Master 1 ESR
UE Modélisation
23 Avril 2018

Grégory Faye
IMT, CNRS
gregory.faye@math.univ-toulouse.fr

Partiel – Durée 1h30

Notes et téléphones interdits

Exercice 1 : Portrait de phase

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(1-x^2), \end{array} \right.$$

avec des conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité des solutions pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnée. On notera $\mathcal{J} =]-T_0, T_0[$, $T_0 > 0$, l'intervalle maximal de définition pour chaque condition initiale.
2. Calculer la matrice Jacobienne associée au système $(\mathcal{S})$.
3. Déterminer les points d'équilibre du système $(\mathcal{S})$.
4. Pour chaque point d'équilibre du système, trouvé à la question précédente, déterminer la stabilité linéaire puis nonlinéaire. On précisera le genre (noeud, foyer, puit, centre, etc...) dans chacun des cas.
5. On pose
$$E(x,y) := \frac{y^2}{2} + \frac{(x^2-1)^2}{4}.$$
Montrer que $E(x,y)$ est une intégrale première pour le système $(\mathcal{S})$.
6. (**Attention :** ne pas perdre trop de temps sur cette question.) Pour $c \in \mathbb{R}$, on souhaite étudier les lignes de niveau de $E(x,y)$, c'est à dire on cherche à déterminer
$$E_c^{-1} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x,y) = c \right\}.$$
   (a) Etudier les variations de $V(x) = \frac{(x^2-1)^2}{4}$ sur $\mathbb{R}$ et on représentera graphiquement $x \mapsto V(x)$.
   (b) Montrer que pour $c < 0$, $E_c^{-1} = \emptyset$.
   (c) Montrer que E_0^{-1} est l'union de deux singletons que l'on précisera.
   (d) Montrer que E_c^{-1} est l'union de deux courbes fermées pour tout $0 < c < 1/4$. On représentera sur une figure $E_{1/8}^{-1}$.
   (e) Décrire précisément la courbe de niveau $E_{1/4}^{-1}$ que l'on représentera sur une figure.
   (f) Montrer que E_c^{-1} est une courbe fermée pour tout $c > 1/4$. On représentera sur une figure E_2^{-1}.

7. Démontrer que les solutions du système $(\mathcal{S})$ sont globales, on précisera bien le domaine de définition.
8. Etablir le portrait de phase du système $(\mathcal{S})$. On indiquera à l'aide de flèches la direction des trajectoires.

Exercice 2 : Equation de transport

On cherche $u(x,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = f(x), \tag{2}$$

f étant une fonction de classe de $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $c(t) = u(\varphi(t), t)$ pour $t > 0$ et une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode des caractéristiques, trouver et résoudre l'équation différentielle ordinaire vérifiée par $\varphi(t)$ pour que $c'(t) = 0$. Représenter plusieurs courbes caractéristiques $t \mapsto (\varphi(t), t)$ dans le demi-plan $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.
2. A l'aide de la question précédente, démontrer l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy (1) et (2). On donnera la formule explicite de la solution en fonction de la condition initiale f.

Exercice 3 : Questions de cours

1. Donner le schéma d'Euler implicite pour l'équation

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{sur } [0,T], \\ &x(0) = x_0. \end{aligned}$$

2. Sans justification, donner une solution de l'équation de diffusion

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

où la condition initiale vérifie $u_0 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Fin