Master 1 ESR
UE Modélisation
19 Mars 2018

Grégory Faye & Fanny Delebecque
IMT, CNRS
gregory.faye@math.univ-toulouse.fr
fanny.delebecque@math.univ-toulouse.fr

TP #3

Des EDOs aux EDPs

Objectifs : L'objectif de ce dernier TP est de mettre en pratique les acquis des deux séances précédentes sur des modèles d'EDOs décrivant l'évolution de n agents. Cette séance permettra d'assurer une transition avec les séances prochaines autour des EDPs.

1 Un premier modèle - Réseaux de neurones

On considère un réseau de n neurones, et l'on cherche à modéliser l'activité du potentiel de membrane $u_i(t)$ du neurone i en fonction de l'activité électrique transmise par les autres neurones. Pour cela on utilise une version simplifiée du modèle de FitzHugh-Nagumo introduit à la séance précédente :

$$u_i'(t) = F(u_i(t)) + I_{\text{ext}}(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

où $F(u) = u(1 - u^2)$ et $I_{\text{ext}}(t)$ est le courant extérieur reçu par le neurone i. Dans la suite, on va supposer que ce courant reçu prend la forme

$$I_{\text{ext}}(t) = \frac{\alpha}{n} \sum_{j=1}^{n} (u_j(t) - u_i(t)),$$

de telle sorte que le modèle complet s'écrit

$$u_i'(t) = F(u_i(t)) + \frac{\alpha}{n} \sum_{j=1}^{n} (u_j(t) - u_i(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

et $\alpha > 0$ traduit la force des interactions. On souhaite résoudre numériquement (1) sur un intervalle de temps $[0, T]$ pour un nombre donné n de neurones à partir de conditions initiales $u_i(0) \in (-1, 1)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On fixera $T = 50$, le pas de discrétisation en temps $\Delta t = 0.05$ et $n = 100$.

On s'intéressera particulièrement à l'évolution au cours du temps des quantités suivantes :

$$\mu_1(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \text{ et } \mu_2(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2(t).$$

1. Discuter de l'existence et l'unicité des solutions de (1).
2. Montrer que $\mu_2'(t) \leq 2\mu_2(t)$ et en déduire que les solutions de (1) sont globales.
3. On pose $\alpha = 0$, résoudre numériquement $u'(t) = F(u(t))$ où $u(t) \in \mathbb{R}$ (on utilisera la méthode numérique de son choix). Illustrer la (in)stabilité des points d'équilibre $\{0, \pm 1\}$.

4. Générer des conditions initiales $u_i(0) \in (-1, 1)$ à partir de la commande `rand` de `Scilab`.
5. Réécrire le système (1) de manière vectorielle. C'est à dire : si on note $\mathbf{U}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^t$, montrer que (1) peut se mettre sous la forme suivante

$$\mathbf{U}'(t) = \mathcal{F}(\mathbf{U}(t)), \tag{2}$$

   où $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dépend de F et de α.
6. Implémenter la méthode d'Euler explicite pour résoudre le système (2) pour différentes valeurs de α. On représentera l'évolution au cours du temps de $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$.
7. On prend $\alpha = 0.01$, décrire le comportement des solutions.
8. On prend $\alpha = 1000$, décrire le comportement des solutions. Que remarque-t-on ?

2 Un modèle de comportement en chaîne

On considère un groupe de n agents qui interagissent de la manière suivante

$$u_i'(t) = G(u_i(t)) + \alpha(u_i(t) - u_{i-1}(t)), \quad i = 2, \ldots, n, \tag{3a}$$
$$u_1'(t) = G(u_1(t)), \tag{3b}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre de taux de transmission. On prendra $G(u) = 1 - u^2$.

1. Réécrire le système (3) de manière vectorielle. C'est à dire : si on note $\mathbf{U}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^t$, montrer que (3) peut se mettre sous la forme suivante

$$\mathbf{U}'(t) = \mathcal{G}(\mathbf{U}(t)) + \alpha \mathcal{A} \mathbf{U}(t), \tag{4}$$

   où $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure.
2. On se donne un intervalle de temps $[0, 50]$ et un pas de temps associée $\Delta t = 0.01$. Implémenter la méthode d'Euler explicite pour le système (4) pour différentes valeurs de $\alpha = \{-2, -1, 0, 1\}$. On partira d'une condition initiale de la forme $\mathbf{U}_0 = (1, -1, \ldots, -1)^t$. Commenter les différents comportements obtenus lorsque α varie.
3. Si $\mathbf{U}^m$ représente l'approximation numérique de la solution $\mathbf{U}(t)$ à l'instant $t = t^m = m\Delta t$, alors implémenter le schéma numérique semi-implicite suivant :

$$\mathbf{U}^{m+1} = \mathbf{U}^m + \Delta t \left(\mathcal{G}(\mathbf{U}^m) + \alpha \mathcal{A} \mathbf{U}^{m+1} \right),$$

   en partant de $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_0$. On remarquera que cela nécessite d'inverser à chaque itération la matrice $\mathrm{I}_n - \alpha \Delta t \mathcal{A}$ où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. (Bonus) On suppose que $n = +\infty$ dans la définition de (3). Etudier les points d'équilibre du système ainsi obtenu. On pourra remarquer que les points d'équilibre satisfont une certaine suite récurrente que l'on explicitera.