

TD 4

Modèle de Bressloff et al sur les hallucinations géométriques visuelles

1 Modèle de V1 avec connections latérales anisotropes

Nous allons considérer un modèle de V1 où l'activité membranaire $a(\mathbf{r}, \theta, t)$ évolue selon une équation de type Wilson-Cowan:

$$\frac{\partial a(\mathbf{r}, \theta, t)}{\partial t} = -a(\mathbf{r}, \theta, t) + \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}^2} W(r, \theta | \mathbf{r}', \theta') S(\mu a(\mathbf{r}', \theta', t)) \frac{d\theta' d\mathbf{r}'}{\pi} \quad (1.1)$$

où S est une fonction régulière de type sigmoïdal:

$$S(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x + \kappa)} - \frac{1}{1 + \exp(\kappa)},$$

et la fonction de connectivité satisfait les propriétés suivantes:

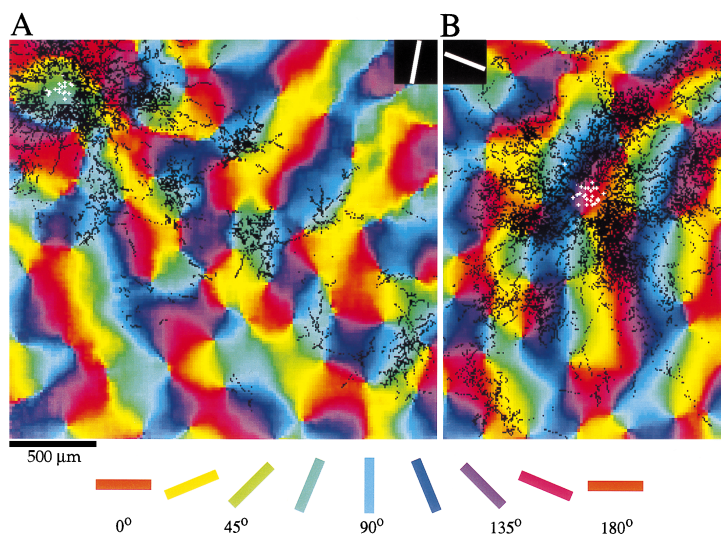


Figure 1: Connections latérales anisotropes (Tree shrew).

- W est une combinaison de connections locales et horizontales:

$$W(r, \theta | \mathbf{r}', \theta') = W_{loc}(\theta - \theta') \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} + \beta W_{lat}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \theta) \delta_{\theta, \theta'}$$

avec $W_{loc}(-\phi) = W_{loc}(\phi)$,

- les connections latérales relient uniquement des neurones qui sont sur la même direction que l'orientation préférée (cf figure 1):

$$W_{lat}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \theta) = \widetilde{W}(R_{-\theta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$$

- le paramètre β détermine la force des connections latérales.

2 Action de groupe - Shift-Twist symétrie

Le groupe Euclidien $\mathbf{E}(2)$ agit de la façon suivante sur $\mathbb{R}^2 \times [0, \pi]$:

$$\begin{cases} \phi \cdot (\mathbf{r}, \theta) &= (\mathcal{R}_\phi \mathbf{r}, \theta + \phi) & \text{rotation} \\ \kappa \cdot (\mathbf{r}, \theta) &= (\kappa \mathbf{r}, -\theta) & \text{réflexion} \\ \ell \cdot (\mathbf{r}, \theta) &= (\mathbf{r} + \ell, \theta) & \text{translation.} \end{cases}$$

Pour tout $\gamma \in \mathbf{E}(2)$, l'action sur une fonction $a(\mathbf{r}, \cdot, t)$ est donnée par:

$$\gamma a(\mathbf{r}, \theta, t) = a(\gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}, \theta), t).$$

1. Montrer que $\gamma \in \mathbf{E}(2)$ on a:

$$\gamma \cdot W(r, \theta \mid \mathbf{r}', \theta') \stackrel{def}{=} W(\gamma^{-1} \cdot (r, \theta) \mid \gamma^{-1} \cdot (\mathbf{r}', \theta')) = W(r, \theta \mid \mathbf{r}', \theta').$$

En déduire que l'équation 1.1 est $\mathbf{E}(2)$ -équivariante par cette action.

3 Stabilité linéaire

2. Linéariser l'équation 1.1 au voisinage de la solution constante homogène $a(\mathbf{r}, \theta, t) = 0$.

3. On cherche des solutions de l'équation linéarisée sous la forme:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{r}, \theta, t) &= e^{\sigma t} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} u(\theta - \varphi) + \text{c.c} \\ \mathbf{k} &= q(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

montrer que le couple $(\sigma, u(\theta))$ satisfait l'équation:

$$\sigma u(\theta) = -u(\theta) + s_1 \mu \left[\int_0^\pi W_{loc}(\theta - \theta') u(\theta') \frac{d\theta'}{\pi} + \beta \widehat{W}_{lat}(\mathbf{k}, \theta + \varphi) u(\theta) \right] \quad (3.1)$$

où $s_1 = S'(0)$ et $\widehat{W}_{lat}(\mathbf{k}, \theta)$ est la transformée de Fourier de $W_{lat}(\mathbf{r}, \theta)$.

4. Justifier le fait que $(\sigma, u(\theta))$ ne dépend que de q .

5. En écrivant:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} A_m e^{2im\theta} \\ W_{loc}(\theta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} W_m e^{2im\theta} \\ \widehat{W}_{lat}(\mathbf{k}, \theta + \varphi) &\stackrel{def}{=} \widehat{W}_{lat}(q, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{W}_m(q) e^{2im\theta} \end{aligned}$$

montrer que l'équation 3.1 peut s'écrire:

$$\sigma A_m = -A_m + s_1 \mu \left[W_m A_m + \beta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{W}_{m-n}(q) A_n \right] \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Pour chaque \mathbf{k} on définit l'espace suivant:

$$V_{\mathbf{k}} = \{u(\theta - \varphi) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c} \mid u(\theta + \pi) = u(\theta) \text{ and } u \in \mathbb{C}\},$$

qui admet la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{k}} &= V_{\mathbf{k}}^+ \oplus V_{\mathbf{k}}^- \\ V_{\mathbf{k}}^+ &= \{v \in V_{\mathbf{k}} \mid u(-\theta) = u(\theta)\} \\ V_{\mathbf{k}}^- &= \{v \in V_{\mathbf{k}} \mid u(-\theta) = -u(\theta)\}. \end{aligned}$$

On suppose que $W_1 = \max\{W_m \mid m \in \mathbb{N}\} > 0$.

6. $\beta = 0$ On se retrouve dans le cas du Ring Model étudié en cours. Montrer qu'en $\mu_c = \frac{1}{s_1 W_1}$ se produit la première bifurcation.

On suppose que $0 < \beta \ll 1$ et que la condition $\beta \ll \mu s_1 \Delta W$ est satisfaite où

$$\Delta W = \min\{W_1 - W_m \mid m \neq 1\}.$$

Ces hypothèses permettent de se placer dans le cas où la perturbation (β) ne va pas exciter d'autres modes que celui associé à la valeur propre correspondant au mode W_1 . En d'autres termes, on peut effectuer les développements limités en puissance de β suivants:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma + 1}{s_1 \mu} &= W_1 + \beta \sigma^{(1)} + \beta^2 \sigma^{(2)} + O(\beta^2) \\ A_n &= z_{\pm 1} \delta_{n, \pm 1} + \beta A_n^{(1)} + \beta^2 A_n^{(2)} + O(\beta^2) \end{aligned}$$

où $z_1 = \cos(2\theta)$ et $z_{-1} = \sin(2\theta)$.

7. Montrer que:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\pm} + 1}{s_1 \mu} &= W_1 + \beta \left[\widehat{W}_0(q) \pm \widehat{W}_2(q) \right] + \beta^2 \sum_{m \geq 0, m \neq 1} \frac{\left(\widehat{W}_{m-1}(q) \pm \widehat{W}_{m+1}(q) \right)^2}{W_1 - W_m} + O(\beta^2) \\ u_+ &= \cos(2\theta) + \beta \sum_{m \geq 0, m \neq 1} u_m^+(q) \cos(2m\theta) + O(\beta) \\ u_- &= \sin(2\theta) + \beta \sum_{m > 1} u_m^-(q) \sin(2m\theta) + O(\beta) \\ u_0^+ &= \frac{\widehat{W}_0(q)}{W_1 - W_0} \\ u_m^{\pm} &= \frac{\widehat{W}_{m-1}(q) \pm \widehat{W}_{m+1}(q)}{W_1 - W_m} \end{aligned}$$

4 Solutions doublement périodiques

Pour trouver leurs hallucinations géométriques, Bressloff et al vont se restreindre à chercher des solutions doublement périodiques sur un réseau du plan. On a vu en cours, qu'il existe trois types distincts de tels réseaux: rhombique, carré et hexagonal. On se limitera, ici, à l'étude dans le cas du réseau carré.

8. Déterminer l'action de $\mathbf{D}_4 \times \mathbb{T}^2$ sur $V = \{c_1(t)e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}u(\theta) + c_2(t)e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}u(\theta - \pi/2) + \text{c.c} \mid (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\}$.

9. Calculer les sous-groupes axiaux.

Proche du point de bifurcation, on écrit les solutions sous la forme:

$$a(\mathbf{r}, \theta, t) = c_1(t)e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}u(\theta) + c_2(t)e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}u(\theta - \pi/2) + \text{c.c} + \Psi(c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \mu - \mu_c)$$

et l'on obtient la forme normale suivante:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c} c_1 - c_1 [\alpha |c_1|^2 + \beta |c_2|^2] + \text{h.o.t} \\ \frac{dc_2}{dt} &= \frac{\mu - \mu_c}{\mu_c} c_2 - c_2 [\alpha |c_2|^2 + \beta |c_1|^2] + \text{h.o.t} \end{aligned}$$

10. Calculer α et β .

11. Donner un critère de stabilité en fonction de α et β pour que les solutions de type carré ou rouleau soient stables.

12. Dessiner les solutions correspondantes.