—————————

On en déduit en particulier que $\dim E = \dim E^*$. La base (f_j) est notée (e_j^*) et s'appelle la *base duale* de la base (e_j).

Exercice 1.11 (Entraînement)**.** *Soit E un K-ev de dimension finie et $x, y \in E$ deux vecteurs distincts. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

—————————

Si x, y sont linéairement indépendants, on complète $x, y, e_3, \ldots, e_n$ en une base de E. Une forme linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base, on considère donc f l'unique élément de E^* telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = f(e_3) = \cdots = f(e_n) = 0$.

Si x, y sont liés, on peut supposer (quitte à interchanger les rôles de x, y) qu'il existe $1 \neq \lambda \in K$ tel que $y = \lambda x$. On complète $x, e_2, \ldots, e_n$ en une base de E. On considère l'unique élément $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$ et $f(e_2) = \cdots = f(e_n) = 0$. Il vient alors $f(y) = \lambda \neq 1 = f(x)$.

—————————

Exercice 1.12 (Cours/Classique)**.** *Soit E un K-ev de dimension finie. On note E^* son dual et $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual.*

1) Montrer que l'application $\Phi : E \to E^{**}$ définie par

$$\Phi(x) : f \in E^* \mapsto f(x) \in K$$

est un isomorphisme.

2) Lorsque E est de dimension infinie, montrer que E s'injecte canoniquement dans le bidual, et donner un exemple où il y a inclusion stricte.

————————

1) L'application Φ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension. Il suffit donc de montrer qu'elle est injective pour obtenir que c'est un isomorphisme. Or

$$\Phi(x) = 0 \in E^{**} \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall f \in E^*.$$

On en déduit que $x = 0$ (l'exercice précédent a montré comment fabriquer une $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$ si x n'est pas nul).

2) L'argument ci-dessus reste valable pour montrer que Φ est injective en dimension infinie (il faut cependant utiliser le théorème de la base incomplète qui fait appel à l'axiome du choix). Il n'est par contre pas clair a priori que Φ soit surjective. L'application Φ est dite canonique (elle est indépendante du choix de bases). On dit que E est réflexif lorsque Φ est surjective. L'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est un exemple d'espace non réflexif.

————————

Exercice 1.13 (Entraînement)**.**
Soit E un K-ev de dimension n, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $f_1, \ldots, f_n \in E^*$. On suppose que

$$\det[f_i(x_j)] \neq 0.$$

Mq $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E^*.

————————

Supposons que les $x_1, \ldots, x_n$ ne forment pas une base de E. Quitte à changer l'ordre, on peut supposer qu'il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tels que $x_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j x_j$. Il s'ensuit que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$f_i(x_1) = \sum_{j=2}^n \lambda_j f_i(x_j),$$

i.e. la première colonne est combinaison linéaire des $(n-1)$ colonnes suivantes. Il s'ensuit que le déterminant est nul.

Supposons à présent que les $f_1, \ldots, f_n$ ne forment pas une base de E^*. On montre de façon similaire que les lignes de $[f_i(x_j)]$ sont liées, d'où $\det[f_i(x_j)] = 0$.

————————

Exercice 1.14 (Classique)**.** *Montrer que tout hyperplan de $M(n, \mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.*

————————

Rappelons qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire. Les formes linéaires sur $M(n, \mathbb{R})$ sont du type $M \mapsto \mathrm{Tr(AM)}$, pour une matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ (cf première feuille d'exercices), l'hyperplan sécrit ainsi

$$\mathcal{H}_A = \{M \in M(n, \mathbb{R})\,;\, \mathrm{Tr(AM)} = 0\}\,.$$

Si Tr(A) $= 0$, la matrice identité appartient à $\mathcal{H}_A$. On suppose donc que Tr(A) $\neq 0$. On peut effectuer un changement de base pour se ramener à une matrice A qui est triangulaire supérieure, quitte à travailler (temporairement) sur $\mathbb{C}$.

Si au moins deux éléments diagonaux de A sont non nuls, on peut trouver une matrice $M = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{H}_A$ qui est diagonale et inversible. En effet la condition d'inversibilité impose $\lambda_i \neq 0$, tandis que la condition linéaire est $\sum_{i=1}^n a_{ii}\lambda_i = 0$. Si tous les éléments diagonaux de A sont nuls, $\mathcal{H}_A$ contient toutes les matrices diagonales, en particulier celles inversibles dont les éléments diagonaux sont tous non nuls.

Il reste à traiter le dernier cas où seul un élément diagonal est non nul, disons $a_{11} \neq 0$, tandis que $a_{ii} = 0$ pour $2 \leq i \leq n$. On fabrique dans ce cas une matrice inversible par blocs : le premier bloc de taille 2 de A est du type $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sans perte de généralité, on peut donc prendre une matrice dont le premier bloc est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et dont le reste est diagonal avec (par exemple) des 1 sur la diagonale.

Une approche alternative consiste à raisonner sur le rang de A et à se ramener à une matrice A diagonale qui n'a que des 1 et des zéros sur la diagonale.

————————

Étant donné $A \subset E$, on note

$$A^\perp := \{f \in E^* \,;\, f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A\}.$$

C'est un s.e.v. de E^* appelé orthogonal de A. Si $B \subset E^*$, on note

$$B^\circ := \{x \in E \,;\, f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in B\}.$$

C'est un s.e.v. de E appelé orthogonal de B.

Exercice 1.15 (Cours)**.** *Soit E un K-e.v. de dimension finie, F sev de E et G sev de E^*. Montrer que*

1) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ *et* $(F^\perp)^\circ = F$.

2) $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ *et* $(G^\circ)^\perp = G$.

————————

Voir Gourdon pp128-130.

————————

Exercice 1.16 (Entraînement)**.**

Soit E un K-ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$. Montrer que

$$\varphi : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \in K^p$$

est surjective si et seulement si les (φ_j) sont linéairement indépendantes.

————————

Voir Gourdon Exo 1 p 131.

————————

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-e.v. Il induit un endomorphisme u^* de E^* (que l'on note également ${}^t u$), le transposé de u, défini par

$$u^* : f \in E^* \mapsto f \circ u \in E^*.$$

Exercice 1.17 (Cours)**.** *Montrer que*

1) u et u^* ont même rang.

2) $Im(u^*) = (Ker\, u)^\perp$

3) $Ker(u^*) = (Im\, u)^\perp$.

4) La matrice de u^* dans la base duale $\mathcal{B}^*$ est la transposée de la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$.

5) Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

————————

Consultez votre cours de référence en Algèbre linéaire.

————————

1.3 Systèmes linéaires

Peu de choses à vous rappeler ici si ce n'est que vous devez absolument connaître la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1.18 (Entraînement)**.** *Résoudre le système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

————————

Il y a une solution unique,

$$x_1 = 2/3,\ x_2 = 0 \text{ et } x_3 = -1/3.$$

————————

Exercice 1.19 (Entraînement)**.** *Calculer l'inverses de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

par la méthode du pivot de Gauss et via le calcul des cofacteurs.

————————

On obtient par chacune des méthodes

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

————————

Exercice 1.20 (Entraînement)**.** *Résoudre le système linéaire*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & a \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

On discutera selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

————————

Il y a une solution unique si $a = 1$, aucune solution si $a \neq 1$.

————————

Exercice 1.21 (Entraînement)**.** *Résoudre le système suivant,*

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{cases}$$

où x, y et z sont des réls positifs.

————————

On pose $a = \ln x, b = \ln y, c = \ln z$ et on résout le système linéaire induit.

————————

Chapitre 2

Matrices et Déterminants

2.1 Matrices

2.1.1 Ce qu'il faut savoir

On se donne K un corps de base (le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, très rarement celui des rationnels, un corps fini, etc).

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans K. C'est un K-ev lorsqu'on le munit des opérations fondamentales, addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.

On peut également multiplier une matrice de $M_{n,p}(K)$ et une matrice de $M_{p,q}(K)$, en particulier on peut toujours multiplier deux matrices carrées. On note $M_n(K)$ (ou bien $M(n, K)$) cet ensemble qui a du coup une structure de K-algèbre. On note $GL(n, K)$ l'ensemble des matrices carrées inversibles. C'est un groupe pour cette multiplication, appelé groupe linéaire. C'est sans aucun doute un des groupes les plus importants, il faut donc bien connaître certaines de ses propriétés.

Voici une liste non exhaustive de notions que vous devez maîtriser et qui interviennent dans les exercices à venir :
- la notion de matrice d'un endomorphisme ;
- la transposée d'une matrice ;
- la base canonique $E_{i,j}$ (et les produits de deux telles matrices) ;
- le rang (via les vecteurs colonnes ou les lignes par exemple) ;
- la trace (c'est une forme linéaire très spéciale sur $M(n, K)$) ;
- la notion de matrices équivalentes et surtout de matrices semblables ;
- les projecteurs et les symétries.

2.1.2 Quelques exercices

Exercice 2.1 (Entraînement).

1. Soit $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Calculer* J^k *pour* $k \geq 0$.

2. Calculer P^k *pour* $k \geq 0$*, où* $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Soit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Calculer* Q^k *pour* $k \geq 0$.

——————————

1) Il vient $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $J^k = 0$ pour $k \geq 3$.

2) Il vient $P^{3k+1} = P$, $P^{3k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $P^{3k} = \mathrm{Id}$.

3) On obtient $Q^2 = 3Q$. Une récurrence donne alors $Q^n = 3^{n-1}Q$.

——————————

Exercice 2.2 (Entraînement). *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$A^3 + 3A^2 + Id = 0.$$

Montrer que A *est inversible et calculer son inverse en fonction de* A.

——————————

La relation algébrique montre que 0 ne peut pas être valeur propre de la matrice A, elle est donc inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = -A^2 - 3A$.

——————————

Exercice 2.3 (Cours). *Soit* E *un ev de dimension finie et* $p \in \mathcal{L}(E)$ *un projecteur, i.e. tel que* $p \circ p = p$.

1) Montrer que $Ker\, p \oplus Ker\,(p - Id) = E$.

2) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de p *est diagonale, constituée uniquement de* 0 *et de* 1. *En déduire que* $rang(p) = Tr(p)$.

——————————

1) Observons que $x \in E$ se décompose en $x-p(x)+p(x)$ avec $p(x) \in Ker\,(p-Id)$ et $x-p(x) \in Ker\, p$ puisque $p(p(x)) = p(x)$. Ces deux noyaux sont en somme directe puisque X et $X-1$ sont premiers entre eux.

2) Il suffit de prendre la réunion d'une base de $Ker\, p$ et d'une base de $Ker\,(p-Id)$. Le nombre de 1 est la dimension de $Ker\,(p-Id) = Imp$, c'est aussi le rang et la trace de p.

——————————

Exercice 2.4. *Soit E un ev de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie, i.e. telle que $s \circ s = Id$.*

1) Montrer que $Ker\,(s + Id) \oplus Ker\,(s - Id) = E$.

2) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de p est diagonale, constituée uniquement de -1 et de 1.

Exercice 2.5 (Classique)**.**

Soit $A \in M(n, K)$ telle que $AB = BA$, $\forall B \in M(n, K)$.

1) Montrer que A est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda Id$.

2) Même question en supposant uniquement $AB = BA$, $\forall B \in GL(n, K)$.

————————

1) On peut utiliser les matrices E_{pq} de la base canonique de $M(n, K)$ pour tester la relation $AE_{pq} = E_{pq}A$. Il est utile de savoir calculer les produits $E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$. En décomposant $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}$, il vient ainsi

$$AE_{pq} = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}E_{pq} = \sum_{i} a_{ip}E_{iq} = \sum_{j} a_{qj}E_{pj} = E_{pq}A.$$

On en déduit $a_{ip} = 0$ si $i \neq p$ et $a_{ii} = a_{jj}$.

2) On se ramène a la question précédente en observant que les matrices inversibles forment un sous-ensemble dense quitte à travailler dans une extension de corps.

————————

Exercice 2.6 (Entraînement)**.**

Soit $M \in M(n, K)$ une matrice de rang 1. Montrer que $M^2 = Tr(M)M$.

————————

Le noyau d'une telle matrice est de dimension $n - 1$. Si sa trace est non nulle, la matrice est diagonalisable et le calcul de M^2 est immédiat dans une base diagonalisante.

Si la trace est nulle, on peut trigonaliser M et se ramener à une matrice semblable M' qui n'a que des zéros, sauf pour $m'_{12} = 1$ (pourquoi ?). On en déduit $M^2 = 0$.

————————

Exercice 2.7 (Classique)**.**

Soit $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont également semblables sur $\mathbb{R}$.

————————

Soit $P = R + iS \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $PA = BP$, avec $R = \Re(P)$ et $S = \Im(P)$. En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on observe que $RA = BR$ et $SA = BS$. Il s'ensuit que

$$(R + tS)A = B(R + tS)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il existe nécessairement un $t \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $R + tS$ est inversible, car le polynôme $\chi(t) = \det(R + tS)$ n'est pas nul en $t = i$.

————————

Exercice 2.8 (Classique)**.**
Soit $\varphi : M(n, K) \to K$ une forme linéaire.
1) Montrer qu'il existe une unique $A \in M(n, K)$ telle que

$$\varphi(M) = Tr(AM),\ \forall M \in M(n, K).$$

2) Montrer que si $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ pour tout $X, Y \in M(n, K)$, alors φ est proportionnelle à la trace.

————————

Voir Exercice 3 p132 dans le Gourdon.

Exercice 2.9 (Francinou Algèbre 2, 2.28)**.** *Soit $A \in M(n, K)$ telle que $Tr(A^k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que $A^n = 0$.*

————————

On trigonalise A (quitte à travailler dans une extension de corps) et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Les hypothèses indiquent que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$Tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0.$$

On peut regrouper ces valeurs propres en groupe de valeurs propres deux à deux distinctes pour conclure (par l'absurde) que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Il s'ensuit que A est nilpotente, donc $A^n = 0$.

————————

Exercice 2.10 (Classique)**.** *Soit $A, B \in M(n, K)$ telles que $AB - BA = A$.*
1) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$A^j B - BA^j = jA^j.$$

2) Montrer que A est nilpotente.
3) Donner un exemple de telles A, B pour $n = 2$ avec $A \neq 0$.

————————

1) On raisonne par récurrence en observant que

$$A^{j+1}B - BA^{j+1} = A\{A^j B - BA^j\} + (AB - BA)A^j = jA^{j+1} + A^{j+1}.$$

2) On considère l'endomorphisme

$$\Phi : A \in M(n, K) \mapsto AB - BA \in M(n, K).$$

Par hypothèse A^j est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre j pour tout $j \in \mathbb{N}$, à moins que $A^j = 0$. Comme le nombre de valeurs propres est fini ($\leq n^2$), on en déduit que $A^{n^2} = 0$, donc A est nilpotente.

3) On peut prendre par exemple $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

————————

Exercice 2.11 (Francinou Algèbre 2, 3.1)**.**

1) Mq les transvections $Id + \lambda E_{i,j}$, $i \neq j$ et $\lambda \in K^*$, engendrent $SL(n, K)$.

2) Mq les transvections et les dilatations engendrent $GL(n, K)$.

3) Montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe. Qu'en est-il de $GL(n, \mathbb{C})$?

————————

1) On observe qu'une transvection est inversible, de déterminant 1, avec

$$(Id + \lambda E_{i,j}) \cdot (Id - \lambda E_{i,j}) = Id,$$

donc l'inverse d'une transvection $(Id + \lambda E_{i,j})^{-1} = Id - \lambda E_{i,j}$ est une transvection. Tout produit de transvections est de déterminant 1 également.

On note à présent que multiplier à gauche (respectivement à droite) une matrice $A \in SL(n, K)$ par $Id + \lambda E_{i,j}$ revient à faire subir à A la transformation élémentaire $C_j \to C_j + \lambda C_i$ (respectivement $L_i \to L_i + \lambda L_j$).

Un résultat de cours (c'est plus ou moins l'algorithme de Gauss) assure que de telles opérations élémentaires sur les colonnes, puis sur les lignes, permettent de transformer toute matrice de déterminant 1 en l'identité, i.e.

$$T_1 \cdots T_s A S_1 \cdots S_r = Id,$$

on en déduit que $A = T'_s \cdots T'_1 S'_r \cdots S'_1$ est un produit de transvections.

2) On se ramène à la question précédente en utilisant une matrice diagonale pour ramener le déterminant à 1.

3) $GL(n, \mathbb{R})$ contient (au moins et en fait) deux composantes connexes, puisque l'image du déterminant det : $GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes. Cet argument ne s'applique pas à $GL(n, \mathbb{C})$ car $\mathbb{C}^*$ est connexe. De fait $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe, il suffit en effet de déformer continument n'importe quelle matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ sur Id. Si A appartient à $SL(n, \mathbb{C})$, on peut utiliser la décomposition de la question 1,

$$A = (Id + \lambda_1 E_{i_1,j_1}) \cdots (Id + \lambda_p E_{i_p,j_p})$$

et considérer, pour $0 \leq t \leq 1$

$$A(t) = (Id + t\lambda_1 E_{i_1,j_1}) \cdots (Id + t\lambda_p E_{i_p,j_p}).$$

On obtient ainsi un chemin continu de matrices dans $SL(n, \mathbb{C})$ tel que $A(0) = Id$ et $A(1) = A$. Lorsque $\det A = re^{i\theta} \neq 1$, on commence par considérer le chemin

$$s \in [0, 1] \mapsto B(s) = (1 - s + sr)e^{is\theta} \frac{A}{\det A} \in GL(n, \mathbb{C})$$

qui déforme continument $A = B(1)$ sur $B(0) \in SL(n, \mathbb{C})$.

————————

2.2 Déterminants

2.2.1 Ce qu'il faut savoir

Définition. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors l'espace des formes n-linéaires alternées sur K est de dimension 1, i.e. elles sont toutes proportionnelles. On fixe la constante de proportionnalité en imposant à une telle forme (non nulle) de valoir 1 sur une base $\mathcal{B}$ de E : c'est le déterminant (relatif à cette base)

Lorsque $E = K^n$, on appelle déterminant (par rapport à la base canonique) l'unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur la base canonique. Si on écrit les vecteurs les uns à la suite des autres en colonne, on obtient ainsi la définition du déterminant d'une matrice carrée.

Formulaire. Il faut connaître (et savoir démontrer) les formules suivantes :
– $\det(AB) = \det A \det B$; $\det^t A = \det A$;
– $A \in GL(n, K)$ ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;
– $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$; Règle de calcul de Sarrus ($n = 3$) ;
– Attention ! $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$...
et surtout la très jolie (et utile) formule

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

où S_n désigne le groupe symétrique (des permutations sur n éléments).

Cofacteurs. On note traditionnellement $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de taille $n-1$ calculé à partir de A en effaçant la ligne i et la colonne j. On appelle cofacteurs d'ordre (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ et comatrice $Com(A)$ la matrice des cofacteurs. L'intérêt de ces notions réside dans les observations suivantes :

i) Formule de Laplace :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{i,j}(A).$$

Dans la première égalité, on a développé le déterminant par rapport à la j^{eme} colonne, dans la deuxième, on a développé par rapport à la i^{eme} ligne.

ii) Calcul de l'inverse : si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t Com(A).$$

Lorsque A n'est pas inversible, on a tout de même la relation très utile

$$A^t Com(A) = \det A \cdot Id.$$

Polynôme caractéristique. C'est le polynôme unitaire de degré n défini par

$$\chi_A(t) := \det(tId - A).$$

Attention, certains auteurs considèrent plutôt $\det(A - tId)$. Ses racines sont les valeurs propres de A . Lorsque $n = 2$, il vient

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{trA}\, t + \det A.$$

Comme l'espace vectoriel $M(n, K)$ est de dimension n^2, la matrice A est racine d'un polynôme de degré $\leq n^2$ (pourquoi ?). Le remarquable *Théorème de Cayley-Hamilton* assure qu'elle annule en fait un polynôme de degré n,

$$\chi_A(A) = 0.$$

Il existe de nombreuses démonstrations de ce résultat, certaines très élégantes mais également un peu dangereuses si on ne les maîtrise pas bien à l'oral...La plus laborieuse (mais la plus fiable si vous la travaillez bien) est via la réduction des endomorphismes.

On appelle polynôme minimal le polynôme unitaire de plus bas degré qui annule la matrice A. Une matrice est diagonalisable ssi son polynôme minimal n'a que des racines simples. Une traduction pratique de ce résultat fondamental est qu'une matrice est diagonalisable ssi elle est annulée par un polynôme qui n'a que des racines simples (ce n'est pas nécessairement son polynôme minimal). Par exemple un projecteur (resp. une symétrie) est diagonalisable car il est annulé par $X^2 - X$ (resp. $X^2 - 1$).

2.2.2 Quelques exercices

Exercice 2.12 (Entraînement)**.** *Calculer le déterminant des matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

————————

On peut calculer le premier déterminant en utilisant la règle de Sarrus, on obtient $\det A = 0$. Pour le deuxième on développe (trois fois) par rapport à la première colonne, il vient $\det B = -4$.

————————

Exercice 2.13 (Francinou Algèbre 2, 1.10). *Calculer le déterminant de Vandermonde*

$$V(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

————————

C'est un grand classique (présent dans tous les ouvrages) que vous devez absolument connaître. On procède par récurrence. L'initialisation ($n = 1$) ne pose pas de difficulté, on suppose l'hypothèse satisfaite au rang $n-1$ ($n \geq 2$) et on note $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$. C'est un polynôme en x de degré $(n-1)$ comme on peut s'en convaincre en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne. Il admet $a_1, \ldots, a_{n-1}$ comme racines, donc

$$P(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}),$$

où c est le coefficient dominant. Celui-ci est le coefficient de x^{n-1}, il s'obtient en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne et par rapport à la dernière colonne, on observe que $c = V(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Ainsi

$$V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_1, \ldots, a_{n-1})(a_n - a_1) \cdots (a_n - a_{n-1}) = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i).$$

————————

Exercice 2.14 (Francinou Algèbre 2, 1.24).

Soit $A \in M(n, K)$ et $B = ComA$. Montrer que $rang(B) \in \{0, 1, n\}$.

————————

On utilise la formule

$$A\,{}^t\!ComA = \det A \,\mathrm{Id}.$$

i) Si A est inversible, il en est de même de $ComA$ et réciproquement, donc

$$rang(A) = n \Leftrightarrow rang(B) = n.$$

ii) Observons que $rang(A) \leq n-2$ ssi tous les cofacteurs sont nuls, donc

$$rang(A) \leq n-2 \Leftrightarrow rang(B) = 0.$$

iii) Supposons enfin $rang(A) = n-1$. Il y a au moins un cofacteur non nul, donc $rang(B) \geq 1$. Par ailleurs $AB = 0$ avec $rang(A) = n-1$ donc $rang(B) \leq 1$. Ainsi

$$rang(A) = n-1 \Leftrightarrow rang(B) = 1.$$

Voir également Gourdon Exo 11 p146.

————————

Exercice 2.15 (Classique). *Calculer le déterminant de la matrice*

$$bJ + (a-b)Id$$

où J désigne la matrice dont tous les coefficients valent 1.

—————————

On note e_i les vecteurs de la base canonique et $v = \sum_{i=1}^n e_i$. On observe que

$$\det(bJ + (a-b)Id) = \det((a-b)e_1 + bv, \dots, (a-b)e_n + bv).$$

On développe par n-linéarité en observant que le déterminant est nul si on garde deux fois le vecteur v, il vient ainsi

$$\begin{aligned} &\det(bJ + (a-b)Id) \\ = \quad & (a-b)^n \det(e_1, \dots, e_n) + b(a-b)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, e_{i-1}, v, \dots, e_n) \\ = \quad & (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}[a + (n-1)b]. \end{aligned}$$

—————————

Exercice 2.16 (Entraînement). *Soit*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M.

2) Calculer les sous-espaces propres de M.

3) En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

—————————

1) Un calcul direct montre que $\chi_M(X) = (X-1)^2(X+1)$.

2) On vérifie que le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension deux, engendré par $f_1 = e_1$ et $f_2 = e_2 - 2e_3$, tandis que E_{-1}, celui associé à la valeur propre -1 est de dimension un, engendré par $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

3) On note P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres $\{f_1, f_2, f_3\}$. Il vient $M = P \cdot \mathrm{Diag}(1, 1, -1) \cdot P^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit $M^n = P \cdot \mathrm{Diag}(1, 1, (-1)^n) \cdot P^{-1}$ donc $M^{2n} = Id$ et $M^{2n+1} = M$.

—————————

Exercice 2.17 (Cours). *Soit $M \in M(n, \mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible dans $M(n, \mathbb{Z})$ ssi* $\det M \in \{\pm 1\}$.

—————————

Si M est inversible dans $M(n, \mathbb{Z})$ alors $M^{-1} \in M(n, \mathbb{Z})$ donc $\det M^{-1} = (\det M)^{-1} \in \mathbb{Z}$, d'où $\det M = \pm 1$.

Réciproquement les cofacteurs de M sont des entiers. Si $\det M = \pm 1$, alors $(\det M)^{-1} \in \mathbb{Z}$ donc

$$M^{-1} = (\det M)^{-1}\, {}^t\mathrm{Com\,M} \in \mathrm{M(n, \mathbb{Z})}.$$

—————————

Exercice 2.18 (Entraînement). *Soit N une matrice nilpotente. Montrer que*

$$\det(Id + N) = 1.$$

—————————

On peut trigonaliser $Id + N$ pour conclure.

—————————

Exercice 2.19 (Classique). *Calculer le déterminant de Cauchy*

$$C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) := \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}.$$

—————————

Voir Gourdon Exo7 p143.

—————————

2.3 Exponentielle de matrice

Voici une compilation d'exercices portant sur la notion d'exponentielle de matrices. Les exercices sont tirés des recueils autorisés suivants :

- *Algèbre, 2e édition* par X.Gourdon.
- *Algèbre linéaire, 2e édition* par J.Grifone.
- *Exercices corrigés posés aux oraux X-ENS*, par E.Leichtnam et X.Schauer.

2.3.1 Définition, calculs

Exercice 2.20. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que c'est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Exercice 2.21. *Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$ et N une norme d'opérateur sur $M(n, C)$. Montrer que la série $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente et que*

$$N\left(\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}\right) \leq \sum_{n\geq 0} \frac{N(A)^n}{n!}.$$

Exercice 2.22. *On considère la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Calculer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

2) Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Calculer $\exp B$ *et* $\exp A$.

Exercice 2.23. *Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $< n$ tel que $\mathrm{e}^A = P(A)$.*

Exercice 2.24. *Soit $A \in M(2, \mathbb{C})$ qui admet deux valeurs propres distinctes $a \neq b$. Montrer que*

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a - b} A + \frac{a\mathrm{e}^b - b\mathrm{e}^a}{a - b} \mathrm{Id}.$$

Donner une formule pour e^A lorsque $a = b$.

Exercice 2.25. *Soit $J_\lambda \in M(n, \mathbb{R})$ la matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à λ, ceux au dessus de la diagonale sont égaux à 1, et les autres éléments sont nuls. Calculer* $\exp(J_\lambda)$.

2.3.2 Propriétés

Exercice 2.26. *Soit $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ t.q. $AB = BA$.*

1) Montrer que $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

2) Indiquer un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

Exercice 2.27. *Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$. Montrer que*

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{TrA}).$$

Exercice 2.28. *Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{C})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi'(t) = A\varphi(t).$$

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(t) = \varphi(0)\exp(tA)$. En déduire une nouvelle solution de l'exercice 2.26.

Exercice 2.29. *On appelle sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{R})$ une application continue $\varphi : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t).$$

Soit φ un sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{R})$.

1) Que vaut $\varphi(0)$?

2) Donner la forme de φ si on le suppose de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2.30. *Montrer que l'application exponentielle*

$$\exp : M(n, \mathbb{C}) \to GL(n, \mathbb{C})$$

est surjective mais pas injective.

Exercice 2.31. *Est-ce que l'application exponentielle*

$$\exp : M(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$$

est surjective ? injective ?

Exercice 2.32.

1) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est connexe par arcs.

2) Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Est-ce que $GL(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

4) Montrer que $SL(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 2.33. *Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre l'ensemble des matrices symétriques réelles et celui des matrices symétriques réelles définies positives.*

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

3.1 Ce qu'il faut savoir

Voici une compilation portant sur les parties 5.7-8 (et 6.1) du programme.

Objectif

Étant donné un endomorphisme f d'un K-ev de dimension n (ou une matrice de $M(n, K)$), on cherche une base dans laquelle f prend la forme la plus "simple" possible, ce qui permet à la fois de mieux comprendre cet endomorphisme, et de mener à bien des calculs (de f^j, A^j ou $\exp f, \exp A$ pour résoudre par exemple une équation différentielle linéaire) qui seraient sinon particulièrement compliqués.

Les héros

Il faut comprendre les "invariants de similitude", c'est à dire les quantités qui restent invariantes lorsque l'on change de base :

- les valeurs propres (vaps) : ce sont les $\lambda \in K$ tels que $Ker(f - \lambda Id)$ n'est pas réduit à $\{0\}$; il y en a au plus n, il y en a au moins une si $K = \mathbb{C}$, il peut y en avoir aucune si $K = \mathbb{R}$;
- les fonctions symétriques des vaps (déterminant, trace, etc) ;
- les sous-espaces propres $Ker(f - \lambda Id)$, ils sont en somme directe ;
- les sous-espaces caractéristiques $Ker(f - \lambda Id)^m$ avec m suffisamment grand (suite stationnaire), ils sont également en somme directe ;
- le polynôme caractéristique $\chi_f(X) := \det(XId - f)$ dont les racines sont précisément les valeurs propres ;
- le polynôme minimal : c'est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule f : il est de degré 1 ssi f est une homothétie.

Le programme

Une liste non exhaustive de résultats à votre programme :
- $\chi_f(f) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton) [5.7] ;
- f est diagonalisable ssi $P(f) = 0$, P scindé à racines simples [5.7] ;
- on peut trigonaliser si χ_f est scindé (e.g. si $K = \mathbb{C}$) [5.7] ;
- décomposition de Dunford (f =diag.+nilpotent qui commutent) [5.7] ;
- les diagonalisables sont denses si $K = \mathbb{C}$ [5.8] ;
- un endomorphisme symétrique réel est diagonalisable [6.1].

La dimension 2

C'est un excellent exercice de révision de lister de façon exhaustive ce qui se passe en petite dimension (distinguer $K = \mathbb{R}/K = \mathbb{C}$) :
- soit il y a 2 vaps réelles distinctes (f est diagonalisable) ;
- soit f est une homothetie (1 seule vap, diagonalisable) ;
- soit f s'écrit ds une base $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (1 seule vap, non diagonalisable) ;
- soit 2 vaps complexes non réelles (diagon. sur $\mathbb{C}$, pas sur $\mathbb{R}$) et

$$f = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad f = r \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

3.2 Diagonalisation

Posez vous des questions !

Les endomorphismes diagonaux sont les plus simples à comprendre et à manipuler pour les applications. On essaie donc de se ramener à ce cas en effectuant un changement de base.

Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base constituée de vecteurs propres. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe (voir Exercice 1), cela revient également à dire que

$$\bigoplus_{i=1}^{s} Ker(f - \lambda_i Id) = E.$$

Le prototype d'une matrice non-diagonalisable est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il faut sans cesse vous poser des questions simples sur les notions que vous rencontrez. Par exemple, le produit (resp. la somme) de deux matrices diagonales est une matrice diagonale :
- En est-il de même des endomorphismes diagonalisables ?
- L'inverse d'un diagonalisable inversible est-il diagonalisable ?
- Un endomorphisme réel diagonalisable sur $\mathbb{C}$ l'est-il sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.1 (Cours). *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (i.e. $p \circ p = p$).*
1) Montrer que $Ker(p) \oplus Ker(p - Id) = E$.
2) En déduire que p est diagonalisable.

————————

Tout provient de la décomposition $x = [x - p(x)] + p(x)$, le premier vecteur appartient à $Ker(p)$, le second à $Ker(p - Id)$.

Consultez votre cours de référence en Algèbre linéaire.

————————

Exercice 3.2 (Cours). *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie (i.e. $s \circ s = s$).*
1) Montrer que $Ker(s + Id) \oplus Ker(s - Id) = E$.
2) En déduire que s est diagonalisable.

————————

Tout provient de la décomposition $x = [x + s(x)]/2 + [x - s(x)]/2$, le premier vecteur appartient à $Ker(s - Id)$, le second à $Ker(s + Id)$.

Consultez votre cours de référence en Algèbre linéaire.

————————

Exercice 3.3 (Cours). *Montrer que les sous-espaces propres sont en somme directe.*

————————

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les vaps d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $E_i = Ker(f - \lambda_i Id)$ les sous-espaces propres correspondants. Il s'agit de montrer que l'application linéaire

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_s) \in E_1 \times \cdots \times E_s \mapsto x_1 + \cdots x_s \in E$$

est injective. Supposons que $x_1 + \cdots x_s = 0$. On applique f pour obtenir une nouvelle relation linéaire $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_s x_s = 0$. En appliquant à nouveau f plusieurs fois, on obtient le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{llrl} x_1 & + \cdots + & x_s & = 0 \\ \lambda_1 x_1 & + \cdots + & \lambda_s x_s & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{s-1} x_1 & + \cdots + & \lambda_s^{s-1} x_s & = 0 \end{array} \right.$$

Celui-ci est inversible car la matrice de Vandermonde est de déterminant non nul lorsque les λ_i sont deux à deux distincts.

————————

Exercice 3.4 (Cours). *Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si il annule $P(f) = 0$ un polynôme $P \in K[X]$ scindé à racines simples.*

————————

Supposons que f est diagonalisable, i.e. $\oplus_{i=1}^{s} Ker(f - \lambda_i Id) = E$. Le polynôme $P(x) = \Pi_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ est scindé, à racines simples, et il est annulé par f. En effet tout $x \in E$ se décompose en $x = x_1 + \ldots + x_s$ avec $x_i \in Ker(f - \lambda_i Id)$. On a $(f - \lambda_i Id)(x_i) = 0$ donc $P(f)(x_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq s$, donc $P(f) = 0$.

Réciproquement supposons que $P(X) = \Pi_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)$ soit annulé par f. Le théorème des noyaux assure que

$$E = Ker P(f) = \bigoplus_{i=1}^{s} Ker(f - \lambda_i Id).$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en prenant la réunion de bases de chacun des $Ker(f - \lambda_i Id)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

————————

Exercice 3.5 (Cours)**.** *Montrer qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.*

————————

La démonstration se fait en deux temps. On commence par montrer que S admet une valeur propre réelle, puis on montre que le supplémentaire orthogonal du sous-espace propre est stable, pour pouvoir procéder par récurrence.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de S et $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre complexe associé. Comme S est symétrique réelle, il vient

$$\lambda ||X||^2 = \langle SX, X \rangle = \langle X, SX \rangle = \overline{\lambda} ||X||^2,$$

où $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i \overline{Y_i}$ désigne le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$. Comme $||X|| \neq 0$, on en déduit $\lambda \in \mathbb{R}$, et on travaille dans la suite dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $F = Ker(S - \lambda Id)$ et $F^{\perp}$ son supplémentaire orthogonal pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in F^{\perp}$ alors pour tout $y \in F$, on obtient

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0,$$

donc $Sx \in F^{\perp}$. Ainsi S induit un endomorphisme symétrique s du sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ de dimension $\dim F^{\perp} < n$. L'hypothèse de récurrence assure que s est diagonalisable sur $F^{\perp}$ dans une base $\mathcal{B}^{\perp}$. On obtient une base diagonalisant S, en réunissant $\mathcal{B}^{\perp}$ et une base de $F = Ker(S - \lambda Id)$.

————————

Exercice 3.6 (Grifone Exo 34 p206)**.**

On suppose $K = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est également.

2) Montrer par un exemple simple que la réciproque est fausse.

3) Montrer que si f^2 est diagonalisable, alors

$$(f \text{ diagonalisable }) \Longleftrightarrow Ker\, f = Ker\, f^2.$$

————————

1) Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de vecteurs propres pour f, i.e. $f(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in K$, alors $f^2(e_i) = \lambda_i^2 e_i$, donc $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres pour f^2.

2) Un endomorphisme nilpotent $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice 2 n'est pas diagonalisable, pourtant $f^2 = 0$ est diagonal dans n'importe quelle base.

3) L'endomorphisme f^2 est diagonalisable ssi la somme directe de ses sous-espaces propres $Ker(f^2 - \lambda Id)$ est égale à E. Pour $\lambda \neq 0$, il résulte du théorème des noyaux que

$$Ker(f^2 - \lambda Id) = Ker(f - \sqrt{\lambda} Id) \oplus Ker(f + \sqrt{\lambda} Id),$$

où $\pm\sqrt{\lambda}$ désignent les deux racines de λ (qui sont bien définies sur $\mathbb{C}$).

Si $Ker(f) = Ker(f^2)$, on en déduit

$$Ker(f) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} Ker(f - \sqrt{\lambda} Id) \oplus Ker(f + \sqrt{\lambda} Id) = E,$$

ce qui assure que f est diagonalisable. Réciproquement comme $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, cette égalité (qui équivaut à f diagonalisable) n'a lieu que si $Ker(f) = Ker(f^2)$.

Attention : on a utilisé l'existence de racines carrées sur le corps de base. La même preuve fonctionne sur un corps algébriquement clos, mais pas sur $\mathbb{R}$. La rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ fournit un exemple d'endomorphisme f non-diagonalisable tel que $f^2 = -Id$ est diagonal, avec $Ker(f^2) = Ker(f) = 0$.

Voir également Grifone Exo 34 p206.

————————

Exercice 3.7 (Gourdon Thm4 p166).

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables d'un K-ev de dimension finie. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g sont simultanément diagonalisables.

————————

On observe que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable est un endomorphisme diagonalisable de ce sev (assurez vous que savez le justifier).

Soit λ_i, $1 \leq i \leq s$, les valeurs propres de f et $F_i = Ker(f - \lambda_i Id)$. On observe que F_i est stable par g : en effet si $x \in F_i$, i.e. $f(x) = \lambda_i x$, alors

$$f(g(x)) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda g(x),$$

donc $g(x) \in F_i$. Ainsi g induit un endomorphisme g_i diagonalisable de F_i.

Soit $\mathcal{B}_i$ une base de F_i constituée de vecteurs propres de g_i. dans cette base g_i est diagonal, ainsi que la restriction de f qui est une homothétie. Il s'ensuit que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{B}_s$ est une base de E dans laquelle f et g sont diagonalisés tous les deux.

Voir également Gourdon Thm4 p166.

————————

Exercice 3.8 (Grifone exo 11 p202).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement sa trace est nulle.

————————

Le noyau de f est de dimension $n-1$. Si la trace de f est non nulle, il y a donc un espace propre de dimension 1 (celui associé à la trace) et un espace propre de dimension $n-1$, donc f est diagonalisable.

Si la trace de f est nulle, 0 est la seule valeur propre de f, donc f est un nilpotent non diagonalisable puisque de rang 1.

Voir également Gourdon exo 2 p170 et Grifone exo 11 p202.

Exercice 3.9 (Gourdon exo 1 p185).

Mque l'ensemble des endomorphismes diagonalisables de $\mathbb{C}^n$ est dense. Est-ce le cas des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$?

————————

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $\chi(X) = \pi_{\ell=1}^n (X - \lambda_\ell)$ son polynôme caractéristique, les racines λ_ℓ de χ n'étant pas nécessairement distinctes. On choisit une base qui trigonalise f et on identifie f et sa matrice M dans cette base. On considère, pour $\varepsilon > 0$,

$$M_\varepsilon := M + Diag(\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, n\varepsilon),$$

dont le polynôme caractéristique est

$$\chi_\varepsilon(X) = \pi_{\ell=1}^n (X - \lambda_\ell - \ell\varepsilon).$$

On peut trouver une suite $\varepsilon_j \to 0$ de valeurs de ε telles que toutes les racines de χ_{ε_j} sont deux à deux distinctes. Il s'ensuit que M_{ε_j} est diagonalisable et converge vers M, lorsque $j \to +\infty$.

Ce résultat de densité est faux dans $\mathbb{R}^2$. La rotation R d'angle $\pi/2$ n'est pas diagonalisable. Son polynôme caractéristique est $\chi = X^2 + 1$, dont le discriminant est strictement négatif. Si une suite f_j d'endomorphismes converge vers R, leurs polynômes caractéristiques χ_j convergent vers χ. Pour j assez grand, le discriminant de χ_j est donc strictement négatif, donc f_j ne peut pas être diagonalisable.

Voir également Gourdon exo 1 p185.

————————

Exercice 3.10 (Entraînement). *Mq la matrice suivante est diagonalisable*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

————————

Voir Grifone Ex1 p168.

————————

3.3 Trigonalisation

Les nilpotents

Une matrice $N \in M(n, K)$ est dite nilpotente si $N^s = 0$ pour un entier $s \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble de ces matrices.

- Vérifiez que l'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas stable pour l'addition des matrices (pas plus que pour la multiplication) lorsque $n \geq 2$;
- Vérifiez que l'ensemble $\mathcal{N}$ est connexe.
- Montrer qu'une matrice nilpotente n'a que zéro pour valeur propre. Que pensez vous de la réciproque ? sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Lorsque $K = \mathbb{C}$ (ou plus généralement lorsque le polynôme caractéristique est scindé), tout endomorphisme f se décompose de façon unique en $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et avec $d \circ n = n \circ d$. Il s'ensuit que f est diagonalisable ssi $n = 0$. Pour bien "réduire" f, il faut savoir réduire n.

Exercice 3.11 (Cours)**.** *Montrer par récurrence sur la dimension que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est trigonalisable.*

————————

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, f admet une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Soit E_1 le sous-espace propre associé. Si $E_1 = E$ alors f est une homothétie de rapport λ_1, elle est diagonale dans n'importe quelle base.

Si $1 \leq \dim E_1 < n$, on fixe F un supplémentaire de E_1, et on note $\pi : E \to F$ la projection sur F parallèlement à E_1. On applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $g : x \in F \mapsto \pi \circ f(x) \in F$ de l'ev F de dimension $\dim F = \dim E - \dim E_1 < \dim E$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F trigonalisante pour g, $\mathcal{B}_{E_1}$ une base de E_1 diagonalisante pour $f_{|E_1}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{E_1} \vee \mathcal{B}_F$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

————————

Exercice 3.12 (Classique)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1) Montrer que la suite $(Ker(f^j))_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante stationnaire.

2) Montrer que la suite $(\dim Ker(f^{j+1}) - \dim Ker(f^j))_j$ est décroissante.

3) Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\dim Ker(f^j) = j$, $0 \leq j \leq n$.

4) Exprimer des propriétés analogues sur la suite des images itérées.

Si λ est une valeur propre de f, la suite $j \mapsto Ker(f - \lambda Id)^j$ est une suite croissante stationnaire (la dimension ne peut pas croître indéfiniment). On note m l'indice correspondant, le sev $C_\lambda = Ker(f - \lambda Id)^m$ s'appelle un sev caractéristique (associé à λ).

Exercice 3.13 (Cours)**.** *Mque les sevs caractéristiques sont en somme directe.*

————————

Soit $C_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{m_i}$, $1 \leq i \leq s$, les sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme f. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux, il résulte donc du théorème des noyaux que

$$KerP(f) = \bigoplus_{i=1}^{s} Ker(f - \lambda_i Id)^{m_i},$$

avec $P(X) = \Pi_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Cela montre en particulier que les C_i sont en somme directe. [De plus cette somme directe est égale E par Cayley-Hamilton.]

—————————

Exercice 3.14 (Entraînement)**.**
Montrer qu'un endomorphisme nilpotent est diagonalisable ssi il est nul.

—————————

Rappelons que 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent. Si un tel endomorphisme n est diagonalisable, sa matrice est nulle dans une base de vecteurs propres, donc dans toute base, i.e. $n = 0$. La réciproque est claire.

—————————

Exercice 3.15 (Entraînement)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On note s le plus petit entier tel que $f^s \equiv 0$ (l'indice de f) et $s(x)$ le plus petit entier tel que $f^{s(x)}(x) = 0$.*

1) Mq pour tout $x \in E$, $s(x) \leq s$, et qu'il existe $x \in E$ tel que $s(x) = s$.

2) On suppose que $s = n = \dim E$. Soit $x \in E$ tel que $s(x) = s = n$. Montrer que la famille $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E. Expliciter la matrice de f dans cette base. Quel est le polynôme minimal de f ?

3) Montrer que pour tout endomorphisme nilpotent non nul d'un ev de dimension deux, il existe une base dans laquelle sa matrice est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2. Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec indice 3.

—————————

1) C'est une conséquence de la définition que $s(x) \leq s$ pour tout x. Si $s(x) \leq k$ pour tout x alors $f^k \equiv 0$, donc il existe au moins un x tel que $s(x) = s$.

2) Supposons qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f^j(x) = 0$. Alors

$$0 = f^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f^j(x)\right) = \lambda_0 f^{n-1}(x),$$

donc $\lambda_0 = 0$ puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$. En appliquant à présent f^{n-2} (plutôt que f^{n-1}), on obtient de même $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$, donc $\lambda_1 = 0$. Une récurrence permet ainsi de montrer que $\lambda_j = 0$ pour tout $0 \leq j \leq n-1$: la famille $\{x, f(x), \ldots, \lambda_0 f^{n-1}(x)\}$ est donc libre. Dans cette base la matrice de f est triangulaire supérieure, avec des 1 juste au-dessus de la diagonale et des zéros partout ailleurs. Son polynôme minimal est X^n.

3) En dimension deux un endomorphisme nilpotent est soit nul (indice $s = 1$), soit d'indice $s = 2$. On peut donc appliquer la question précédente pour conclure.

4) On note $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 3$, on considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$. C'est un endomorphisme nilpotent d'indice 2. Pour $n = 4$, on considère

$$g(e_1) = g(e_2) = 0 \text{ et } g(e_3) = e_2,\ g(e_4) = e_3.$$

————————

Exercice 3.16 (Entraînement)**.** *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n et $\Phi : P \in E \mapsto P(X) - P(X-1) \in E$.*

1) Calculer $Ker\,\Phi$ et $Im\,\Phi$.

2) Montrer que Φ est nilpotent.

3) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de Φ n'a que des zéros, sauf juste au dessus de la diagonale où elle n'a que des 1.

————————

On observe que $Ker\,\Phi$ est constitué des polynômes constants, tandis que $Im\,\Phi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il s'ensuit que $Im\,\Phi^j = \mathbb{R}_{n-j}[X]$ pour $0 \leq j \leq n$ et $\Phi^{n+1} = 0$, donc Φ est nilpotent d'indice $n+1$ (attention $E = \mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$). L'existence d'une base qui met Φ sous forme de Jordan a été vue précédemment.

————————

Exercice 3.17 (Classique)**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Mque si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g sont simultanément trigonalisables.*

3.4 Pot pourri

Exercice 3.18 (Gourdon exo 3 p201)**.** *Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M(n, \mathbb{R})$ telles que A est semblable à $2A$.*

————————

On peut réduire ces matrices sur $\mathbb{C}$. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres, mais les valeurs propres de $2A$ sont les doubles de celles de A, c'est donc que 0 est l'unique valeur propre de A qui est donc nilpotente.

Réciproquement supposons A nilpotente et observons que $2A$ l'est également. On peut par exemple réduire A sous forme de Jordan et on observe que dans une telle base $2A$ a une forme similaire, avec des 2 là où A produit des 1. Un changement de base diagonal permet enfin de montrer que $2A$ est semblable à A.

Autrement dit : l'ensemble des matrices $A \in M(n, \mathbb{R})$ telles que A est semblable à $2A$ est l'ensemble des matrices nilpotentes.

Voir également Gourdon exo 3 p201.

—————————

Exercice 3.19 (Gourdon Exo 1 p178). *Soit $f \in GL(E)$. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.*

—————————

Le théorème de Cayley-Hamilton assure que f annule son polynôme caractéristique dont le terme constant est $a_0 = \pm \det f \neq 0$. On en déduit

$$f^{-1} = a_0^{-1} f^{-1} a_0 Id = a_0^{-1} f^{-1} \left(-a_1 f - a_2 f^2 - \cdots - f^n\right) = -\frac{a_1}{a_0} Id - \cdots - \frac{1}{a_0} f^{n-1}.$$

Voir également Gourdon Exo 1 p178.

—————————

Exercice 3.20 (Gourdon Exo 2.a p186.). *Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$. Montrer que*

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr} A).$$

—————————

On trigonalise A pour se ramener à $A' = D + N$ avec $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale, N triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, et $DN = ND$. Il vient $e^{A'} = e^D e^N$ d'où $\det(\exp A) = \det e^D = \exp(\mathrm{Tr} A)$ puisque $e^N = Id + N'$ est de déterminant 1.

Voir également Gourdon Exo 2.a p186.

—————————

Exercice 3.21 (Grifone Exo 16 p203). *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme $\Phi : f \in E \mapsto g \in E$ avec*

$$g(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t) dt.$$

Est-ce que Φ est diagonalisable ?

—————————

Observons que Φ est de rang 1 (tous les vecteurs images sont proportionnels à la fonction exponentielle) et que $g' = g$. On vérifie que 0 et 1 sont les uniques valeurs propres. Le sous-espace propre associé à 1 est la droite engendrée par la fonction exponentielle, celui associé à 0 est l'hyperplan

$$Ker(\Phi) = \left\{ f \in E\,;\, \int_0^1 e^{-t} f(t) dt = 0 \right\}.$$

L'endomorphisme Φ est diagonalisable, c'est le projecteur sur $Ker(\Phi - Id)$ parallèlement à $Ker\,\Phi$.

Voir également Grifone Exo 16 p203.

—————————

Exercice 3.22 (Classique)**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $(||f^n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

1) Montrer que les valeurs propres de f sont de module ≤ 1 et que la partie de module 1 est diagonalisable.

2) Montrer que $\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} f^j$ converge vers un projecteur.

————————

1) On peut trigonaliser f et raisonner bloc par bloc. On obtient λ^n sur la diagonale, on a donc nécessairement $|\lambda| \leq 1$. Si le bloc n'est pas diagonalisable, on obtient également des termes $n\lambda^{n-1}$ juste au dessus de la diagonale (dans une base de Jordan) donc $|\lambda| < 1$.

2) Toutes les contributions convergent vers zéro sauf celle du bloc correspondant à la valeur propre 1. On en déduit que $\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} f^j$ converge vers le projecteur sur $Ker(f - Id)$ parallèlement à la somme des autres espaces caractéristiques.

————————

Exercice 3.23 (Classique)**.** *Soit $A \in M(n, \mathbb{R}_*^+)$. Montrer que le rayon spectral de A (le plus grand module des valeurs propres complexes) est une valeur propre de A et qu'elle admet un vecteur propre à coordonnées positives.*

————————

Soit λ la plus grande valeur propre complexe de A en module, i.e. $|\lambda| = \rho(A)$, où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A. Soit $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ et $x = (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. L'inégalité triangulaire appliquée aux n égalités $Az = \lambda z$ donne

$$\rho(A)x = |\lambda z| = |Az| \leq Ax,$$

puisque A est à coefficients positifs.

On va montrer que cela implique $Ax = \rho(A)x$, ce qui assurera que $\rho(A)$ est une valeur propre et qu'il existe un vecteur propre associé à coordonnées positives.

Supposons au contraire que $y = Ax - \rho(A)x \neq 0 \in \mathbb{R}_+^n$. Quitte à changer x en Ax et y en Ay, on peut supposer que x et y sont à coordonnées strictement positives, on peut donc fixer $\varepsilon > 0$ tel que $y \geq \varepsilon x$, soit $Ax \geq [\varepsilon + \rho(A)]x$. On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$A^j x \geq [\varepsilon + \rho(A)]^j x$$

ce qui contredit la formule classique

$$\rho(A) = \lim_{j\to+\infty} ||A^j||^{1/j} \geq \lim_{j\to+\infty} \frac{||A^j x||}{||x||} \geq \varepsilon + \rho(A).$$

————————

Exercice 3.24 (Original)**.** *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ avec $P(0)$ impair. On veut montrer par l'absurde que 2^r n'est pas racine de P, quel que soit $r = p/q \in \mathbb{Q}_*^+$.*

1) En considérant $Q(X) = P(X^p)$, mqu'il suffit de traiter le cas $p = 1$.

2) En divisant P par $X^q - 2$, mq l'on peut supposer que $\deg P \leq q - 1$.

3) En multipliant l'équation $P(2^{1/q}) = 0$ par des puissances successives de $2^{1/q}$, former un système linéaire inversible et conclure.

———————

1) Observons que 2 ne peut pas être racine de $P = a_n X^n + \cdots + a_0$, car

$$P(2) = a_n 2^n + \cdots a_1 2 + a_0 \equiv a_0 \ [2] \equiv 1 \ [2]$$

puisque $a_0 = P(0)$ est impair. La même remarque s'applique aux puissances 2^p.

Posons $Q(X) = P(X^p)$. C'est encore un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $Q(0) = P(0)$ est impair. On remarque que $2^{p/q}$ est racine de P si et seulement si $2^{1/q}$ est racine de Q. Il suffit donc de traiter le cas $p = 1$.

2) On décompose $P(X) = (X^q - 2)A(X) + B(X)$ où le reste B est de degré $\deg B \leq q - 1$. La division euclidienne fournit des polynômes A, B à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que $P(0) = -2A(0) + B(0)$, donc $B(0)$ est impair. On observe que $2^{1/q}$ est racine de P ssi il est également racine de B : on s'est donc ramené à traiter le cas de polynômes de degré $\leq q - 1$.

3) Posons $\beta = 2^{1/q}$ et supposons qu'il existe $a_{q-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a_{q-1}\beta^q + a_{q-2}\beta^{q-2} \ldots + a_0 = 0,$$

avec a_0 impair. On multiplie cette équation par β pour obtenir

$$a_{q-2}\beta^q + a_{q-3}\beta^{q-2} \ldots + a_0\beta + 2a_{q-1} = 0$$

En multipliant à nouveau par $\beta, \beta^2, \ldots$, on obtient un système linéaire

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \beta^{q-2} \\ \beta^{q-1} \end{bmatrix} = 0.$$

La matrice M est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ses éléments diagonaux sont tous égaux à a_0, ceux sous la diagonale sont tous multiples de 2. Elle est donc inversible dans $\mathbb{Q}$, car elle est triangulaire supérieure lorsqu'on la réduit modulo 2, avec des 1 sur la diagonale. On obtient ainsi une contradiction.

———————

Chapitre 4

Algèbre bilinéaire

4.1 Formes quadratiques et produits scalaires

Rappelons qu'une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. On peut retrouver φ à partir de q grâce aux identités de polarisation,

$$\varphi(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

En dimension finie (le cadre de votre programme), toute forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par une matrice symétrique $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ via

$$q_S : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j \in \mathbb{R}.$$

On appelle signature le couple (p, q) indiquant le nombre de valeurs propres positives et négatives. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles *définies positives*, i.e. dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Dans ce cas la forme q_S définit un *produit scalaire.*

Exercice 4.1 (Entraînement)**.** *Décomposer sous forme de somme de carrés les formes quadratiques suivantes :*

1) $q : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto xy + yz + zt + tx \in \mathbb{R}$

2) $\phi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 - 2y^2 + xz + yz \in \mathbb{R}$.

3) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum (i + j) x_i x_j \in \mathbb{R}$ *;*

4) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum (i^2 + ij + j^2) x_i x_j \in \mathbb{R}$ *;*

————————

1) [Voir également Exo 1 Gourdon p235] On observe que

$$q(x, y, z, t) = (x + z)(y + t) = \left(\frac{x + z + y + t}{2}\right)^2 - \left(\frac{x + z - y - t}{2}\right)^2$$

pour conclure que la signature de q est $(1,1)$.

2) [Voir également Exo 1 Gourdon p235] On observe que

$$\Phi(x,y,z) = (x+z/2)^2 - (y-z/2)^2 - y^2$$

pour conclure que la signature de q est $(1,2)$.

3) On note $\ell_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, $\ell_2(x) = \sum_{i=1}^n ix_i$ et on observe que

$$\sum (i+j)x_ix_j = 2\ell_1(x)\ell_2(x) = \frac{1}{2}\left\{(\ell_1+\ell_2)^2(x) - (\ell_1-\ell_2)^2(x)\right\}.$$

Les formes $\ell_1+\ell_2$ et $\ell_1-\ell_2$ sont linéairement indépendantes (pour $n \geq 2$, ce qui est implicite ici), donc la signature est $(1,1)$.

4) Il faut distinguer selon que $n=2$ ou $n \geq 3$. Pour $n=2$ on obtient

$$\sum (i^2+ij+j^2)x_ix_j = 3x_1^2 + 14x_1x_2 + 12x_2^2 = 3(x_1 + \frac{7}{3}x_2)^2 - \frac{13}{3}x_2^2,$$

donc la signature est $(1,1)$. Pour $n \geq 3$ on décompose de façon similaire à la question 1) en posant $\ell_3(x) = \sum_i i^2 x_i$. Il vient

$$\begin{aligned}\sum (i^2+ij+j^2)x_ix_j &= (\sum x_i)^2 + 2(\sum i^2x_i)(\sum x_i) \\ &= (\ell_2(x))^2 + \frac{1}{2}\left\{(\ell_1+\ell_3)^2(x) - (\ell_1-\ell_3)^2(x)\right\}.\end{aligned}$$

Les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont linéairement indépendantes donc la signature est $(2,1)$.

————————

Exercice 4.2 (Francinou 3.24)**.** *Montrer que $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ et déterminer la signature de la forme quadratique associée.*

————————

La bilinéarité résulte de la linéarité du produit de matrices et de la trace, le caractère symétrique provient de la commutativité de la trace $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Si A est une matrice symétrique on obtient

$$q(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A^tA) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0,$$

donc q est définie positive sur le sous-espace des matrices symétriques.

Si A est une matrice antisymétrique on obtient

$$q(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = -\mathrm{Tr}(A^tA) = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \leq 0,$$

donc q est définie négative sur le sous-espace des matrices antisymétriques.

Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il s'ensuit que la forme quadratique q est de signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$. Notons par ailleurs que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux : si A (resp. B) est symétrique (resp. antisymétrique) ; en effet

$$\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^t(AB)) = \mathrm{Tr}({}^tB\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(-BA) = -\mathrm{Tr}(AB),$$

donc $\varphi(A,B) = 0$.

————————

Exercice 4.3 (Cours)**.** *Soit A une matrice symétrique réelle définie positive et B une matrice symétrique réelle. Mqu'il existe $P \in GL(n,\mathbb{R})$ telle que*

$${}^tPAP = Id \text{ et } {}^tPBP \text{ est diagonale.}$$

————————

On diagonalise A en base orthonormée, obtenant une matrice A' diagonale à valeurs propres $\lambda_i > 0$. La matrice B est transformée en une nouvelle matrice B' symétrique réelle. On dilate ensuite les vecteurs de cette base orthonormée $e_i \mapsto e_i/\sqrt{\lambda_i}$ pour ramener A' à l'identité ; la matrice B' est transformée en une matrice B'' symétrique réelle.

On diagonalise enfin B'' en base orthonormée. L'identité reste inchangée par ce dernier changement de base.

————————

Exercice 4.4 (Francinou 3.1)**.** *Soit φ une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y,x) = 0.$$

Montrer que φ est symétrique ou antisymétrique.

————————

Il n'y a rien à démontrer si $\varphi \equiv 0$, on peut donc supposer que le noyau de φ, $\ker\varphi := \{x \in E,\ \varphi(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in E\}$ est un sev strict de E. On peut travailler avec le quotient $F = E/\ker\varphi$ pour se ramener au cas où $\ker\varphi$ est réduit à $\{0\}$, ce que nous supposons dans la suite.

Pour $x \in E$ on considère les formes linéaires $f_x : y \in E \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ et $g_x : y \in E \mapsto \varphi(y,x) \in \mathbb{R}$. L'hypothèse assure que $\ker f_x = \ker g_x$. Ces deux formes linéaires sont donc proportionnelles : il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que $g_x = \lambda(x) f_x$. Comme nous avons supposé $\ker\varphi = \{0\}$, le scalaire $\lambda(x)$ est uniquement déterminé. La bilinéarité de φ assure que pour tout $x, x' \in E$,

$$g_x + g_{x'} = g_{x+x'} = \lambda(x+x') f_{x+x'} = \lambda(x) f_x + \lambda(x') f_{x'},$$

donc $\lambda(x+x') = \lambda(x) = \lambda(x')$, i.e. $\lambda(x) \equiv \lambda$ est indépendant de $x \in E$.

Il vient ainsi pour tout $x, y \in E$,

$$\varphi(y,x) = g_x(y) = \lambda f_x(y) = \lambda\varphi(x,y) = \lambda^2\varphi(y,x),$$

d'où $\lambda^2 = 1$. On en déduit que

– soit $\lambda = 1$ et φ est symétrique,
– soit $\lambda = -1$ et φ est antisymétrique.

————————

Toute la théorie *euclidienne* se développe de façon analogue sur $\mathbb{C}$, on parle alors de géométrie *hermitienne*. Un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ est défini de manière unique par une matrice hermitienne définie positive
– $H = (h_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$ telle que ${}^t\bar{H} = H$, i.e. $\bar{h}_{ji} = h_{ij}$,
– et $HX = \lambda X \Rightarrow \lambda > 0$ ou $X = 0$.

Les matrices *unitaires* sont le pendant complexe des matrices orthogonales : $U \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ est unitaire ssi elle préserve le produit scalaire hermitien euclidien sur $\mathbb{C}^n$,

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j.$$

Cela se traduit par le fait que U est inversible, avec ${}^t\bar{U} \cdot U = Id$.

Exercice 4.5 (Entraînement). *Soit $H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ une matrice hermitienne.*

1) Mq $H + iId$ et $H - iId$ sont inversibles et simultanément diagonalisables.

2) Montrer que $U = (H + iId) \cdot (H - iId)^{-1}$ est unitaire.

————————

1) La matrice H est diagonalisable en base orthonormée avec valeurs propres réelles puisqu'elle est hermitienne. On en déduit que i et $-i$ ne sont pas valeurs propres de H, donc $H + Id$ et $H - Id$ sont inversibles. Elles sont toutes deux diagonalisables (diagonaliser H en base orthonormée laisse Id inchangée) et commutent, elles sont donc simultanément diagonalisables.

2) Il s'agit de montrer que ${}^t\bar{U} \cdot U = Id$. Comme ${}^tA^{-1} = ({}^tA)^{-1}$, on obtient

$${}^t\bar{U} \cdot U = (H + iId)^{-1}(H - iId)(H + iId)(H - iId)^{-1} = Id,$$

en utilisant que $(H - iId)$ et $(H + iId)$ commutent.

Exercice 4.6 (Classique). *Soit $q : A \in M(n, \mathbb{C}) \mapsto Tr({}^t\bar{A}A) \in \mathbb{R}$. Montrer que q est une forme quadratique hermitienne définie positive telle que la norme associée $N(A) := \sqrt{q(A)}$ est sous-multiplicative, i.e.*

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

————————

Par définition $q(A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, donc q est définie positive. Observons que

$$q(AB) = \sum_{i,j}^{n} \left| \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj} \right|^2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que pour tout (i,j),

$$\left|\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}\right|^2 \leq \left|\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\right|^2 \left|\sum_{h=1}^{n} b_{hj}\right|^2.$$

La somme de ces inégalités fournit $q(AB) \leq q(A)q(B)$.

————————

4.2 Polynômes orthogonaux, inégalités classiques

Exercice 4.7 (Entraînement). *Soit A, B deux matrices symétriques réelles positives telles que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq^t XAX \leq^t XBX$.*

Montrer que $\det A \leq \det B$*.*

————————

Quitte à changer B en $B + \varepsilon Id$, $\varepsilon > 0$, puis à laisser tendre ε vers 0 à la fin, on peut supposer que B est définie positive. Soit $P \in GL(n, \mathbb{R})$ telle que ${}^tPBP = Id$ et ${}^tPAP = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. En posant $X = PY$ on obtient pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$,

$$0 \leq^t XAX =^t Y^tPAPY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = ||Y||^2 =^t XBX.$$

On en déduit $0 \leq \lambda_i \leq 1$ pour tout i, donc

$$\det A = \frac{\Pi\lambda_i}{(\det P)^2} \leq \frac{1}{(\det P)^2} = \det B.$$

Exercice 4.8 (Classique). *On considère la forme quadratique*

$$q : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x)P(-x)dx \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la signature de q.

2) Vérifier qu'il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P_j \in \mathbb{R}_j[X]$ tel que

$$d^j(e^{-x^2})/dx^j = e^{-x^2} P_j(x)$$

et montrer que $\{P_j, j \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale pour q.

————————

1) Si P est un polynôme pair non-nul alors $q(P) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x)^2 dx > 0$, tandis que si P est impair non-nul, alors $q(P) = -\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x)^2 dx < 0$. On en déduit que la signature de q est $([n/2] + 1, [(n+1)/2])$.

2) L'existence de P_j se démontre par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, en observant que

$$P_{j+1}(X) = -2XP_j(X) + P_j'(X).$$

Si $j > k$, on peut intégrer par parties pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P_j(x)P_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^j(e^{-x^2})}{dx} P_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^j(P_k(x))}{dx} dx = 0.$$

La famille $\{P_j, j \in \mathbb{N}\}$ est donc orthogonale pour q.

———————

Exercice 4.9 (Classique)**.** *Soit $f \geq 0$ une fonction continue non identiquement nulle et $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \mapsto \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt \in \mathbb{R}$.*

1) Montrer que φ définit un produit scalaire.

2) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P_n, P_j) = \delta_{n,j}$. Quel vaut $\deg P_n$ *? Cette suite est-elle unique ?*

3) Montrer que P_n a n racines réelles distinctes.

———————

1) On vérifie aisément que φ est bilinéaire, symétrique, définie et positive.

2) On définit P_n par récurrence en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Les polynômes P_n ainsi obtenus sont de degré n. La suite (P_n) est unique à un choix de signe près : si P_n convient, il en est par exemple de même de la suite $Q_n = -P_n$.

3) Si P_n a moins de n racines distinctes, on peut fabriquer un polynôme Q de degré $\leq n-1$ tel que $P_nQ \geq 0$ avec $P_nQ \neq 0$ (pourquoi ?). Il s'ensuit que $\varphi(P_n, Q) > 0$ ce qui contredit les relations d'orthogonalité $\varphi(P_n, P_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$, puisque les $(P_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

———————

Exercice 4.10 (Entraînement)**.** *Soit A une matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que*

$$\det(Id + A)^{1/n} \geq 1 + \det A^{1/n}.$$

On pourra commencer par montrer que $A \mapsto \log\det A$ *est concave, puis que* $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ *est concave également.*

———————

Pour montrer que $A \mapsto f(A) = \log\det A$ est concave, il est nécessaire et suffisant de montrer que pour toute matrice symétrique réelle définie positive A et pour toute matrice S symétrique réelle, la fonction $t \in]-\varepsilon, +\varepsilon[\mapsto g(t) = \log\det(A + tS) \in \mathbb{R}$ est concave (pour $\varepsilon > 0$ assez petit). On note $A^{1/2}$ l'unique matrice symétrique réelle définie positive dont le carré est égal à A. Il vient

$$g(t) = \log\det A + \log\det(Id + tA^{-1/2}SA^{-1/2}) = \log\det A + \sum_{i=1}^{n} \log(1 + t\lambda_i),$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice symétrique réelle $A^{-1/2}SA^{-1/2}$. La fonction g est donc bien concave.

Notons $h(t) = \exp(g(t)/n) = \det(A + tS)^{1/n}$. Il vient $h'' = \left\{\frac{g''}{n} + \frac{(g')^2}{n^2}\right\} h$ et

$$\frac{(g')^2}{n^2} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i t}\right\}^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{(1+\lambda_i t)^2} = -\frac{g''}{n},$$

en utilisant la convexité de l'exponentielle. Ainsi $h'' \leq 0$ donc $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ est concave. On en déduit

$$\frac{\det(Id + A)^{1/n}}{2} = \left(\det \frac{Id + A}{2}\right)^{1/n} \geq \frac{\det(Id)^{1/n} + \det(A)^{1/n}}{2} = \frac{1 + \det(A)^{1/n}}{2},$$

ce qui fournit l'inégalité souhaitée.

Exercice 4.11 (Original). *Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.*

1) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle AX, X\rangle} dX = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

2) En déduire que si A est donnée sous forme de blocs,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{bmatrix} \textit{ alors } \det A \leq \det A_1 \det A_2.$$

3) En déduire que si $M = (x_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ alors $(\det M)^2 \leq \Pi_i \sum_j x_{ij}^2$.

————————

1) Rappelons qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée : il existe une matrice orthogonale $P \in O(n, \mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ telles que ${}^tP\Delta P = A$. Comme $\langle Ax, x\rangle = \langle \Delta Px, Px\rangle$, on effectue le changement de variables $y = Px$ pour obtenir

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \Delta y, y\rangle} dy.$$

Soulignons que le module du déterminant de P est 1. La matrice ainsi obtenue est à variable séparables, la formule souhaitée résulte alors du calcul de la Gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i y_i^2} dy_i = \sqrt{\pi/\lambda_i}.$$

2) Il suffit de montrer que $I(A) \geq I(A_1)I(A_2)$. Notons que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A_1x_1, x_1\rangle + \langle A_2x_2, x_2\rangle + Q(x_1, x_2),$$

avec $Q(x_1, x_2) = \langle B_1x_2, x_1\rangle + \langle B_2x_1, x_2\rangle$. On observe que $Q(-x_1, x_2) = -Q(x_1, x_2)$. Ce changement de variable laisse $I(A)$ et $\langle A_1x_1, x_1\rangle + \langle A_2x_2, x_2\rangle$ inchangés. Il s'ensuit que

$$I(A) = \frac{I(A) + I(A)}{2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A_1x_1, x_1\rangle} e^{-\langle A_2x_2, x_2\rangle} \operatorname{Ch} Q(x_1, x_2) dx \geq I(A_1)I(A_2).$$

3) Le terme diagonal de la matrice symétrique positive $A = M^tM$ est $\sum_{h=1}^n x_{ih}^2$. On déduit de la question précédente

$$(\det M)^2 = \det(M^tM) = \det A \leq \Pi_{i=1}^n a_{ii} = \Pi_{i=1}^n \sum_{h=1}^n x_{ih}^2.$$

————————

Exercice 4.12 (Pbm 3 Gourdon p270). *On note $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes positives de déterminant* 1.

1) Soit A hermitienne définie positive. Mq $\inf_{H\in\mathcal{H}} \mathrm{Tr}(HA) = n(\det A)^{1/n}$.

2) En déduire que $(\det[A+B])^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

————————

1) Soit h une matrice hermitienne définie positive de déterminant 1 telle que $H = h^2$. La matrice $A' = hAh$ est hermitienne définie positive, et l'inégalité

$$n(\det A)^{1/n} = n(\det A')^{1/n} \geq \mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(hAh) = \mathrm{Tr}(HA),$$

est l'inégalité arithmetico-géométrique, lorsque l'on réduit A' en base orthonormée.

Pour montrer que l'infimum donne le résultat souhaité, on diagonalise $A = h^{-1}\Delta h$ en base orthonormée. Quitte à changer H en hHh^{-1}, on peut donc supposer que $A = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est diagonale. On choisit alors $H = (\det A)^{1/n}\Delta(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-n})$. Cette matrice appartient bien à $\mathcal{H}$ et vérifie

$$\mathrm{Tr}(HA) = (\det A)^{1/n}\mathrm{Tr}(Id) = n(\det A)^{1/n}.$$

2) On observe que pour toute matrice $H \in \mathcal{H}$,

$$\mathrm{Tr}(H[A+B]) = \mathrm{Tr}(HA) + \mathrm{Tr}(HB) \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n},$$

donc $(\det[A+B])^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

————————

Chapitre 5

Géométrie

5.1 Isométries de $\mathbb{R}^n$

Rappelons qu'une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si elle préserve la norme euclidienne, $\|F(p)-F(q)\| = \|p-q\|$, pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5.1 (Cours). *Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ une matrice qui préserve la norme,*

$$\|AX\| = \|X\|, \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $A \in O(n, \mathbb{R})$ est orthogonale, i.e. est inversible avec ${}^tA = A^{-1}$.

————————

L'identité de polarisation assure que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle {}^tAAX, Y\rangle = \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

On en déduit ${}^tAA = Id$, donc $A \in O(n, \mathbb{R})$.

————————

Exercice 5.2 (Cours). *Mqu'une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie ssi c'est la composée d'une translation et d'une transformation orthogonale.*

————————

Notons $v = F(0)$. Quite à remplacer F par $G = F - F(0)$, on se ramène au cas où $F(0) = 0$ (on vient de mettre de côté la partie translation). Par hypothèse pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|X - Y\|^2,$$

en particulier $||F(X)||^2 = ||X||^2$ puisque l'on s'est ramené au cas où $F(0) = 0$. Comme

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2 - 2\langle F(X), F(Y)\rangle$$

et $\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle X, Y\rangle$ on en déduit que

$$\langle F(X), F(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base orthonormée. La relation précédente assure que $(F(e_j))_{1\leq j\leq n}$ est également une base orthonormée. On peut donc décomposer le vecteur $F(X)$ dans cette base : il vient

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} \langle F(e_j), F(X)\rangle F(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, X\rangle F(e_j),$$

ce qui montre que $F(X)$ dépend linéairement de X. Ainsi $F(X) = AX$ où $A \in O(n,\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale puisqu'elle vérifie

$$\langle {}^tAAX, Y\rangle = \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle, \text{ pour tout } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

d'où ${}^tA = A^{-1}$.

————————

Exercice 5.3 (Cours et grand classique)**.** *Montrer que les réflexions engendrent le groupe des isométries de* $\mathbb{R}^n$.

————————

Rappelons qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^n$. Si elle n'a aucun point fixe, on choisit $O \in \mathbb{R}^n$ et on note H l'hyperplan médiateur du segment $[Of(O)]$. Alors O est un point fixe de l'isométrie $s_H \circ f$, où s_H désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H. On s'est ainsi ramené au cas où f admet un point fixe O que l'on peut choisir comme origine.

Il reste donc à montrer qu'une isométrie vectorielle est la composée de réflexions. On observe que l'ensemble $Fix(f)$ des points fixes est un sous-espace vectoriel. Nous allons raisonner par récurrence sur sa dimension. Si $\dim Fix(f) = n$, alors $f = \mathrm{Id}$ et il n'y a rien à faire. Supposons donc $\dim Fix(f) = j < n$. Soit $P \in \mathbb{R}^n \setminus Fix(f)$ et H l'hyperplan médiateur du segment $[Pf(P)]$. Le fait que f est une isométrie garantit que $Fix(f) \subset H$. On en déduit que l'isométrie $g = s_H \circ f$ a un espace de points fixes $Fix(g)$ de dimension $\geq j+1$. On lui applique l'hypothèse de récurrence pour conclure.

Au final, nous obtenons ainsi qu'une isométrie vectorielle (resp. affine) est la composée d'au plus n (resp. $n+1$) symétries orthogonales.

Voir également le livre de M.Audin ou celui de J.Grifone, exo 30 p257.

————————

Exercice 5.4 (Cours)**.** *Montrer qu'une matrice orthogonale* $A \in O(n,\mathbb{R})$ *est semblable à une matrice diagonale par blocs de dimension 1 ou 2, les blocs de dimension* 1 *étant constitués de* 1 *ou de* -1*, ceux de dimension* 2 *étant du type*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

————————

Ce résultat de cours est traité dans le Théorème 1 p256 du livre de Gourdon et dans l'exercice 1.35 de Francinou & all. En voici les principales étapes :

– on vérifie aisément que les seules valeurs propres réelles de A sont 1 et -1 ;
– le supplémentaire orthogonal de chaque sous-espace propre $\ker(A - Id)$ et $\ker(A + Id)$ est stable par A ;
– si λ est une valeur propre complexe, il en va de même de $\overline{\lambda}$; $Q(X) = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ divise le polynôme minimal de A donc le polynôme $Q(A)$ ne peut pas être inversible : on choisit $x \in \ker Q(A) \setminus \{0\}$ et on observe que le plan $\mathrm{Vect}(x, Ax)$ est stable par A ;
– l'action de A dans un plan stable est celle d'une rotation plane, elle admet pour matrice
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix};$$
– on conclut enfin par récurrence.

————————

Exercice 5.5 (Cours, Décomposition polaire)**.**
Montrer que pour toute matrice inversible $M \in GL(n,\mathbb{R})$, il existe un couple unique $(O,S) \in O(n,\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = O \cdot S$.

————————

Si un tel couple existe, alors ${}^tMM = S^2$. On commence donc par observer que la matrice $A ={}^t MM$ est une matrice symétrique définie positive. En effet ${}^tA = A$ et $\langle AX, X\rangle = ||MX||^2 > 0$ si $X \neq 0$. Soit P une matrice orthogonale telle que ${}^tPAP = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec $\lambda_i > 0$. On pose alors

$$S := P \cdot Diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot {}^t P \text{ et } O := M \cdot S^{-1}.$$

S est une matrice symétrique définie positive telle que $S^2 ={}^t MM$ et

$${}^tO \cdot O = S^{-1}{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = Id,$$

donc $O \in O(n,\mathbb{R})$.

L'unicité provient de ce qu'une matrice symétrique définie positive admet une unique racine carrée positive : la matrice S construite ci-dessus est l'unique matrice symétrique définie positive S telle que $S^2 ={}^t MM$. La matrice O est alors uniquement définie par la relation $O = MS^{-1}$.

————————

Exercice 5.6 (Cours et Grand classique)**.** *Montrer que*

1) $O(n,\mathbb{R})$ est un groupe compact (topologie induite par une norme).

2) $SO(n,\mathbb{R})$ est connexe mais n'est pas commutatif si $n \geq 3$.

————————

1) L'application $\Phi : M \in M(n,\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM \in M(n,\mathbb{R})$ est continue et $O(n,\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(Id)$, image réciproque d'un singleton, est donc un fermé de $M(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

Rappelons que $N(M) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{MM})}$ définit une norme sur $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. L'ensemble $O(n,\mathbb{R})$ est inclus dans la boule centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{n}$ pour cette norme, c'est donc un ensemble borné. Les compacts de $\mathbb{R}^{n^2}$ étant les fermés bornés, il s'ensuit que $O(n,\mathbb{R})$ est compact.

2) Pour montrer que $SO(n, \mathbb{R})$ est connexe, il suffit de relier une matrice arbitraire $A \in SO(n, \mathbb{R})$ à Id par un chemin continu de matrices dans $SO(n, \mathbb{R})$. On commence par rappeler que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de dimension 1 (ayant des 1 ou des -1 sur la diagonale) et de dimension 2 de la forme

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Le chemin s'obtient par exemple en considérant $A_{t\theta}$, $0 \leq t \leq 1$ pour se ramener à une matrice qui n'a que des 1 et des -1 (en nombre pair) sur la diagonale. On traite ces derniers deux par deux en les considérant comme une matrice de rotation d'angle π et en déformant continument l'angle sur zéro.

————————

5.2 Géométrie en petite dimension

La classification des isométries en dimension 2 et en dimension 3 est au programme de l'agrégation interne. Vous devez savoir montrer que dans $\mathbb{R}^2$,

- une isométrie plane est soit une translation, soit une rotation (affine), soit une réflexion, soit une symétrie glissée [1] ;
- une symétrie ($s \circ s = Id$) est soit une rotation d'angle 0 ou π, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion) ;
- la composée de deux rotations affines est soit une translation, soit une rotation affine.

Vous devez également savoir montrer que les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont de six types :

- les translations ;
- les réflexions affines ;
- les symétries glissées orthogonales (composée d'une réflexion et d'une translation par un vecteur du plan de la réflexion) ;
- les rotations (d'axe affine) ;
- les vissages (ou déplacement hélicoidal, i.e. la composée d'une rotation et d'une translation par un vecteur de l'axe de la rotation) ;
- les antirotations (composée d'une rotation et d'une symétrie).

Vous trouverez la démonstration de ces classifications dans de nombreux ouvrages de référence, par exemple celui de M.Audin.

Exercice 5.7 (Homographies)**.** *On note* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *le compactifié d'Alexandrov de* $\mathbb{C}$*. Une homographie est une fraction rationnelle de degré* 1*,*

$$z \mapsto f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \textit{où} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

---

1. Une symétrie glissée est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite engendrée par un vecteur v et d'une translation par un vecteur multiple de v.

1) Montrer que les homographies forment un sous-groupe Hom du groupe des homéomorphismes de $\overline{\mathbb{C}}$ et que $A \in (GL(2,\mathbb{C}),\cdot) \mapsto f_A \in (Hom, \circ)$ est un morphisme surjectif de groupes dont on calculera le noyau.

2) Montrer que Hom agit de façon 3-transitive sur $\overline{\mathbb{C}}$

3) Montrer que Hom est engendré par les transformations affines et par l'inversion $z \mapsto 1/z$.

4) Montrer que Hom préserve la famille des quasi-cercles (cercles et droites).

————————

1) Si $c = 0$ alors $a \neq 0$ car $A \in GL(2,\mathbb{C})$, et f_A s'étend en un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $f_A(\infty) = \infty$. Si $c \neq 0$ alors f_A s'étend en posant $f_A(\infty) = a/c$ et $f_A(-d/c) = \infty$.

On vérifie aisément que $f_A \circ f_B = f_{AB}$ et que le noyau de ce morphisme surjectif est constitué des homothéties de rapport non nul $\simeq \mathbb{C}^*$: $f_{\lambda Id} = Id$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et réciproquement $f_A = Id$ implique $A = \lambda Id$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

2) Étant donnés trois points distincts $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$, et trois autres points distincts $w_0, w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$, il s'agit de montrer qu'il existe une unique homographie $f \in \mathcal{H}om$ telle que

$$f(z_0) = w_0,\ f(z_1) = w_1,\ \text{ et } f(z_2) = w_2.$$

Il suffit de traiter le cas où $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_2 = \infty$. Soit $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ des points deux à deux distincts. La transformation homographique

$$\Phi(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}.$$

est telle que $\Phi(z_0) = 0, \Phi(z_1) = 1$ et $\Phi(z_2) = \infty$.

Si ψ est une autre homographie avec les mêmes propriétés, alors

$$f(z) = \Phi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

est une homographie qui vérifie
- $f(0) = 0$ donc $b = 0$;
- $f(\infty) = \infty$ donc $c = 0$;
- $f(1) = 1$ donc $a/c = 1$.

Il s'ensuit que $f = Id$ donc $\psi = \Phi$.

3) On note $\tau_d(z) = z + d$ la translation de $d \in \mathbb{C}$, $j(z) = 1/z$ l'inversion, et $\delta_a(z) = az$ la dilatation par $a \in \mathbb{C}$.

Soit $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ une homographie. Si $c = 0$ alors

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b' = \tau_{b'} \circ \delta_{a'}(z).$$

Si $c \neq 0$, alors on décompose

$$f(z) = \frac{a'z + b'}{z + d'} = a' + \frac{b' - a'd'}{z + d'} = \tau_{a'} \circ \delta_{b'-a'd'} \circ j \circ \tau_{d'}(z).$$

4) L'équation d'un cercle ou d'une droite peut s'écrire dans $\mathbb{C}$

$$\lambda|z|^2 + \mu z + \overline{\mu z} + \delta = 0$$

avec $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$ (le cas $\lambda = 0$ correspondant aux droites).

Nous souhaitons vérifier que cette famille d'équations est préservée par les homographies :

- une translation $z \mapsto z + b$ préserve clairement cette famille (changer μ en $\mu + \overline{b}$ et δ en $\delta + |b|^2 + \mu b + \overline{\mu b})$;
- une dilatation $z \mapsto az$ également (changer μ en $\mu/\overline{a}$ et δ en $\delta/|a|^2)$;
- il reste à vérifier que la famille est invariante par l'inversion $z \mapsto 1/z$: c'est le cas en interchangeant les rôles de δ et λ, et en changeant μ en $\overline{\mu}$.

————————

Exercice 5.8 (Cours). *Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et S la surface paramétrée par*

$$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, h(x, y)) \in S \subset \mathbb{R}^3.$$

Etudier la position relative de S par rapport à son plan tangent en fonction de la signature de la Hessienne de h.

————————

On effectue un D.L. à l'ordre 2 de h,

$$h(x + t, y + s) = h(x, y) + Dh(x, y) \cdot (t, s) + \frac{1}{2} Hess_{(x,y)} h(t, s) + o(||(t, s)||^2).$$

Si la signature de $Hess_{(x,y)}h$ est $(2, 0)$ (resp. $(0, 2)$), S se trouve au dessus (resp. en dessous) de son plan tangent en (x, y) ; si la signature est $(1, 1)$ S traverse le plan tangent ; s'il y a une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure en général.

————————

On appelle quadriques les surfaces $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = 0\}$ définies par le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux $f \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$.

Exercice 5.9. *Montrer qu'une quadrique est, à conjugaison par une isométrie globale de $\mathbb{R}^3$ près,*

- *soit vide, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$,*
- *soit un point, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,*
- *soit un ellipsoïde, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$,*
- *soit un cône elliptique, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$,*
- *soit un hyperboloïde à une nappe, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$,*
- *soit un hyperboloïde à deux nappes $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1$,*
- *soit un paraboloïde hyperbolique, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z$,*
- *soit un paraboloïde elliptique, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z$,*
- *soit un cylindre elliptique, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$,*

– *soit un cylindre hyperbolique,* $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$,
– *soit un cylindre parabolique,* $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - y$,

————————

La classification se fait en discutant selon la signature de la forme quadratique définie par la partie homogène de degré deux du polynôme f,

$$f_{hom}(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz.$$

Pour une signature $(3,0)$, un changement affine de coordonnées permet de se ramener à

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \kappa,$$

avec $\kappa \in \mathbb{R}$. Si $\kappa > 0$, l'ensemble est vide, si $\kappa = 0$ la quadrique est réduite à un point, si $\kappa > 0$ on obtient un ellipsoïde. Le cas de signature $(0,3)$ se déduit du précédent en changeant f en $-f$.

Le cas de signature $(2,1)$ (ou $(1,2)$) conduit au cône elliptique et aux hyperboloïdes. Celui de signature $(1,1)$ conduit au paraboloïde et au cylindre hyperbolique, celui de signature $(2,0)$ conduit au paraboloïde et au cylindre elliptique. Enfin le cas de signature $(1,0)$ conduit au cylindre parabolique.

Pour plus de détails, consultez un cours de Géométrie euclidienne.

————————

Exercice 5.10 (Cours, produit vectoriel)**.**

1) Soit $u, v \in \mathbb{R}^3$*. Montrer qu'il existe un unique vecteur* $u \wedge v$ *de* $\mathbb{R}^3$ *caractérisé par la formule* $\langle u \wedge v, w\rangle = \det(u,v,w)$*, pour tout* $w \in \mathbb{R}^3$.

2) Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ *et* $v = (v_1, v_2, v_3)$*, vérifiez que* $w = u \wedge v$ *est le vecteur de coordonnées* (w_1, w_2, w_3) *définies par*

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \; w_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \quad et\ w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

3) En déduire, si θ *désigne l'angle entre* u *et* v*, que*

$$\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2\theta) = A^2,$$

où A *est l'aire du parallélogramme engendré par* u *et* v.

————————

Soit e_1, e_2, e_3 les vecteurs d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On définit $u \wedge v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ avec $a_i = \det(u,v,e_i)$. Alors $u \wedge v$ a les propriétés souhaitées. Les autres propriétés s'en déduisent facilement.

————————

Exercice 5.11 (Cours)**.** *Montrer que pour tout* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u.$$

En déduire l'identité de Jacobi,

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

————————

La première formule dépend linéairement de u, v, w, on peut donc la tester sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Nous vous laissons faire les vérifications. On en déduit

$$w \wedge (u \wedge v) = -\langle u, w\rangle v + \langle v, w\rangle u,$$
$$v \wedge (w \wedge u) = -\langle w, v\rangle u + \langle u, v\rangle w,$$
$$u \wedge (v \wedge w) = -\langle v, u\rangle w + \langle w, u\rangle v,$$

donc $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$.

————————

Exercice 5.12 (Francinou 1.16). *Calculer*

$$\inf_{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + a_2x^2)^2 dx.$$

On pourra introduire le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)dx$ *et exprimer cet infimum comme une distance.*

————————

L'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)dx \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel de dimension 3 des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.

L'expression que l'on cherche à minimiser est le carré de la distance du polynôme -1 au sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Il existe un unique polynôme P qui réalise cet infimum, c'est le projeté orthogonal de -1 sur cet espace vectoriel. Ce polynôme $P = a_1X + a_2X^2$ est caractérisé par les relations d'orthogonalité

$$0 = \langle P + 1, X^j\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^j + a_1x^{j+1} + a_2x^{j+2})dx,$$

pour tout $j = 1, 2$. En observant que $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^k = k!$ on en déduit que

$$\begin{cases} 1 + 2a_1 + 6a_2 &= 0 \\ 2 + 6a_1 + 24a_2 &= 0 \end{cases}$$

ce qui fournit le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On inverse cette matrice $2 - 2$ pour obtenir $a_1 = -1$ et $a_2 = 1/6$. Il s'ensuit que l'infimum cherché est donné par

$$||1 + P||^2 = \langle 1 + P, 1\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 - x + \frac{x^2}{6}\right) dx = 1 - 1 + \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Cet exercice est proposé dans le livre de Francinou & all dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec n arbitraire ; la solution est similaire mais la résolution du système linéaire devient inefficace, il faut être un peu plus astucieux pour mener à bien les calculs.

————————

5.3 Pot pourri

Exercice 5.13 (Cours, Matrice de Gram)**.** *Soit E un $\mathbb{C}$-ev hermitien de dimension finie et F un sev. Pour $f_1, \dots, f_n \in F$, on pose*

$$G(f_1, \dots f_n) = \det\left(\langle f_i, f_j\rangle\right).$$

1) Montrer que $G(f_1, \dots f_n) = 0$ si et seulement si les f_i sont liés.

2) On suppose les f_i libres et générateurs de F. Mq $G(f_1, \dots f_n) > 0$ et

$$d(F, x) := \inf_{f\in F} d(f, x) = \sqrt{\frac{G(x, f_1, \dots, f_n)}{G(f_1, \dots, f_n)}}.$$

————————

1) Soit F la matrice des coordonnées des vecteurs $f_1, \dots, f_n$ dans la base canonique $e_1, \dots, e_n$. Comme cette dernière est orthonormée, on a $f_j = \sum_{h=1}^n \langle f_j, e_h\rangle e_h$. On en déduit

$$\langle f_i, f_j\rangle = \sum_{h=1}^n \langle f_i, e_h\rangle\langle f_j, e_h\rangle,$$

soit $(\langle f_i, f_j\rangle) = F \cdot {}^tF$. Il s'ensuit que

$$G(f_1, \dots f_n) = (\det F)^2 \geq 0$$

et que ce déterminant est nul si et seulement si les f_j sont liés.

2) Soit p la projection orthogonale sur $F = Vect(f_1, \dots, f_n)$. Le théorème de Pythagore assure que $d^2 := d(F, x)^2 = ||x||^2 - ||p(x)||^2$. Dans le déterminant $G(x, f_1, \dots, f_n)$, on peut remplacer tous les termes $\langle f_i, x\rangle$ par $\langle f_i, p(x)\rangle$ puisque $x - p(x)$ est orthogonal à F. La dernière colonne de ce déterminant se décompose donc en

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle f_n, p(x)\rangle \\ d^2 + ||p(x)||^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_1, p(x)\rangle \\ \vdots \\ \langle f_n, p(x)\rangle \\ ||p(x)||^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d^2 \end{bmatrix}.$$

La linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne donne ainsi

$$G(x, f_1, \dots, f_n) = G(p(x), f_1, \dots, f_n) + d^2 G(f_1, \dots, f_n) = d^2 G(f_1, \dots, f_n),$$

puisque $p(x)$ est combinaison linéaire des f_j.

————————

Exercice 5.14 (Entraînement)**.** *Soit $u = (1, 2, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$.*

1) Déterminer l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire euclidien usuel) de la droite $\mathbb{R}u$ engendrée par le vecteur u.

2) Exprimer en coordonnées la projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$.

——————————

1) L'orthogonal de $\mathbb{R}u$ est l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0\}$.

2) La projection orthogonale sur $\mathbb{R}u$ est $p : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, u\rangle u/||u||^2 \in \mathbb{R}u$.

——————————

Exercice 5.15 (Francinou 1.9 et 1.13)**.** *Soit E un espace euclidien.*

1) Soit p un projecteur de E. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.

2) Soit p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si et seulement si p et q commutent.

3) Montrer que le résultat de la question précédente n'est pas correct si p et q ne sont pas supposés orthogonaux.

——————————

1) Si p est orthogonal alors pour tout x, $p(x)$ est orthogonal à $x - p(x)$ donc

$$||p(x)||^2 \leq ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2 = ||x||^2.$$

Réciproquement supposons que $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout x. Soit $z \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p = \ker(p - Id)$. On veut montrer que y et z sont orthogonaux. Il vient $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda^2 ||y||^2 = ||p(z + \lambda y)||^2 \leq ||z + \lambda y||^2 = \lambda^2 ||y||^2 + 2\lambda\langle z, y\rangle + ||z||^2,$$

d'où pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq 2\lambda\langle z, y\rangle + ||z||^2$. Cela implique $\langle z, y\rangle = 0$.

2) Si p et q commutent alors

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q,$$

donc $p \circ q$ est un projecteur.

Réciproquement si $p \circ q$ est un projecteur, alors comme p et q sont orthogonaux, la question précédente assure que

$$||p \circ q(x)|| = ||p(q(x))|| \leq ||q(x)|| \leq ||x||,$$

donc $p \circ q$ est un projecteur orthogonal d'après 1).

3) Les projecteurs p et q de $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sont tels que $p \circ q = 0$ est le projecteur nul, mais la matrice de $0 \neq q \circ p$ est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

——————————

Exercice 5.16 (Cours). *Soit (E, N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Mq N provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallèlogramme,*

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2.$$

————————

Une direction est simple : si N provient d'un produit scalaire, alors

$$N(x+y)^2 = N(x)^2 + 2\langle x, y\rangle + N(y)^2$$

et $N(x-y)^2 = N(x)^2 - 2\langle x, y\rangle + N(y)^2$, d'où la relation cherchée.

La réciproque est plus délicate. Supposons que N vérifie l'identité du parallèlogramme et posons

$$\varphi(x, y) := \frac{N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2}.$$

Il s'agit de montrer que φ définit un produit scalaire. Notons que φ est symétrique et positive, $\varphi(x, x) = N(x)^2$, la difficulté est de montrer qu'elle est bilinéaire. Par symétrie il suffit de montrer qu'elle est linéaire en x.

On commence par observer que $\varphi(2x, y) = 2\varphi(x, y)$. L'identité du parallèlogramme fournit en effet

$$N(2x+y)^2 + N(y)^2 = 2N(x+y)^2 + 2N(x)^2.$$

On en déduit que

$$\varphi(2x, y) = \frac{N(2x+y)^2 - 4N(x)^2 - N(y)^2}{2} = 2\varphi(x, y).$$

Nous montrons à présent que $\varphi(z+z', y) = \varphi(z, y) + \varphi(z', y)$ pour tout $z, z', y \in E$. Grâce à l'observation précédente, il est équivalent de montrer que pour tout $x, x', y \in E$, $\varphi(x+x', y) + \varphi(x-x', y) = 2\varphi(x, y)$. Cela résulte de

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+x', y) + \varphi(x-x', y) = \\
&= \frac{N(x+x'+y)^2 - N(x+x')^2 - N(y)^2}{2} + \frac{N(x-x'+y)^2 - N(x-x')^2 - N(y)^2}{2} \\
&= \frac{N(x+x'+y)^2 + N(x-x'+y)^2}{2} - \frac{N(x+x')^2 + N(x-x')^2}{2} - N(y)^2 \\
&= [N(x+y)^2 + N(x')^2] - [N(x)^2 + N(x')^2] - N(y)^2 \\
&= 2\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

où l'avant dernière ligne résulte de l'identité du parallèlogramme.

Nous montrons enfin que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et comme N donc φ est continue, il suffit d'établir cette relation pour $\lambda \in \mathbb{Q}$. Une récurrence immédiate montre que

$$\varphi(px, y) = \varphi(x + \cdots + x, y) = p\varphi(x, y)$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$p\varphi(x, y) = \varphi(px, y) = \varphi\left(q\frac{p}{q}x, y\right) = q\varphi\left(\frac{p}{q}x, y\right),$$

donc $\varphi(rx, y) = r\varphi(x, y)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}^+$. Enfin $0 = \varphi(0, y) = \varphi(x - x, y) = \varphi(-x, y) + \varphi(x, y)$, en particulier $\varphi(rx, y) = r\varphi(x, y)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

————————

Exercice 5.17 (Francinou 4.44). *Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $C(X)$ son enveloppe convexe.*

1) Calculer l'enveloppe convexe de $X \subset \mathbb{R}^2$ dans les cas suivants

$$X_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]\},\quad X_2 = \{(-1, 0),\ (1, 0),\ (0, -1),\ (0, 1)\}.$$

2) Montrer que tout point de $C(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n + 1$ points de X.

3) En déduire que si X est compacte alors $C(X)$ est compacte.

————————

1) On obtient aisément

$$C(X_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad C(X_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}.$$

2) Un point $x \in C(X)$ de l'enveloppe convexe sécrit $x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$, avec $x_j \in X$, $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$. Si $p > n+1$, on va montrer que l'on peut réécrire x comme un barycentre de $p - 1$ points à coefficients positifs. Une récurrence finie assurera ainsi que l'on peut toujours se ramener à $p \leq n + 1$.

Les points $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1$ sont linéairement indépendants. On note $a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} a_i(x_i - x_1) = 0$. En posant $a_1 = -\sum_{i=2}^{p} a_i$, on obtient $\sum_{i=1}^{p} a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = 0$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x = \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j + t a_j) x_j$$

Il s'agit à présent de choisir $t \in \mathbb{R}$ de façon à annuler l'un des coefficients, tout en maintenant la positivité de $\lambda_j + t a_j \geq 0$. Voici un choix qui convient :

$$t := \min\left\{-\frac{\lambda_i}{a_i}, a_i < 0\right\}.$$

Il s'agit d'un théorème de Carathéodory (1907).

3) Il résulte de la question 2) que $C(X)$ est l'image par l'application continue

$$\phi : (\lambda, x) \in \Lambda \times X^{n+1} \mapsto \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j \in \mathbb{R}^{n+1}$$

du compact $\Lambda \times X^{n+1}$, où $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{n+1},\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1\}$, donc $C(X)$ est compact.

————————

Exercice 5.18 (Francinou 2.28).

Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E),\ |||u||| \leq 1\}$. Montrer que les points extrémaux de B (i.e. les $u \in B$ tels que $B \setminus \{u\}$ est convexe) sont exactement les éléments de $O(E)$.

————————

Notons que $O(E) \subset B$ puisque les éléments de $O(E)$ préservent la norme, donc sont de norme triple 1. On commence par montrer que les endomorphismes orthogonaux sont extrémaux. Soit $f \in O(E)$ et supposons que $f = (u+v)/2$ avec $u, v \in B$. Alors pour tout $x \in E$ de norme 1, on a

$$1 = ||f(x)|| = \frac{||u(x) + v(x)||}{2} \leq \frac{||u(x)|| + ||v(x)||}{2} \leq \frac{||x|| + ||x||}{2} = 1.$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire, ce qui assure que $u(x) = \lambda(x)v(x)$ avec $\lambda(x) > 0$, puis $u(x) = v(x)$ car ces deux vecteurs sont de norme 1. Par linéarité on en déduit que $u = v = f$, donc f est extrémal.

Supposons à présent que $f \in B$ n'est pas dans $O(E)$. On va utiliser la décomposition polaire de f : il existe $w \in O(E)$ et s symétrique positif tel que $f = w \circ s$. L'endomorphisme s n'est pas nécessairement inversible, mais il est diagonalisable en base orthonormée et à valeurs propres comprises entre 0 et 1 puisque $f \in B$. Comme f n'est pas orthogonal, il existe une valeur propre λ telle que $0 \leq \lambda < 1$. On décompose

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{avec} \quad -1 \leq a_1 < a_2 \leq 1$$

et on considère les endomorphismes $u_1 = w \circ s_1$ et $u_2 = w \circ s_2$ obtenus en remplaçant s par la multiplication par a_i sur l'espace propre associé à λ, et en laissant s inchangé sur les autres sous-espaces propres. On obtient ainsi $u_1, u_2 \in B$, $u_1 \neq u_2$ et $f = (u_1 + u_2)/2$, donc f n'est pas extrémal.

————————

Chapitre 6

Calcul différentiel et géométrie

6.1 Différentielle d'ordre 1

Exercice 6.1. *On considère* $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(0,0) = 0$ *et*

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Mq $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existent, que* f *est continue mais pas différentiable en* $(0,0)$.

————————

La fonction f est clairement lisse hors de l'origine. On observe que

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2 + y^2} = |x - y| \frac{|x^2 + xy + y^2|}{x^2 + y^2} \leq 2|x - y|,$$

donc f est continue à l'origine. Si $v = (x,y) \neq 0$ est une direction fixée. Il vient

$$\frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = f(x,y) \to f(x,y) \text{ lorsque } t \to 0,$$

donc f admet une dérivée partielle dans la direction $v = (x,y)$. En particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Si f était différentiable à l'origine, elle vérifierait

$$f(x,y) = f(0,0) + x - y + o(||(x,y)||,$$

ce qui n'est pas le cas puisque

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{x - y} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{xy}{x^2 + y^2} \in [1/2, 3/2].$$

————————

Exercice 6.2. *On considère pour* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, les normes*

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \;\; N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad et \; N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Déterminer l'ensemble des points où $N_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est différentiable.*

—————————

C'est un fait classique qu'une norme N n'est jamais différentiable à l'origine. Vous pouvez le vérifier en dérivant la relation d'homogénéité

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

par rapport à λ par valeurs positives, puis négatives, pour réaliser que N n'admet pas de dérivées partielles à l'origine.

Comme la norme euclidienne N_2 est lisse hors de l'origine, l'ensemble $ND(N_2)$ des points où elle est différentiable est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. De façon assez similaire,

$$ND(N_1) = (x_1 = 0) \cup (x_2 = 0) \text{ et } ND(N_\infty) = (x_1 = x_2) \cup (x_1 = -x_2).$$

—————————

Exercice 6.3. *Soit* $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. *Mq* f *est différentiable en tout point et que pour* $a \neq b$, *il n'existe aucun* $c \in \mathbb{R}$ *tq* $f(b) - f(a) = i(b-a)e^{ic}$.

—————————

Il s'agit d'un fait classique, traité en cours, qui montre que le théorème des accroissements finis n'est pas valable pour les applications à valeurs vectorielles.

—————————

Exercice 6.4. *On considère l'application déterminant*

$$f : A \in \mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}.$$

Expliquer pourquoi cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$ *et montrer que*

$$Df(Id) : A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr} A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}).$$

—————————

Le déterminant est une application polynomiale en les coordonnées de la matrice, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $H = (H_1, \ldots, H_n)$ une matrice que l'on écrit comme collection de vecteurs colonnes $H_j = (h_{ij})$. Il vient, par n-linéarité du déterminant,

$$\begin{aligned}
\det(Id + H) &= \det(e_1 + H_1, \ldots, e_n + H_n) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, H_j, e_{j+1}, \ldots, e_n + H_n) + o(H) \\
&= 1 + \operatorname{tr} H + o(H)
\end{aligned}$$

en notant e_j les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

—————————

Exercice 6.5. *On dit qu'une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est positivement homogène de degré k si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$,*

$$f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x).$$

Montrer que c'est le cas si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(x) \cdot x = kf(x).$$

————————

Si f est positivement homogène de degré k, on dérive la relation par rapport à λ pour obtenir

$$Df(\lambda x) \cdot x = k\lambda^{k-1} f(x),$$

ce qui donne la formule souhaitée lorsque $\lambda = 1$.

Réciproquement posons $g(\lambda) = f(\lambda x)$. Si f vérifie $Df(x) \cdot x = kf(x)$, alors

$$\lambda g'(\lambda) = Df(\lambda x) \cdot (\lambda x) = kf(\lambda x) = kg(\lambda),$$

donc $g(\lambda) = \lambda^k g(1)$, i.e. $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.

————————

Exercice 6.6. *Soit Ω un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. La fonction convexe conjuguée f^* est définie par*

$$f^*(y) := \sup_{x \in \Omega} \{\langle y, x\rangle - f(x)\}.$$

Calculer le domaine Dom f^* *et f^* dans les cas suivants :*

1) $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \log[1 + e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}]$;

2) $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = |x|^p/p$ où $p > 1$;

3) $\Omega = \mathbb{R}$ (resp. $\Omega = \mathbb{R}^+$) et $f(x) = 0$.

————————

1) Comme la fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$, le domaine de f^* est déterminé par l'image $\nabla f(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ par le gradient de f. On calcule

$$\nabla f(x) = s \Longleftrightarrow \frac{e^{x_i}}{1 + e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = s_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

On observe que $0 < s_i < 1$, $0 < s_1 + \ldots + s_n < 1$ et

$$s_1 + \ldots + s_n = \frac{e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}}{1 + e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}} \text{ donc } e^{x_1} + \ldots + e^{x_n} = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{1 - (s_1 + \ldots + s_n)}$$

Il s'ensuit que

$$\nabla f(x) = s \Longleftrightarrow x_i = \ln\left(\frac{s_i}{1 - (s_1 + \ldots + s_n)}\right)$$

donc $\nabla f(\mathbb{R}^n) = S$ est le simplexe,

$$\mathrm{Dom}\, f^* = \bar{S} = \{s \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le s_i \le 1,\ 0 < s_1 + \ldots + s_n < 1\}$$

et pour $s \in \mathrm{Dom}\, f^*$,

$$f^*(s) = \sum_{j=1}^n s_j \ln s_j + \left(1 - \sum_{j=1}^n s_j\right) \ln \left(1 - \sum_{j=1}^n s_j\right).$$

2) Un calcul similaire (et plus simple) montre que $\nabla f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n = \mathrm{Dom}\, f^*$ et $f^*(s) = |s|^q/q$, où q est l'exposant conjugué de p.

3) Il faut ici travailler directement à partir de la formule (au cas par cas). Si $\Omega = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Dom}\, f^* = \{0\}$ et $f^*(0) = 0$. Si $\Omega = \mathbb{R}^+$, alors $\mathrm{Dom}\, f^* = \mathbb{R}^-$ et $f^*(s) = 0$ pour tout $s \le 0$.

————————

Exercice 6.7. *Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.*

1) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$.

2) En déduire que $\det A \le \det A_1 \cdot \det A_2$, lorsque $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{bmatrix}$, puis

$$\det A \le \Pi_{i=1}^n a_{ii}.$$

————————

1) Rappelons qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée : il existe une matrice orthogonale $P \in O(n, \mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ telles que ${}^tP\Delta P = A$. Comme $\langle Ax, x\rangle = \langle \Delta Px, Px\rangle$, on effectue le changement de variables $y = Px$ pour obtenir

$$I(A) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \Delta y,y\rangle} dy.$$

Soulignons que le module du déterminant de P est 1. La matrice ainsi obtenue est à variable séparables, la formule souhaitée résulte alors du calcul de la Gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i y_i} dy_i = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

2) Il suffit de montrer que $I(A) \ge I(A_1)I(A_2)$. Notons que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle A_1x_1, x_1\rangle + \langle A_2x_2, x_2\rangle + Q(x_1, x_2),$$

avec $Q(x_1, x_2) = \langle B_1x_2, x_1\rangle + \langle B_2x_1, x_2\rangle$. On observe que $Q(-x_1, x_2) = -Q(x_1, x_2)$. Ce changement de variable laisse $I(A)$ et $\langle A_1x_1, x_1\rangle + \langle A_2x_2, x_2\rangle$ inchangés. Il s'ensuit que

$$I(A) = \frac{I(A) + I(A)}{2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle A_1x_1,x_1\rangle} e^{-\langle A_2x_2,x_2\rangle} \mathrm{Ch}\, Q(x_1, x_2) dx \ge I(A_1)I(A_2).$$

————————

6.2 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 6.8. *Montrer que la relation*

$$x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$$

définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0,1)$ et déterminer un D.L. à l'ordre 3 de cette fonction au voisinage de 0.

————————

La fonction lisse $f(x,y) = x^4 + y^3 - 2x^2y - 1$ vérifie $f(0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites assure qu'il existe une fonction lisse $y = g(x)$, définie dans un voisinage de 0, telle que $g(0) = 1$ et $f(x, g(x)) \equiv 0$.

Le D.L. à l'ordre 3 de $g(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ peut s'obtenir par identification. Il vient $a = c = 0$ et $b = 2/3$.

————————

Exercice 6.9. *On considère*

$$F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 - 2y^2 + 2z^3 - xyz - y^4 + 1 \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la surface $\{F(x, y, z) = 0\}$ est lisse au voisinage du point $(0, 1, 1)$, qu'il existe un voisinage V de $(0, 1)$ et une fonction lisse $\varphi : V \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0, 1) = 1$ et

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \textit{ pour tout } (x, y) \in V.$$

Calculer les dérivées partielles de φ au point $(0, 1)$.

————————

La surface $S = F^{-1}(0)$ est lisse au voisinage d'un point p si F est une submersion en $p \in S$, i.e. si l'application linéaire tangente $v \in \mathbb{R}^3 \mapsto \nabla F(p) \cdot v$ est surjective. Or $\nabla F = (2x - yz, -4y - xz - 4y^3, 6z^2 - xy)$ donc

$$\nabla F(0, 1, 1) = (-1, -8, 6) \neq (0, 0, 0),$$

donc F est une submersion au voisinage de $p = (0, 1, 1)$.

Comme $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$, il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction lisse φ définie dans un voisinage V de $(0, 1)$ telle que $\varphi(0, 1) = 1$ et $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in V$. On dérive cette relation par rapport à x pour obtenir

$$2x + 2\varphi(x, y)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - y\varphi(x, y) - xy\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0,$$

d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 1) = 1/2$. On obtient de façon similaire $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 1) = 5/2$.

————————

Exercice 6.10. *Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y) \in \mathbb{R}^2$.*

1) Déterminer $\Omega = f(\mathbb{R}^2)$; f réalise-t'elle une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans Ω ?

2) Mq f est un difféomorphisme local. Est-ce un difféomorphisme global ?

————————

1) Lorsque x, y parcourent $\mathbb{R}$, $(\cos y, \sin y)$ parcourt S^1, tandis que e^x parcourt $\mathbb{R}^+$. On en déduit que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. L'application f n'est pas injective car $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) On calcul le jacobien de f,

$$\det \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_2/\partial x \\ \partial f_1/\partial y & \partial f_2/\partial y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^x \neq 0.$$

Il résulte du théorème d'inversion locale que f est un difféomorphisme local au voisinage de chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ce n'est pas un difféomorphisme global par manque d'injectivité.

————————

Exercice 6.11. *Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xyz, xy + yz + zx, x + y + z) \in \mathbb{R}^3$.*

1) Montrer f est injective sur $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x < y < z\}$.

2) Montrer que $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

————————

1) Si $f(x, y, z) = (a, b, c)$, alors x, y et z sont trois racines réelles de l'équation $T^3 - cT^2 + bT - a = 0$. Si on impose de plus que $(x, y, z) \in \Omega$, alors ces trois racines sont ordonnées, donc

$$f(x, y, z) = f(x', y', z') \text{ et } (x, y, z), (x', y', z') \in \Omega \Longrightarrow (x, y, z) = (x', y', z').$$

2) On calcule le jacobien de f,

$$Jf = \det \begin{bmatrix} yz & y + z & 1 \\ xz & x + z & 1 \\ xy & x + y & 1 \end{bmatrix} = (z - y)(z - x)(y - x) > 0,$$

comme on peut par exemple le voir en soustrayant la première ligne aux deux suivantes avant de développer. Il s'ensuit que $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un difféomorphisme local qui est de plus bijective, c'est donc un difféomorphisme global.

————————

Exercice 6.12. *Déterminer le jacobien de l'application*

$$\begin{array}{rcl} (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) & \mapsto & (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta) \end{array}$$

et en déduire le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

————————

C'est un calcul classique. On obtient

$$Jf = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\varphi\cos\theta & +r\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r^2\cos\theta$$

et $\mathrm{Vol}(B^3) = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = 4\pi/3.$

————————

Exercice 6.13. *Montrer que*

$$A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto \exp A := \sum_{j\geq 0} \frac{A^j}{j\,!} \in GL(n,\mathbb{R})$$

réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de la matrice nulle sur un voisinage de l'identité, mais que ce n'est pas un difféomorphisme global.

————————

On observe que

$$\exp(0+H) = \exp(H) = Id + H + o(H),$$

donc $D\exp(0) = Id_{n^2}$ est l'identité $H \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto H \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$.

Il résulte du théorème d'inversion locale que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local au voisinage de la matrice nulle. Ce n'est pas un difféomorphisme global car elle n'est pas injective, e.g. $\exp\left(2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \exp(0) = Id.$

————————

Exercice 6.14. *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ de deux variables.*

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur l'ouvert connexe $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y \leq 0\}$.

2) En posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, déterminer les solutions de

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 2$$

dans le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y > 0\}$.

————————

1) L'énoncé sous-entend que l'on cherche les fonctions $\mathcal{C}^1$ solutions de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ dans Ω. On fixe y et on résout l'équation en x dans $\Omega_y = \{x \in \mathbb{R},\, (x,y) \in \Omega\}$. Lorsque $y > 0$, $\Omega_y = \mathbb{R}$ est connexe et on obtient que $x \in \Omega_y \mapsto f(x,y) = g(y) \in \mathbb{R}$ est constante. Lorsque $y \leq 0$, il faut prendre garde au fait que $\Omega_y = \mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes, on obtient alors

$$f(x,y) = g_-(y) \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x,y) = g_+(y) \text{ si } x > 0.$$

Il reste enfin à imposer que g_- (resp. g_+) se raccorde à g de façon $\mathcal{C}^1$ sur la demi droite $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x<0\}$ (resp $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\}$). La fonction

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad y\geq 0, x\in\mathbb{R} \\ \exp(-1/y) & \text{si} \quad y<0,\ x<0 \\ \exp(-1/y^7) & \text{si} \quad y<0,\ x>0 \end{cases}$$

fournit un exemple explicite de solution lisse qui n'est pas indépendante de x...

2) Posons $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et observons que

$$r\frac{\partial g}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 2.$$

Le passage en coordonnées polaires transforme le demi-plan en le domaine produit $(0,+\infty)\times(0,\pi)$ dont les tranches sont connexes. On peut donc intégrer l'équation en $g(r,\theta)=\ln r^2+h(\theta)$ d'où

$$f(x,y)=\ln[x^2+y^2]+H(x/\sqrt{x^2+y^2}).$$

————————

6.3 Hessienne

Exercice 6.15. *Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. On pose $g(x)=[\max(f(x),0)]^2$.*

1) Montrer que g est différentiable si f est différentiable.

2) Est-ce que g est deux fois différentiable si f l'est ?

————————

1) La fonction g est aussi régulière que f hors de l'ensemble de contact $(f=0)$. Si f est différentiable en x tel que $f(x)=0$, il vient $f(x+h)=hf'(x)+o(h)$, donc

$$g(x+h)=\max(0,hf'(x)+o(h))^2=O(h^2)$$

On en déduit que g est différentiable en x avec $g'(x)=0$.

2) La fonction g n'est, en général, pas deux fois différentiable même si f est infiniment lisse. Pour $f(x)=x$, on obtient que g admet une dérivée seconde à gauche et à droite de zéro, avec

$$g''(0^+)=2\neq 0=g''(0^-).$$

————————

Exercice 6.16. *Soit Ω un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$.*

1) Montrer que si f est convexe et $n=1$, alors pour tout $x<y<z$,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

2) On suppose f différentiable. Montrer que f est convexe ssi

$$(Df(y) - Df(x))(y - x) \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in \Omega.$$

3) On suppose f deux fois différentiable. Montrer que f est convexe ssi

$$D^2 f(x) \cdot (h, h) \geq 0, \text{ pour tout } x \in \Omega, h \in \mathbb{R}^n.$$

4) On suppose que f convexe, différentiable et $Df(a) = 0$. Mq $f \geq f(a)$.

————————

1) Comme $x < y < z$, on peut écrire

$$y = tx + (1 - t)z \text{ avec } 1 - t = \frac{y - x}{z - x} \in (0, 1).$$

L'inégalité de convexité de f donne alors $f(y) \leq tf(x) + (1 - t)f(z)$ soit

$$f(y) - f(x) \leq \frac{y - x}{z - x} (f(z) - f(x)).$$

L'autre inégalité s'obtient de façon similaire, en retranchant $f(z)$.

2) Supposons f différentiable et convexe. On traite d'abord le cas $n = 1$ et on introduit un quatrième point $w > z$. Il résulte de la question précédente que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

On fait tendre y vers x et w vers z pour en déduire $f'(x) \leq f(z)$, donc f' est croissante, ce que l'on peut exprimer sans imposer d'ordre par

$$(f'(z) - f(x))(z - x) \geq 0.$$

Le cas $n \geq 1$ se déduit du cas $n = 1$ en considérant la restriction g de f à la droite $(xz) = \{tx + (1 - t)z, t \in \mathbb{R}\}$ et en observant que

$$g'(1) - g'(0) = (Df(x) - Df(z))(x - z) \geq 0.$$

Supposons réciproquement que cette inégalité est satisfaite. Si $n = 1$, il résulte du théorème des accroissements finis et de la monotonie de f' que pour $x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(a) \leq f'(b) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

avec $a \in (x, y)$ et $b \in (y, z)$. Comme on l'a vu dans la première question, cette inégalité est équivalente à la convexité. Le cas $n \geq 2$ se traite enfin par restriction.

3) Lorsque f est deux fois différentiable et $n = 1$, on obtient f convexe ssi f' croissante ssi $f'' \geq 0$. Pour $n \geq 2$, on observe que $g(t) = f(x + th)$ vérifie

$$g''(t) = D^2 f(x + th)(h, h),$$

donc f est convexe ssi chaque restriction g est convexe ssi $D^2 f \geq 0$.

4) Il s'agit de montrer que si f est lisse et convexe, alors un point critique est forcément un minimum global. On se ramène encore une fois au cas de la dimension 1 en considérant la restriction g de f à la droite (ax), avec une paramétrisation telle que $g(0) = f(a)$ et $g(1) = f(x)$. L'hypothèse $Df(a) = 0$ assure que $g'(0) = 0$. La convexité assure que $g'(t) \geq g'(a) = 0$ pour $0 \leq t \leq 1$, donc g est croissante sur $[0, 1]$, en particulier $f(x) = g(1) \geq g(0) = f(a)$.

————————

Exercice 6.17. *Soit H un espace de Hilbert et $a \in H^*$ On considère*

$$f : x \in H \mapsto f(x) = \langle a, x\rangle e^{-||x||^2} \in \mathbb{R}.$$

1) Mq f est différentiable, calculer son gradient et ses points critiques.

2) Ces points critiques sont-ils des extrema locaux ? de quelle nature ?

————————

1) On calcule $f(x+h) = f(x)+\langle a, h\rangle e^{-||x||^2} - 2\langle a, x\rangle\langle x, h\rangle e^{-||x||^2} + o(h)$. donc f est différentiable avec $Df(x) \cdot h = \langle [a - 2\langle a, x\rangle x] , h\rangle e^{-||x||^2}$. La fonction f possède donc deux points critiques, ce sont

$$x_{\pm} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}||a||}.$$

2) On effectue un D.L. à l'ordre 2 de $f(x + h)$, il vient

$$f(x + h) = f(x) + \{\langle a, h\rangle - 2\langle a, x\rangle\langle x, h\rangle\} e^{-||x||^2} + Q_x(h) + o(||h||^2)$$

avec

$$Q_x(h) = \left\{-\langle a, x\rangle||h||^2 - 2\langle a, h\rangle \cdot \langle x, h\rangle + 2\langle a, x\rangle \cdot \langle x, h\rangle^2\right\} e^{-||x||^2}$$

Au point x_+, on obtient ainsi

$$Q_{x_+}(h) = -\frac{1}{\sqrt{2}||a||}\left\{||a||^2||h||^2 + \langle a, h\rangle^2\right\}$$

qui est définie négative, donc x_+ est un maximum local.

Comme f est impaire, sa Hessienne a un comportement inverse au point x^- qui est donc un minimum local.

————————

Exercice 6.18. *Déterminer les extrema de la fonction*

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y)e^{-(x^2+y^2)} \in \mathbb{R}.$$

————————

On observe que g tend vers 0 lorsque $||(x, y)|| \to +\infty$ et qu'elle prend des valeurs positives et négatives. Comme g est continue, on en déduit qu'elle atteint son maximum global et son minimum global dans $\mathbb{R}^2$. Le gradient de g est

$$\nabla g = \begin{bmatrix} (1 - 2x(x - y))e^{-(x^2+y^2)} \\ (-1 - 2y(x - y))e^{-(x^2+y^2)} \end{bmatrix}.$$

Il s'annule en exactement deux points $p_+ = (1/2, -1/2)$ et $p_- = (-1/2, 1/2) = -p_+$ (notons que g est impaire), qui sont donc les deux uniques extrema de g. Comme $g(p_+) = e^{-1/2}$ et $g(p_-) = -e^{-1/2}$, on en déduit que p_+ (resp. p_-) est le point qui réalise le maximum (resp. minimum) global de g.

————————

Exercice 6.19. *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mq $0 < \Delta u(0)$ ssi pour tout r assez petit,*

$$u(0) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta.$$

————————

On effectue un D.L. de u à l'ordre 2 exprimé en coordonnées polaires,

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u(0) + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}(0) + r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}(0) +$$
$$\frac{1}{2}\left\{r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0) + 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(0) + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0)\right\} + o(r^2).$$

On intègre par rapport à θ pour obtenir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta = u(0) + \frac{r^2}{2}\Delta u(0) + o(r^2).$$

Le résultat s'ensuit.

————————

Exercice 6.20. *On considère la courbe gauche*

$$\Gamma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 - z = y^2 + z - 1 = 0\}.$$

1) Déterminer (multiplicateurs de Lagrange) les valeurs extrémales de $(x,y,z) \in \Gamma \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$ et préciser les points qui les réalisent.

2) Retrouver ces résultats par un calcul direct.

————————

1) On note $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $g(x,y,z) = y^2 + z - 1$ et $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Le théorème du multiplicateur de Lagrange assure que si p est un extremum local de ϕ sous la contrainte $p \in \Gamma$ (i.e. $f = g = 0$), alors il existe des multiplicateurs $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla\phi(p) = \lambda\nabla f(p) + \mu\nabla g(p),$$

ce qui exprime que le noyau de la différentielle de $p \in \mathbb{R}^3 \mapsto (f,g)(p) \in \mathbb{R}^2$ est orthogonal au gradient de ϕ en p.

On obtient ici le système suivant, pour $p = (x,y,z)$: il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $x \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 1$. On ne peut pas avoir $\mu = 0$ sinon $z = -1/2$, ce qui contredit $x^2 + y^2 - z = 0$. Ainsi $\mu \neq 0$ et $y = 0$. Comme $(x, y, z) \in \Gamma$, il vient enfin $z = x^2 = 1$, ce qui conduit aux deux points

$$A = (1, 0, 1) \text{ et } B = (-1, 0, 1).$$

Si $x = 0$, la contrainte $(0, y, z) \in \Gamma$ conduit aux deux points

$$C = (0, 1/\sqrt{2}, 1/2) \text{ et } D = (0, -1/\sqrt{2}, 1/2).$$

Il est naturel que ces points arrivent par paires, car Γ est invariante par les symétries $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$. On obtient

$$\phi(A) = \phi(B) = 2 \text{ et } \phi(C) = \phi(D) = 3/4.$$

Attention : le théorème de Lagrange fournit une condition nécessaire pour qu'un point p soit critique, mais cette condition n'est pas suffisante en général. Il faut donc s'assurer que les points A, B, C, D sont effectivement des points qui réalisent des extrema locaux de ϕ. On peut observer pour ce faire que Γ est compacte (faire un dessin !), car

$$0 \leq x^2 + y^2 = z = 1 - y^2 \leq 1.$$

On en déduit que ϕ atteint son maximum en A, B et son minimum en C, D.

2) On peut estimer directement les extrema globaux de ϕ sur Γ en procédant comme suit : on note que $\phi(x, y, z) = z + z^2$ avec $z = 1 - y^2 = x^2 + y^2$.

La valeur maximale de ϕ correspond donc à la valeur maximale de z qui est $z = 1$, atteinte en A et B. La valeur minimale de ϕ correspond à la valeur minimale de z atteinte lorsque $x = 0$ et $2y^2 = 1$, donc en C et D.

————————

Exercice 6.21. *Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique et*

$$f : x \in S \mapsto \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R},$$

où S désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Ecrire les conditions de Lagrange vérifiées par les points qui réalisent les extrema de f. Déterminer les extrema de f en fonction des valeurs propres de A. En déduire l'image $f(S)$.

————————

Notons $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ de sorte que $S = (h = 0)$. La condition de Lagrange stipule que si x réalise un extremum de f sur S, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x) = \alpha \nabla h(x).$$

Comme A est diagonalisable en base orthonormée, on peut effectuer un changement orthonormé de coordonnées pour se ramener au cas où A est une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, les valeurs propres de A étant ordonnées $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. La condition de Lagrange s'écrit alors

$$\lambda_1 x_1 = \alpha x_1,\ \lambda_2 x_2 = \alpha x_2 \ldots, \lambda_n x_n = \alpha x_n.$$

Les extrema de f sont λ_1 et λ_n, atteints respectivement en $(1, 0, \ldots, 0)$ et $(0, \ldots, 0, 1)$, et $f(S) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

————————

6.4 Sous-variétés

Exercice 6.22. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application lisse, avec $\varphi(0) = (0, 0)$, dont l'image Γ est incluse dans la cubique cuspidale*

$$\mathcal{C} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 = x^3\right\}.$$

Montrer qu'on a nécessairement $\varphi'(0) = (0, 0)$.

————————

On note $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ et on effectue un D.L. à l'ordre de 1 de x et y, $x(t) = at + o(t)$ et $y(t) = bt + o(t)$. L'inclusion $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$ se traduit par la relation algébrique

$$a^3 t^3 + o(t^3) = o(t^2) = x(t)^3 = y(t)^2 = b^2 t^2 + o(t^2),$$

on en déduit que $b = 0 = y'(0)$. Pour contrôler a, il faut pousser le D.L. un cran plus loin. On écrit $y(t) = ct^2 + o(t^2)$ et on injecte dans la relation $x(t)^3 = y(t)^2$ pour obtenir

$$a^3 t^3 + o(t^3) = x(t)^3 = y(t)^2 = c^4 t^4 + o(t^4) = o(t^3),$$

ce qui implique $a = x'(0) = 0$.

Il s'ensuit que la cubique cuspidale est une courbe géométrique singulière à l'origine : la singularité de la paramétrisation est d'origine géométrique, elle n'est pas due à un mauvais choix de paramétrisation analytique.

————————

Exercice 6.23. *Montrer que les propriétés suivantes sont localement équivalentes :*

i) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est le graphe d'une fonction d'une variable.

ii) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière ;

iii) il existe un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(\{x = 0\}) = \Gamma$;

iv) Il existe une submersion lisse $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\Gamma = F^{-1}(0)$.

————————

Si $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = f(x)\}$ est le graphe d'une fonction lisse, alors $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation régulière de Γ, donc (i) implique (ii). Réciproquement si $\Gamma = \varphi(I)$ admet la paramétrisation régulière $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, on se place au voisinage d'un point tel que $x'(t) \neq 0$ (quitte à interchanger les rôles de x et y). Le théorème d'inversion locale assure que la fonction x est inversible au voisinage de ce point. On peut donc réaliser Γ comme le graphe de la fonction $y \circ x^{-1}$, d'où $(ii) \Rightarrow (i)$.

Soit $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation régulière de Γ. Le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est non nul en tout point, on se place au voisinage d'un point tel que $y'(t) \neq 0$ (on peut s'y ramener quitte à composer par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$). Alors $\Phi : (s, t) \mapsto (s + x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme (local) tel que $\Phi(\{s = 0\}) = \Gamma$. Ainsi $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Réciproquement si $\Gamma = \Phi(\{s = 0\})$ est l'image de $\{s = 0\}$ par un difféomorphisme $\Phi(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$ alors Γ admet la paramétrisation régulière $\varphi : t \mapsto (\alpha(0, t), \beta(0, t))$, donc $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Considérons l'ensemble des points (x, y) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tels que $F(x, y) = 0$, où $F : U \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. On suppose que la différentielle dF ne s'annule pas en un point $(x_0, y_0) \in U$. L'une au moins des deux dérivées partielles ne s'annule pas, disons $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ pour fixer les idées. Par continuité, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ ne s'annule pas pour (x, y) dans un petit voisinage V de (x_0, y_0). Le théorème des fonctions implicites assure alors l'existence d'un voisinage $V' \subset V$ de (x_0, y_0) tel qu'il existe une fonction lisse f telle que

$$\{(x, y) \in V' \,/\, F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V' \,/\, y = f(x)\}.$$

Cela montre l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$.

Réciproquement si Γ est le graphe d'une fonction f, alors $\Gamma = F^{-1}(0)$ où $F(x, y) = y - f(x)$ est une submersion, donc $(i) \Rightarrow (iv)$.

————————

Exercice 6.24. *On considère une fonction lisse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la surface régulière*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2\,;\, z = xf(y/x)\}.$$

Montrer que tous les plans tangents à S contiennent l'origine $(0, 0, 0)$.

————————

La surface S est régulière, comme tout graphe d'une fonction lisse. Soit $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, xf(y/x)) \in \mathbb{R}^3)$ une paramétrisation de S. Les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Big(1, 0, f(y/x) - \frac{y}{x} f'(y/x)\Big) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, f'(y/x))$$

sont linéairement indépendants. Le plan tangent T_pS est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux qui passe par p et est tangent à S. Il est donné par

$$T_p(S) = p + Vect\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

On observe que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \varphi(x, y) = (0, 0, 0);$$

cela montre que l'origine appartient à chaque T_pS.

————————

Exercice 6.25. *Montrer que le groupe orthogonal*

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathrm{Id}\}$$

et le groupe spécial orthogonal

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mid A^t A = \mathrm{Id} \ \textit{et} \ \det \mathrm{A} = 1\}$$

sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$ *dont on précisera la dimension.*

————————

On identifie $\mathbb{R}^{n^2}$ et l'ensemble $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n et on note $Sym(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n : c'est une sous-variété linéaire de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$. On note I_n l'identité. Considérons

$$f : A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto A^t A \in Sym(n,\mathbb{R}).$$

C'est une application différentiable telle que

$$O(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$$

On vérifie que I_n est une valeur régulière : c'est l'image de $I_n = f(I_n)$, or

$$D_{I_n} f : H \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto H + {}^t H \in Sym(n,\mathbb{R})$$

est une application (linéaire) surjective puisque son noyau est constitué des matrices antisymétriques, donc

$$\operatorname{rang} D_{I_n} f = n^2 - \dim Antisym(n,\mathbb{R}) = \dim Sym(n,\mathbb{R}).$$

Il résulte alors d'un théorème du cours que $O(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2 = \dim Antisym(n,\mathbb{R})$.

La variété $O(n,\mathbb{R})$ est fermée (image réciproque d'un fermé par une application continue) et bornée car si $A = [a_{ij}] \in O(n,\mathbb{R})$, alors

$$\operatorname{tr}(A^t A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \operatorname{tr}(I_n) = n;$$

elle est donc compacte. Elle n'est pas connexe car l'application continue

$$\det : O(n,\mathbb{R}) \mapsto \{-1,+1\}$$

est surjective comme on le vérifie aisément.

Il y a deux composantes connexes, $SO(n,\mathbb{R})$ est celle qui s'envoie par det sur $+1$. Il s'ensuit que $SO(n,\mathbb{R})$ est également une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$.

————————

Exercice 6.26. *Montrer que* $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ *est un groupe de Lie, i.e. une variété telle que les applications de structure*

$$(A,B) \in GL(n,\mathbb{R})^2 \mapsto A \cdot B \in GL(n,\mathbb{R})$$

et $A \in GL(n,\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ *sont lisses.*

————————

Le groupe général linéaire $GL(n,R)$ est l'ensemble des matrices réelles inversibles de taille n. C'est un ouvert de $\mathcal{M}(n,R) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant qui est lisse), donc une variété réelle de dimension n^2.

L'application $(A,B) \mapsto A \cdot B$ est polynomiale en les coefficients de A et B, donc lisse sur $\mathcal{M}(n,R)$ et sur $GL(n,R)$ par restriction. L'application $A \mapsto A^{-1}$ est lisse sur $GL(n,R)$ puisque l'inverse s'exprime à l'aide de fractions rationnelles en les coefficients de A, via

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{Com}\, A}{\det A},$$

où $\mathrm{Com}\, A$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

————————

Exercice 6.27. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface et* $q \in \mathbb{R}^3 \setminus S$*. Montrer que*

$$f : p \in S \mapsto ||p-q|| \in \mathbb{R}$$

est différentiable. Vérifier que $p \in S$ *est un point critique de* f *si et seulement si la droite joignant* p *à* q *est normale à* S *au point* p*.*

————————

La norme $||\cdot||$ est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; comme $p-q \neq 0$ pour tout $p \in S$, on en déduit que l'application

$$f : p \in S \mapsto ||p-q|| \in \mathbb{R}$$

est différentiable sur S.

Un développement limité de f au voisinage de $p \in S$ donne, pour $h \in T_pS$,

$$\begin{aligned} f(p+h) &= ||(p-q)+h|| = \sqrt{||p-q||^2 + 2\langle p-q,h\rangle + o(h)} \\ &= f(p) + \frac{\langle p-q,h\rangle}{||p-q||^2} + o(h) \\ &= f(p) + D_p(f)(h) + o(h) \end{aligned}$$

donc $p \in S$ est un point critique de f (i.e. $D_p(f) \equiv 0$) si et seulement si la droite joignant p à q est normale à S au point p.

————————

Exercice 6.28. *Soit* $g \in \mathbb{N}^*$*. Soit* $D \subset \mathbb{R}^2$ *le disque unité fermé et* $D_1, \dots D_g$ *des disques deux à deux disjoints contenus dans* D*,*

$$D_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 \leq r_i^2\}.$$

On considère

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1-[x^2+y^2])\Pi_{i=1}^g \left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2\right) \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 = f(x,y)\}$$

est une sous-variété compacte et connexe de $\mathbb{R}^3$*. Représentez la.*

2) M est-elle simplement connexe ? Combien a-t'elle de trous ?

————————

La fonction f est à valeurs positives dans $K := D \setminus \cup_i \mathrm{Int} D_i$, donc

$$M = \{(x,y,z) \in K \times \mathbb{R}^+,\ z = \sqrt{f(x,y)}\} \cup \{(x,y,z) \in K \times \mathbb{R}^-,\ z = -\sqrt{f(x,y)}\}$$

est la réunion de deux graphes qui se recollent le long de $\partial K \subset (z=0)$. On en déduit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, sauf peut-être aux points du plan $(z=0)$.

Soit $p = (x,y,0)$ un de ces points et $F(x,y,z) = f(x,y) - z^2$ de sorte que $M = F^{-1}(0)$. Si $(x,y) \in \partial D$ alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x\Pi_{i=1}^g \left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2\right)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y\Pi_{i=1}^g \left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2\right)$$

donc l'une de ces deux dérivées partielles n'est pas nulle puisque $x^2+y^2=1$ et $\partial D \cap D_i = \emptyset$. Si $(x,y) \in \partial D_\ell$ alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-a_\ell)(1-[x^2+y^2])\Pi_{i\neq\ell} \left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2\right)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-b_\ell)(1-[x^2+y^2])\Pi_{i\neq\ell} \left((x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2\right)$$

donc l'une de ces deux dérivées partielles n'est pas nulle également.

Il s'ensuit que F est une submersion au voisinage d'un tel point, ce qui montre que M est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$ (une surface lisse).

L'ensemble M est borné car f est bornée sur K. Comme de plus f est continue, il s'ensuit que M est compact. Par ailleurs M est connexe, comme réunion de deux graphes connexes ayant des points communs.

M est une réalisation d'un tore à g trous. Elle n'est pas simplement connexe, chaque cercle tracé sur M autour de la droite $(a_i,b_i,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$ ne pouvant pas être homotope à un point.

————————

Chapitre 7

Topologie

7.1 Espaces métriques

Exercice 7.1.

1) Montrer que $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (muni de sa valeur absolue).

2) Montrer qu'une suite de réels positifs qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite convergente.

3) Montrer que si $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ est une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \to +\infty$.

————————

1) Il s'agit de comprendre que si une suite d'entiers converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle est stationnaire. On peut utiliser la quantification de la limite avec $\varepsilon = 1/2$: si deux entiers sont à une distance $\leq 1/2$ l'un de l'autre, alors ils sont égaux. On en déduit en particulier que $\ell \in \mathbb{N}$.

2) C'est un exercice de négation logique de quantification : si x_n ne tend pas vers $+\infty$, c'est qu'elle admet une sous-suite majorée. Comme on suppose $x_n \geq 0$, cette sous-suite est bornée, elle admet donc une sous-sous-suite convergente.

3) On raisonne par l'absurde en utilisant les deux questions précédentes. Si $|p_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, alors on peut supposer (quitte à extraire) que $|p_n| \to a$. La question 1) assure alors que $a \in \mathbb{N}^*$. On obtient également $|q_n| \to b = a/|x| \in \mathbb{N}^*$, d'où $|x| = a/b \in \mathbb{Q}$, contradiction.

————————

Exercice 7.2 (Cours 10.5)**.** *Montrer qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence, et qu'elle converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence. En déduire qu'un espace compact est complet.*

————————

Soit (x_n) une suite de Cauchy d'un espace métrique (E, d). Supposons qu'elle admet (au moins) une valeur d'adhérence ℓ, limite de la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, q \geq N \Longrightarrow d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad d(x_n, x_q) < \varepsilon/2.$$

En prenant $q = \varphi(n)$, on obtient

$$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, \ell) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon,$$

ce qui montre que (x_n) converge vers ℓ. La réciproque est claire.

Comme toute suite à valeurs dans un compact admet au moins une valeur d'adhérence, on en déduit que toute suite de Cauchy à valeurs dans un espace métrique compact est convergente, i.e. un métrique compact est complet.

——————————

Exercice 7.3. *Soit (E, d) un espace métrique. On note $\delta := d/(1 + d)$.*

1) Montrer que δ est une distance sur E. Est-elle équivalente à d ?

2) Montrer que (E, d) est complet ssi (E, δ) l'est.

——————————

1) Il est clair que δ vérifie toutes les propriétés d'une distance sauf peut-être l'inégalité triangulaire. Celle-ci est conséquence d'une propriété de sous-additivité de la fonction croissante $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t} \in \mathbb{R}^+$. On observe que f est concave et s'annule en 0, ce qui implique

$$a, b \geq 0 \Longrightarrow f(a + b) \leq f(a) + f(b),$$

comme on le voit en fixant b et en étudiant les variations de $a \mapsto f(a+b)-f(a)-f(b)$ qui s'annule en $a = 0$. Pour $a = d(x, z)$ et $b = d(z, y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta(x, y) = f \circ d(x, y) &\leq f(d(x, z) + d(z, y)) \\ &\leq f \circ d(x, z) + f \circ d(z, y) = \delta(x, z) + \delta(z, y). \end{aligned}$$

2) La propriété résulte de ce que $d(x, y)$ et $\delta(x, y)$ sont équivalentes lorsque x et y sont proches : on a par exemple $\delta(x, y) \leq d(x, y) \leq 2\delta(x, y)$ lorsque $d(x, y) \leq 1$.

——————————

Exercice 7.4. *Soit E un espace vectoriel muni de la distance triviale,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

1) Montrer que les boules ouvertes de rayon 1 sont fermées.

2) Montrer que les boules fermées de rayon 1 sont ouvertes.

3) Quels sont les ouverts et les fermés de E ?

——————————

On remarque qu'une boule ouverte $BO(a, 1) = \{a\}$ de rayon 1 est réduite à son centre, tandis qu'une boule fermée $BF(a, 1)$ de rayon 1 est égale à E. Ainsi

– une boule ouverte de rayon 1 est fermée ;
– une boule fermée de rayon 1 est ouverte ;
– l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas nécessairement une boule fermée ;

– tout sous-ensemble de E est à la fois ouvert et fermé.

————————

Exercice 7.5. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte $BO(a,r)$ est la boule fermée $BF(a,r)$. Montrer que l'intérieur d'une boule fermée $BF(a,r)$ est la boule ouverte $BO(a,r)$.*

————————

L'adhérence d'une boule ouverte $BO(a,r)$ est contenue dans la boule fermée $BF(a,r)$ (qui est fermée). Comme tout point x de la sphère $\partial BF(a,r)$ est limite de points $a+(1-1/j)(x-a) \in BO(a,r)$, on en déduit $\overline{BO(a,r)} = BF(a,r)$.

L'intérieur d'une boule fermée $BF(a,r)$ contient la boule ouverte $BO(a,r)$ (qui est ouverte). Aucun point x de la sphère $\partial BF(a,r)$ n'appartient à l'intérieur car toute boule $B(x,\varepsilon)$ contient des points $a+(1+\varepsilon/2)(x-a)$ hors de $BF(a,r)$. Il s'ensuit que l'intérieur de la boule fermée $BF(a,r)$ est la boule ouverte $BO(a,r)$.

————————

7.2 Espaces vectoriels normés

Exercice 7.6. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace strict est d'intérieur vide.*

————————

Soit $F \subset E$ un sev d'intérieur non vide, ainsi F contient une boule ouverte $B(a,r)$ avec $r>0$. Comme F est stable par addition de $-a$, il vient

$$B(0,r) = B(a,r) - a \subset F.$$

Comme F est stable par multiplication par $\lambda \in K^*$, on en déduit que $E = K^*B(0,r) \subset F$ donc $F=E$.

————————

Exercice 7.7. *Soit (E,N) un espace vectoriel normé sur $K=\mathbb{R}$ (ou $K=\mathbb{C}$). Montrer que (E,N) est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.*

————————

Supposons que (E,N) est complet et que $\sum_{n\geq 0} N(x_n) < +\infty$. Alors la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$ est une suite de Cauchy dans E, car

$$N(S_{N+p}-S_N) = N\left(\sum_{n=N+1}^{N+p} x_n\right) \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} N(x_n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} N(x_n)$$

tendr vers zéro, lorsque $N \to +\infty$, uniformément par rapport à p. Comme (E,N) est complet on en déduit que S_N converge.

Réciproquement supposons que toute série ACV est CV et soit (a_n) une suite de Cauchy. On pose $a_{-1} = 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que

$$N(a_n - a_{n-1}) \leq 2^{-n},$$

La série de terme général $x_n = a_n - a_{n-1}$ est alors ACV donc CV, mais $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n = a_N$, donc (a_n) est convergente.

————————

Exercice 7.8. *Soit* $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R},\ (a, b) \in \mathbb{Q}\}$. *On note*

$$N_1(x) = |a + b\sqrt{2}| \quad \textit{et} \quad N_2(x) = |a| + |b|.$$

Montrer que E *est un* $\mathbb{Q}$*-ev de dimension* 2 *et que* N_1, N_2 *sont des normes sur* $\mathbb{Q}$ *qui ne sont pas équivalentes.*

————————

On observe que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (de dimension infinie) et on vérifie que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-sev de $\mathbb{R}$. Il est engendré par 1 et $\sqrt{2}$; ces deux vecteurs sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) donc $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$.

Notons que $N_1(x) = |a + b\sqrt{2}| \leq |a| + \sqrt{2}|b| \leq \sqrt{2}(|a| + |b|) = \sqrt{2}N_2(x)$. Il n'y a cependant pas d'inégalité réciproque : on décompose $\sqrt{2} = 1 + \sum_{n\geq 1} x_n 10^{-n}$, et on pose $b_N = -10^N$, $a_N = 10^N + 10^N \sum_{n=1}^{N} x_n 10^{-n}$, de sorte que

$$N_1(a_N + b_N\sqrt{2}) = |a_N + b_N\sqrt{2}| = 10^N \sum_{n\geq N+1} x_n 10^{-n} \leq 1,$$

tandis que $N_2(a_N + b_N\sqrt{2}) \geq |b_N| = 10^N \to +\infty$.

————————

Exercice 7.9. *Soit* (E, N) *un evnormé sur* $\mathbb{R}$ *et* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire.*

1) Montrer que φ *est continue ssi* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est fermé.*

2) Montrer que si φ *n'est pas continue, alors* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est dense.*

3) Donner un exemple de forme linéaire non continue.

————————

1) Si φ est continue alors $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé. Réciproquement supposons que $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé. Si φ est nulle il n'y a rien à montrer, on suppose donc que ce n'est pas le cas et on fixe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$. L'ensemble $a + \operatorname{Ker}\varphi$ est fermé et $0 \notin a + \operatorname{Ker}\varphi$, il existe donc $r > 0$ tel que la boule ouverte $B = B(0, r)$ ne rencontre pas $a + \operatorname{Ker}\varphi$. On observe à présent que

$$\sup_{N(x)\leq r} |\varphi(x)| \leq 1.$$

En effet si $|\varphi(x)| = \lambda > 1$ avec $N(x) \leq r$, alors $\varphi(x/\pm\lambda) = \varphi(a)$ avec $x/\pm\lambda \in B$, donc $x/\pm\lambda \in a + \operatorname{Ker}\varphi$ ce qui contredit notre hypothèse. Il s'ensuit que φ est continue puisque pour tout $x \in E$ on a $|\varphi(x)| \leq r^{-1}N(x)$.

2) Si φ n'est pas continue, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas fermé donc son adhérence est un sev de E qui contient strictement $\operatorname{Ker}\varphi$, il est donc égal à E car $\operatorname{Ker}\varphi$ est de codimension 1.

3) Considérons E l'espace des polynômes muni de la norme $N(P) = \sup_{[0,1]}|P|$, et $\varphi : P \in E \mapsto P(2) \in \mathbb{R}$ l'évaluation au point 2. La suite de polynômes $P_n(x) = (x/2)^n$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(P_n) = 1 \quad \text{tandis que} \quad N(P_n) \to 0.$$

Cette forme linéaire n'est donc pas continue.

————————

Exercice 7.10. *Soit E un evn et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire. Montrer que φ est continue ssi il existe $C > 0$ telle que*

$$|\varphi(x,y)| \leq C||x||\,||y||, \ \forall x, y \in E.$$

————————

On munit ici implicitement l'espace produit $E \times E$ de la norme produit $N(x,y) = ||x|| + ||y||$. Si φ vérifie l'inégalité proposée, alors elle est clairement continue à l'origine. On en déduit la continuité en tout point grâce à la bilinéarité,

$$\begin{aligned} |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)| &= |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) + \varphi(x_0,y) - \varphi(x_0,y_0)| \\ &\leq |\varphi(x-x_0,y)| + |\varphi(x_0,y-y_0)| \\ &\leq C\left\{||x-x_0|| \cdot ||y|| + ||x_0|| \cdot ||y-y_0||\right\}. \end{aligned}$$

Réciproquement on raisonne par contraposée. Si l'inégalité n'est pas satisfaite c'est qu'il existe des vecteurs x_j, y_j de norme 1 tels que $|\varphi(x_j,y_j)| \geq j$. En posant $x'_j = x_j/\sqrt{j}$ et $y'_j = y_j/\sqrt{j}$, on obtient une suite de points (x'_j, y'_j) qui tend vers $(0,0)$ et telle que $\varphi(x'_j, y'_j)$ ne tend pas vers 0, donc φ n'est pas continue à l'origine.

————————

7.3 Espaces de fonctions ou de matrices

Exercice 7.11. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.*

1) On considère $N_p(f) := (\int_0^1 |f(x)|dx)^{1/p}$ pour $p = 1, 2$. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.

2) Quelle est l'adhérence (pour chacune de ces normes) du sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales ?

————————

1) Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $N_1 \leq N_2$. L'intégration des majorations uniformes $|f(t)| \leq N_\infty(f)$ fournit par ailleurs $N_2 \leq N_\infty$. Il n'y a cependant aucun contrôle réciproque. Considérons la suite $f_j(x) = x^j \in E$, elle vérifie $N_\infty(f_j) = 1$ tandis que

$$N_2(f_j) = \sqrt{\int_0^1 x^{2j}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \longrightarrow 0.$$

La suite $g_j = \sqrt{2j+1}f_j$ vérifie donc $N_2(g_j) = 1$ tandis que

$$N_1(g_j) = \sqrt{2j+1}\int_0^1 x^j\,dx = \frac{\sqrt{2j+1}}{j+1} \longrightarrow 0.$$

2) Toute fonction continue est limite uniforme sur $[0,1]$ de fonctions polynomiales, donc $\mathcal{P}$ est dense dans (E, N_∞). Comme $N_1 \leq N_2 \leq N_\infty$, on en déduit que $\mathcal{P}$ est également dense dans (E, N_i).

————————

Exercice 7.12. *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.*

————————

Soit $e_{\varphi(n)}$ une suite extraite. Elle ne peut pas être de Cauchy car deux points consécutifs restent à distance $\sqrt{2}$ l'un de l'autre, cf

$$||e_{\varphi(n+1)} - e_{\varphi(n)}||^2 = ||e_{\varphi(n+1)}||^2 - 2\langle e_{\varphi(n+1)}, e_{\varphi(n)}\rangle + ||e_{\varphi(n)}||^2 = 2.$$

————————

Exercice 7.13. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme sup. Mq l'ensemble*

$$\mathcal{B} := \{x^n \in E \,/ n \in \mathbb{N}\}$$

est un fermé borné de (E, N_∞) qui n'est pas compact.

————————

La première chose à comprendre est que $f_n = x^n$ est une suite à valeurs dans $\mathcal{B}$ qui n'admet aucune sous-suite convergente. En effet si $N_\infty(f_{n_j} - g) \to 0$ avec $n_j \to +\infty$, alors la valeur d'adhérence g devrait être continue (limite uniforme de fonctions continues), or f_{n_j} converge simplement vers la fonction discontinue qui vaut zéro sur $[0,1[$ et 1 au point 1. On en déduit que $\mathcal{B}$ n'est pas compact.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est borné car inclus dans la boule unité de E. Une suite à valeurs dans $\mathcal{B}$ est du type $f_j(x) = x^{n_j}$ où (n_j) est une suite d'entiers (arbitraire, en particulier elle n'est pas nécessairement croissante). Si cette suite converge dans E (i.e. uniformément sur $[0,1]$) vers une fonction g, il résulte de notre première observation que la suite (n_j) est nécessairement bornée, elle est donc en fait stationnaire et la limite g appartient à $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est fermé.

————————

Exercice 7.14 (Cours)**.** *Montrer que*

1) $O(n,\mathbb{R})$ *est un groupe compact (topologie induite par une norme).*

2) $SO(n,\mathbb{R})$ *est un groupe connexe non commutatif pour* $n \geq 3$.

————————

1) Les compacts de $\mathbb{R}^{n^2}$ sont les fermés bornés. L'application $M \in M(n,\mathbb{R}) \mapsto f(M) = M^tM \in M(n,\mathbb{R})$ est continue donc $O(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(Id)$ est fermé. Toutes les normes étant équivalentes sur $M(n,\mathbb{R})$, on peut travailler avec

$$N(M) = \sqrt{\mathrm{tr} M^tM} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}^2}.$$

Le groupe $O(n,\mathbb{R})$ est inclus dans la sphère centrée en 0 et de rayon $\sqrt{n}$ pour cette norme, on en déduit que $O(n,\mathbb{R})$ est borné.

2) Pour montrer que $SO(n,\mathbb{R})$ est connexe, il suffit de relier une matrice arbitraire $A \in SO(n,\mathbb{R})$ à Id par un chemin continu de matrices dans $SO(n,\mathbb{R})$. On commence par rappeler que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de dimension 1 (ayant des 1 ou des -1 sur la diagonale) et de dimension 2 de la forme

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A'_\theta = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Le chemin s'obtient par exemple en considérant $A_{t\theta}$ et $A'_{t\theta}$, $0 \leq t \leq 1$ pour se ramener à une matrice qui n'a que des 1 et des -1 (en nombre pair) sur la diagonale. On traite ces derniers deux par deux en les considérant comme une matrice de rotation d'angle π et en déformant continûment l'angle sur zéro.

Le groupe des rotations 2-dimensionnelles $SO(2,\mathbb{R}) \sim S^1$ est commutatif, mais ce n'est plus vrai en dimension $n \geq 3$. Pour $n = 3$ on peut considérer par exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

pour lesquelles on obtient $AB(e_1) = -BA(e_1)$.

————————

Exercice 7.15.

1) Mque l'ensemble $\mathcal{N} \subset M(n,\mathbb{R})$ *des matrices nilpotentes est connexe.*

2) Montrer que $\mathcal{N}$ *est un fermé d'intérieur vide.*

————————

1) Il suffit de savoir relier n'importe quelle matrice nilpotente N à la matrice nulle par un chemin qui reste dans $\mathcal{N}$. Le chemin $t \mapsto tN$ convient.

2) Si $N_j \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ converge vers $N \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$, alors $0 = N_j^n \to N^n = 0$, donc N est nilpotente, i.e. $\mathcal{N}$ est fermé. C'est un sev strict, il est donc d'intérieur vide.

————————

Chapitre 8

Intégrales et séries

8.1 Intégration

8.1.1 Fondamentaux

Bien que seule l'intégrale des fonctions continues par morceaux soit au programme de l'agrégation interne, il est sans doute utile que vous connaissiez la définition de l'intégrale de Riemann : une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tq $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon.$$

Exercice 8.1.

1) Montrer que l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

2) Montrer que la fonction $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & si \quad x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \wedge q = 1 \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable.

3) Montrer qu'une fonction continue par morceaux est Riemann-intégrable.

Exercice 8.2. *Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(]a, b[, \mathbb{R})$ telles que f^2, g^2 sont intégrables.*

1) Montrer que la fonction fg est intégrable et

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right).$$

2) Donner un exemple d'une fonction intégrable $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ telle que la fonction f^2 n'est pas intégrable.

Exercice 8.3. *En utilisant la notion de somme de Riemann, calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite*

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Exercice 8.4. *Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continues telles que*

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Exercice 8.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.*

1) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t)dt = 0.$$

2) En approchant f par des fonctions en escaliers, montrer le même résultat sans supposer f de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8.6. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

1) Montrer (exemple) que f ne tend pas nécessairement vers zéro en $+\infty$.

2) Mq $\lim_{+\infty} f = 0$ si f est décroissante (ou uniformément continue).

Exercice 8.7. *Trouver un équivalent à la suite $S_N = \sum_{j=1}^N n^7$ lorsque N tend vers $+\infty$. On pourra comparer cette série à une intégrale.*

8.1.2 Volumes

Exercice 8.8. *Soit $T > 0$. On considère la cubique cuspidale*

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, y^2 = x^3\}.$$

1) Mq $\varphi : t \in (0,T] \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ paramétrise une partie $\mathcal{C}_T$ de $\mathcal{C}$.

2) Montrer que la longueur de $\mathcal{C}_T$ est $\ell(T) = \frac{1}{27}(4+9T^2)^{3/2} - \frac{8}{27}$.

Exercice 8.9. *Montrer que l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est πab.*

Exercice 8.10. *On note V_1 le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, λ la mesure de Lebesgue, et $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$, pour $s > 0$.*

1) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda(x) = \pi^{n/2}$.

2) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda(x) = \int_0^1 \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, e^{-||x||^2} > t\}\right) dt$.

3) En déduire, en utilisant l'homogénéité de la fonction volume, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}d\lambda(x) = V_1 \int_0^1 (-\ln t)^{n/2}dt \text{ et } V_1 = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

4) Montrer par récurrence que $V_1 = \pi^k/k!$ si $n = 2k$ et

$$V_1 = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} \text{ si } n = 2k+1.$$

8.1.3 Divers classiques

Exercice 8.11. *On considère $I_n = \int_0^\infty x^n e^x dx$, où $n \in \mathbb{N}$.*

1) Montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n + eb_n$.

2) On suppose que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n \geq 1/q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8.12. *Soit $1 < p \leq +\infty$, et q son exposant conjugué : $1/p + 1/q = 1$. Pour $f \in L^p([0,1],\mathbb{R})$ on considère $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.*

1) Montrer que $|F(x) - F(y)| \leq ||f||_p |x-y|^{1/q}$.

2) Montrer que $\lim_{x\to 0} F(x)x^{-1/q} = 0$ et que l'exposant $1/q$ est optimal.

Exercice 8.13. *Soit $I_n = \int_0^1 (1+t^4)^{-n}dt$, avec $n \in \mathbb{N}$. Etudier la convergence de la suite I_n et des séries $\sum_{n\geq 0} I_n$, $\sum_{n\geq 1} I_n/n$.*

Exercice 8.14. *Calculer*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\, dx.$$

Exercice 8.15. *Calculer les intégrales*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx.$$

8.2 Séries

8.2.1 Séries positives

Exercice 8.16. *Quelle est la nature des séries de terme général*

$$\frac{a^n}{n!},\ \frac{a^n}{n^b},\ \frac{n!}{n^n},\ \frac{n^n}{2n!},$$

Exercice 8.17 (Série harmonique 1)**.**
Montrer de plusieurs façons que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge.*

Exercice 8.18. *Soit* $a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *deux suites positives telles que* $a_n \sim b_n$.

1) Montrer que $\sum a_n$ *converge si et seulement si* $\sum b_n$ *converge.*

2) Donner un contre-exemple si les termes généraux ne sont pas positifs.

Exercice 8.19 (Série harmonique 2)**.**
Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)$ *converge. En déduire l'existence de la constante d'Euler*

$$\gamma = \lim_{N\to+\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln N\right\}.$$

Exercice 8.20.

1) Donner un exemple de $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *tq* $a_{n+1}/a_n \to 1$ *et* $\sum a_n$ *convergente.*

2) Donner un exemple de $(b_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *tq* $b_{n+1}/b_n \to 1$ *et* $\sum b_n$ *divergente.*

8.2.2 Comparaison séries-intégrales

Exercice 8.21 (Riemann)**.** *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Mq la série de terme général* n^{-a} *converge si et seulement si* $a > 1$ *et donner un équivalent au reste d'ordre* n.

Exercice 8.22 (Bertrand)**.** *Indiquer pour quelles valeurs de* $a, b \in \mathbb{R}$ *la série* $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^a(\ln n)^b}$ *cv. Donner un équivalent à la somme partielle lorsque* $a < 1$.

Exercice 8.23 (Série harmonique 3)**.** *En comparant avec* $\int_1^N dt/t$*, montrer que* $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ *est équivalent à* $\ln N$*. Quel est le terme suivant du développement asymptotique ?*

Exercice 8.24. *Trouver un équivalent en zéro à* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2\varepsilon}$.

Exercice 8.25. *Trouver un équivalent en zéro à* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n\varepsilon)}$.

8.2.3 Séries semi-convergentes

Exercice 8.26. *Préciser la nature (convergence, semi-convergence, absolue convergence, divergence) de la série numérique de terme général*

1) $a_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^2})$

2) $b_n = \frac{(-1)^n}{n} \ln(5 + \frac{(-1)^n}{n})$

3) $c_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$

Exercice 8.27. *Soit* $(b_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *une suite qui décroît vers zéro.*

1) Montrer que la série de terme général $a_n = (-1)^n b_n$ *est semi-convergente.*

2) Montrer que la valeur absolue du reste d'ordre est majoré par b_{N+1} *et que son signe est celui de* $(-1)^{N+1}$.

Exercice 8.28 (Abel 1)**.**

1) Montrer que la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$ *converge.*

2) Mq cette série ne converge pas absolument (minorer $|\sin n| \geq (\sin n)^2$*).*

Exercice 8.29 (Abel 2)**.** *En utilisant la transformation d'Abel, montrer que la série de terme général* $\frac{e^{inx}}{n}$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

8.2.4 Divers

Exercice 8.30. *Calculer les sommes*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \quad \textit{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

Exercice 8.31. *Soit* $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Montrer que*

1) si $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *converge, alors* $\sum (a_n + b_n)$ *converge ;*

2) si $\sum a_n$ *converge et* $\sum b_n$ *diverge, alors* $\sum (a_n + b_n)$ *diverge ;*

3) il est possible que $\sum (a_n + b_n)$ *converge tandis que* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *divergent.*

Exercice 8.32.

1) Montrer que si une série de nombres réels converge absolument alors elle converge. Quelle propriété de $\mathbb{R}$ *utilisez vous ?*

2) Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 8.33. *Soit* $(d_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $\sum d_n$ *diverge. Quelle est la nature des séries dont le terme général est*

1) $\frac{d_n}{1+d_n}$ *2)* $\frac{d_n}{1+n^2 d_n}$ *3)* $\frac{d_n}{1+d_n^2}$ *4)* $\frac{d_n}{1+n d_n}$

Exercice 8.34. *Montrer que pour tout* $|x| < 1$,

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^n.$$

Exercice 8.35. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$. *On définit* $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. *En utilisant le produit de Cauchy de séries, montrer que* $e^{x+y} = e^x e^y$.

Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

Introduction

En principe il ne devrait pas être nécessaire de faire un cours différent pour les suites et pour les séries : une série (de fonctions) converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge (simplement, uniformément,etc). Réciproquement, on peut étudier les propriétés d'une suite (f_n) en étudiant la série télescopique de terme général $f_n - f_{n-1}$.

En pratique c'est une toute autre histoire. Pour faire bref, retenez qu'établir la convergence d'une suite est une question fondamentale et difficile et qu'elle est un peu plus facile à appréhender lorsqu'on se la pose en termes de série. Une bonne illustration de ce principe est le concept de convergence normale qui n'a pas d'équivalent (pratique) dans le langage des suites.

Pour étudier en pratique la convergence d'une série de fonctions, on procède dans l'ordre inverse de ce qu'il faut faire pour les suites de fonctions ! On commence par étudier la convergence normale (c'est la plus forte, elle règle 95 % des cas). Si il n'y a pas convergence normale, on étudie la convergence uniforme au moyen de méthodes sophistiquées. Il y a essentiellement deux situations que vous devez connaître :

-les séries alternées (c'est rare mais facile),

-la transformation d'Abel (moins rare, très important, au programme).

Cela règle 4,99 % des cas restants. En tout dernier recours, on s'intéresse à la convergence simple qui n'est pas uniforme, c'est beaucoup plus subtil et rare...donc vous n'avez rien à savoir de particulier (si ce n'est un exemple, voir Exercice 9.14).

Vous devez enfin connaître un certain nombre de choses sur deux familles particulières (et particulièrement importantes) de séries de fonctions : les séries entières et les séries de Fourier. Tout ce qui se passe dans le disque ouvert de convergence des premières est au programme et est (relativement) simple : on travaille à l'intérieur du domaine de convergence normale. Ça se complique au bord du disque de convergence : la trace d'une série entière sur le bord de son disque de convergence est une série de Fourier et les questions de convergence de ces dernières sont subtiles.

Vous devez bien maîtriser la théorie L^2 des séries de Fourier (c'est à la fois relativement simple et un joli versant de l'algèbre bilinéaire). Il y a de plus trois résultats au programme sur les questions de convergence plus fines :

1) Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ alors sa série de Fourier converge normalement et donc tout va bien ! (on a juste besoin de continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux) ;

2) Théorème de Fejer (cvgce uniforme des moyennes de Césaro lorsque f est continue) ;

3) Théorème de Dirichlet (cvgce ponctuelle si...)

Et maintenant...au travail !

9.1 Un peu d'analyse fonctionnelle

9.1.1 Rappels sur les suites dans les espaces métriques

Les suites de fonctions sont des éléments d'un espace vectoriel topologique (de dimension infinie), dont la topologie est bien souvent (mais pas toujours, attention !) ï¿½*métrisable*, c'est à dire soit directement donnée par une métrique, soit telle qu'il en existe une (un peu tarabiscottée) qui induit la même topologie.

Il vous faut donc être au point tout d'abord sur la notion de convergence des suites dans les espaces métriques (et de temps en temps également sur un espace topologique plus général).

Exercice 9.1 (Classique/entraînement).

1) Montrer qu'une suite d'entiers est convergente ssi elle est stationnaire.

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel et $p_n/q_n \to x$ des approximants rationnels avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $p_n \to +\infty$.

Exercice 9.2 (Cours). *ï¿½*

1) Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite d'éléments de E converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

2) Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse de compacité ?

Exercice 9.3 (Cours). *Soit (E, d) un espace métrique complet et $F \subset E$. Montrer que $(F, d_{|F})$ est complet ssi F est fermé.*

Exercice 9.4 (Classique).

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que (E, N) est un Banach (i.e. est complet) ssi toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 9.5 (Cours). *Soit (E, d) un espace métrique.*

0) Donner un exemple d'une suite de Cauchy non convergente.

1) Montrer qu'une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.

2) En déduire qu'une suite de Cauchy converge ssi elle admet une valeur d'adhérence.

3) En déduire qu'un espace métrique compact est complet.

Exercice 9.6 (Grand classique). *Soit (E, d) un espace métrique.*

1) Montrer que si a, b, c sont des réels positifs alors

$$c \leq a + b \Rightarrow \frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

2) En déduire que $\delta := d/(1+d)$ est une distance sur E

3) Montrer que (E, d) est complet ssi (E, δ) est complet.

9.1.2 Exemples d'espaces complets

Il existe des milliers d'exercices du type "montrer que tel espace de fonctions (ou de chaises) muni de telle distance est complet". Dans le cas des espaces vectoriels, la méthode de démonstration est quasi-systématiquement la même. Avec un peu d'entraînement et de perséverance, vous y arriverez très bien (mais pensez à entretenir votre forme...).

Exercice 9.7 (Cours). *Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la distance d induite par la norme $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

1) Montrer que $(\mathcal{B}, d)$ est complet.

2) Montrer que le sous-espace $E \subset \mathcal{B}$ des fonctions continues est fermé.

3) En déduire que $(E, d_{|E})$ est complet. Plus généralement, si E désigne à présent l'espace des fonctions continues sur un espace métrique (K, d_K) à valeurs dans un espace métrique (F, d_F), à quelles conditions sur $(K, d_K), (F, d_F)$, l'espace (E, d) est-il complet pour la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d_F(f(x), g(x)) \ \ ?$$

Pour l'exercice qui suit, vous avez besoin d'un des rares théorèmes du programme sur la régularité d'une limite de suites de fonctions (voir la rubrique "espaces de Banach").

Exercice 9.8 (Quasi-cours). *Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ muni de*

$$d : (f,g) \in E^2 \mapsto \sum_{j\geq 0} 2^{-j} \frac{N_\infty(f^{(j)} - g^{(j)})}{1 + N_\infty(f^{(j)} - g^{(j)})}.$$

Montrer que d est une distance sur E et que (E,d) est complet.

Exercice 9.9 (Classique). *Soit $\alpha > 0$. On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ α-höldériennes, i.e. telles qu'il existe $C > 0$,*

$$\forall x,y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

On pose, pour $f \in \mathcal{H}_\alpha$,

$$N_\alpha(f) := |f(0)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1) Montrer que $\mathcal{H}_\alpha$ est constitué uniquement de fonctions constantes si $\alpha > 1$. Dans la suite on suppose donc $\alpha \leq 1$.

2) Donner un exemple de fonction dans $\mathcal{H}_\alpha$ non dérivable. Donner un exemple de fonction continue qui n'est dans aucun $\mathcal{H}_\alpha$.

3) Montrer que $(\mathcal{H}_\alpha, N_\alpha)$ est complet.

4) Mq $\mathcal{H}_\alpha(C) := \{f \in \mathcal{H}_\alpha \,/\, N_\alpha(f) \leq C\}$ est une famille équicontinue.

9.2 Plusieurs types de convergence

9.2.1 Convergence simple vs convergence uniforme

Il y a finalement assez peu de choses à savoir : il existe plusieurs types de convergence d'une suite de fonctions, disons pour simplifier de I dans $\mathbb{R}$, où I est un intervalle (convergence simple, uniforme, en norme L^p, presque partout, en mesure, pour une norme höldérienne, etc).

La convergence uniforme est l'une des plus fortes (mais il y a mieux, voir les exercices !). D'un point de vue pratique, on commence par s'intéresser à la convergence simple, puis on regarde le comportement des dérivées si les fonctions sont dérivables : si les dérivées restent uniformément bornées, alors il va y avoir convergence uniforme (pourquoi ?). Sinon, c'est qu'il n'y a probablement pas convergence uniforme.

D'un point de vue théorique, il y a deux théorèmes au programme :

1) "une limite uniforme de fonctions continues est continue" ;
2) "une limite simple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si la suite des dérivées cv uniformément".

Il faut parfaitement maîtriser ces résultats (énoncés, preuves, utilisations) et savoir itérer le deuxième (pour appréhender les fonctions très régulières).

Exercice 9.10 (Classique). *On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des normes N_∞ et*

$$N_p(f) := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \ p \geq 1.$$

1) Montrer que pour $f \in E$, on a $N_p(f) \leq N_q(f) \leq N_\infty(f)$, pour $p \leq q$.

2) Construire une suite f_j de E qui converge simplement vers 0 et telle que $N_p(f_j) = 1$, $N_\infty(f_j) \to +\infty$.

3) Construire une suite $(g_j) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $N_2(g_j) \to +\infty$ et $N_1(g_j) = 1$.

L'exercice qui suit montre à quel point il est important de préciser le domaine sur lequel a (éventuellement) lieu la convergence uniforme : si elle est courante sur un compact, elle est beaucoup plus contraignante sur un ouvert.

Exercice 9.11 (Entraînement).

0) Mqu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

1) Donner des exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues sur $\mathbb{R}$. Est-ce le cas de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$?

2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Mq si $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues sur $\mathbb{R}$ convergent uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que si une suite de polynômes (P_j) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est un polynôme.

Voici quelques exemples de situations ou la convergence simple agrémentée d'une hypothèse supplémentaire entraîne la convergence uniforme.

Exercice 9.12 (Classique). *Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.*

1) On suppose que $f_n \in \mathcal{H}_\alpha(C)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf notations Exercice 9). Montrer que $f \in \mathcal{H}_\alpha(C)$ et que (f_n) converge uniformément vers f.

2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante de x. Montrer que si f est continue, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Est-il nécessaire de supposer f continue ?

3) Même question lorsque pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

9.2.2 Convergence normale

Exercice 9.13 (Entraînement). *Etudier le domaine de convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions*

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x,y), \quad \text{où } u_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^n}.$$

Exercice 9.14. *[Grand classique] ï¿½*

1) Montrer que la série de terme général $\frac{\sin(nx)}{n+1}$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$*,* $\varepsilon > 0$*, mais qu'elle ne converge pas normalement.*

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$*.*

Exercice 9.15 (Classique)**.**

1) Montrer que

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$*.*

2) Calculer $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ *et trouver un équivalent à* φ *en* 0^+*.*

Exercice 9.16 (Classique)**.** *Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour*

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2x}.$$

9.3 Séries entières

Exercice 9.17 (Cours)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x) = \exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et qu'elle n'est pas développable en série entière autour de* 0*.*

2) Est-ce que f *est développable en série entière autour de* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *?*

Exercice 9.18 (Cours)**.** *Soit* $f(z) = \sum_n a_n z^n$ *une série entière. On note* R *son rayon de convergence.*

1) Montrer que si $a_n = n!$ *alors* $R = 0$*.*

2) Montrer que si $a_n = n^{10}A^n$*,* $A > 0$*, alors* $R = 1/A$*.*

3) Montrer que si $a_n = n^{123}/n!$*, alors* $R = +\infty$*.*

4) On suppose que $a_0 = a_1 = 1$ *et* $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Déterminer le rayon de convergence.*

Exercice 9.19 (Cours)**.** *Montrer que la fonction exponentielle est DSE sur* $\mathbb{R}$ *et que*

$$\exp x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9.20 (Entraînement). *Soit* $(u_n), (v_n)$ *deux suites réelles définies par la récurrence* $u_0 = v_0 = 1$ *et*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les Rcv de $\sum_n \frac{u_n t^n}{n!}$, $\sum_n \frac{v_n t^n}{n!}$ *et expliciter leurs sommes.*

Exercice 9.21 (Grand classique). *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction D.S.E en* 0. *On note* R *le rayon de convergence de la série de Taylor en zéro.*

1) Montrer que f *est DSE en tout point* z_0 *tel que* $|z_0| < R$.

2) Montrer que si $f(0) \neq 0$ *alors* $1/f$ *est DSE en zéro. Que peut-on dire lorsque* $f(0) = 0$ *?*

Exercice 9.22 (Grand classique). *Soit* f *une série entière de rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq N[1 + |f(z)|]^N.$$

Montrer que f *est un polynôme de degré au plus* N.

Exercice 9.23 (Entraînement). *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{e^t - 1} = 2 \sum_{\geq 1} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 9.24 (Classique). *On considère*

$$f(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n \log n}.$$

Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, *cette série entière converge uniformément sur l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1 \text{ et } |z - 1| \geq \varepsilon\}$.

Exercice 9.25 (Classique). *Soit* $b_n > 0$ *tel que* $\sum b_n$ *diverge et* $\sum b_n z^n$ *a un rayon de convergence égal à* 1.

1) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $a_n \sim b_n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ *est* 1.

b) Montrer que $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = +\infty$.

c) Montrer $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ *lorsque* $x \to 1^-$.

2) En déduire un équivalent en 1^- *à* $\sum n^{p-1} x^n$.

Exercice 9.26 (Entraînement). *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

9.4 Séries de Fourier

Exercice 9.27 (Classique).
1) Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour $|x| \leq \pi$.
2) En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9.28 (Entraînement).
1) Soit $\alpha > 0$. Donner le D.S.F. de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ sur $]-\pi, \pi[$.
2) En déduire que

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k\geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

Exercice 9.29 (Grand classique). *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.*
1) Montrer que

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-2i\pi nt} dt \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.
2) Soit φ une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(\lambda t) dt \to \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \cdot \int_0^{2\pi} f$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 9.30 (Classique). *Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' + f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$f(x) + f(x + \pi) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9.31 (Grand classique). *Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que*

$$\int_a^b (f')^2 \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b f^2$$

et caractériser les cas d'égalité. (On pourra se ramener à $[a, b] = [0, \pi]$ et développer en série de Fourier.)