

Cours -TD -TP #2
EDOs & Portraits de Phase – Suite

Objectifs : L'objectif de ce second cours est de poursuivre l'étude des portraits de phase pour des systèmes dynamiques autonomes en dimension 2 en se concentrant sur la notion de stabilité des points d'équilibre par linéarisation.

1 Les points théoriques – Cours (Un petit résumé)

Dans toute cette section, on considérera des équations différentielles autonomes du type :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

où l'application $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sera supposée de classe au moins \mathcal{C}^2 . On prendra $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(a) = 0$, c'est à dire un **point d'équilibre** de (1). On notera également $A := Df(a) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice différentielle (Jacobienne) de f au point $x = a$. On désire comparer les solutions de (1) avec celles du **système linéarisé**

$$\frac{dx}{dt} = A(x - a). \quad (2)$$

On aimerait savoir dans quelle mesure les solutions de (2) donnent une information sur les solutions de (1). Dans toute la suite, nous supposerons que les solutions de (1) sont définies globalement sur \mathbb{R} tout entier.

1.1 Stabilité d'un équilibre

La première notion importante que nous allons voir est celle de stabilité d'un équilibre. On notera $\varphi(t, x_0)$ la solution associée au problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (3a)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3b)$$

Définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, tel que $f(a) = 0$.

— On dit que a est un **équilibre stable** si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \text{ tel que } \|x_0 - a\| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(t, x_0) - a\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0.$$

— On dit que a est un équilibre **asymptotiquement stable** si

$$a \text{ est stable et si } \exists \rho > 0 \text{ tel que } \|x_0 - a\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = a.$$

— Un équilibre qui n'est pas stable est dit **instable**.

Remarque 1. On peut toujours se ramener au cas d'étude où $a = 0$ en posant $y = x - a$. Dans la suite nous supposons que $a = 0$ pour simplifier les notations.

Remarque 2. Toutes les normes étant équivalentes, on prendra pour convention la norme euclidienne $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2}$.

Bien sûr, la notion de stabilité pour le système linéarisé (2) dépend des valeurs propres de la matrice $A = Df(0)$. En effet, les solutions de (2) partant à $t = 0$ de x_0 sont données par

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La notion d'exponentielle d'une matrice est donnée par la formule suivante :

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sur un espace propre généralisé $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_d)^m$, l'action de l'exponentielle e^{At} simplifie en

$$e^{At}x_0 = e^{t\lambda} \left(\sum_{p=0}^{m-1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda I_d)^p \right) x_0, \quad x_0 \in E_\lambda,$$

et donc

$$\|e^{tA}x_0\| \lesssim (1 + |t|^{m-1})e^{t\operatorname{Re}(\lambda)}\|x_0\|, \quad x_0 \in E_\lambda.$$

On en déduit les conclusions suivantes pour le système linéaire (2). On note $\operatorname{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de la matrice A .

Lemme 1. 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable si pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ on a $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -\sigma < 0$ pour un certain $\sigma > 0$. On a même que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon > 0$ tel que

$$\|e^{At}x_0\| \leq K_\epsilon \|x_0\| e^{-(\sigma-\epsilon)t}.$$

Lemme 2. S'il existe une valeur propre $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.

Le théorème principal de comparaison est le suivant.

Théorème 1. Soit le système autonome (1) avec $a \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre.

- (i) Si pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(Df(a))$ on a $\operatorname{Re}(\lambda) < -\beta < 0$ pour un certain $\beta > 0$, alors a est un équilibre asymptotiquement stable de (1).
- (ii) Si il existe $\lambda \in \operatorname{Spec}(Df(a))$ telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors a est un équilibre instable de (1).
- (iii) Si pour tout $\lambda \in \operatorname{Spec}(Df(a))$ on a $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ et qu'il existe λ_0 telle que $\operatorname{Re}(\lambda_0) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

Prenons l'exemple du pendule pour voir comment s'applique le théorème ci-dessus. On a vu que l'équation du pendule

$$\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0,$$

peut se mettre sous la forme d'un système $\dot{Y} = f(Y)$ en notant $Y(t) = (\theta(t), \omega(t))$ et l'on a

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\sin(\theta).\end{aligned}$$

Les points d'équilibre du système sont $(\pm k\pi, 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On calcule tout d'abord la différentielle en n'importe quel point qui est donnée par la matrice

$$A_{(\theta, \omega)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

On va différencier l'étude selon que $k = 2p$ ou $k = 2p + 1$. On trouve :

$$A_{(\pm 2p\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_{(\pm(2p+1)\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas les valeurs propres sont imaginaires pures données par $\pm i$ et dans le deuxième cas les valeurs propres sont réelles données par ± 1 . On conclut que pour les points d'équilibre $(\pm 2p\pi, 0)$ l'étude du système linéarisé ne permet pas de conclure quant à la stabilité du point d'équilibre puisque la partie réelle des valeurs propres est nulle, alors que pour $(\pm(2p+1)\pi, 0)$ l'étude du système linéarisé nous dit que ces équilibres sont instables puisqu'une valeur propre est de partie réelle strictement positive. En fait, les points d'équilibre $(\pm 2p\pi, 0)$ sont stables (voir la première séance), mais pas asymptotiquement stables.

1.2 Stabilité structurelle (pour aller plus loin)

Dans cette section nous allons aborder une deuxième forme de stabilité. La question que l'on se pose est la suivante. Soit $\frac{dx}{dt} = f(x)$ un système autonome sur \mathbb{R}^d et soit g "proche" de f , peut-on dire que les solutions de $\frac{dx}{dt} = g(x)$ "ressemblent" à celles de $\frac{dx}{dt} = f(x)$? Il faut bien sûr avant tout se donner une notion de proximité.

Définition 2. Soient f et g de classe \mathcal{C}^1 , et soit G un ensemble de \mathbb{R}^d . On dira que la distance dans G entre f et g est inférieure à ϵ au sens \mathcal{C}^1 si

$$\forall x \in G, \quad \|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon \text{ et } \|Df(x) - Dg(x)\| \leq \epsilon,$$

et on notera $\|f - g\|_{1,G} \leq \epsilon$.

On notera également $\varphi(t, x_0)$ le flot associé à $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et $\psi(t, x_0)$ celui à $\frac{dx}{dt} = g(x)$.

Définition 3. Une application $\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ établit une **correspondance** entre les orbites de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et $\frac{dx}{dt} = g(x)$ si $\forall x_0$ on a $\mathcal{L} \cdot \varphi(t, x_0) = \psi(t, \mathcal{L} \cdot x_0)$ pour tout temps.

Suivant la nature de \mathcal{L} , on a plusieurs types de correspondance possible.

Définition 4. Soient (I) $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et (II) $\frac{dx}{dt} = g(x)$ deux systèmes autonomes dans \mathbb{R}^d .

- (i) On dit que (I) et (II) sont **linéairement équivalents** s'il existe \mathcal{L} linéaire et inversible de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d qui établit une correspondance entre les orbites de (I) et (II).
- (ii) On dit que (I) et (II) sont **différentiellement équivalents** s'il existe \mathcal{L} différentiable, et d'inversible différentiable de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d qui établit une correspondance entre les orbites de (I) et (II).

(i) On dit que (I) et (II) sont **topologiquement équivalents** s'il existe \mathcal{L} continue, inversible et d'inverse continue de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d qui établit une correspondance entre les orbites de (I) et (II).

Remarque 3. On a les implications suivantes :

$$\text{équivalence linéaire} \Rightarrow \text{équivalence différentielle} \Rightarrow \text{équivalence topologique}$$

On peut énoncer les résultats suivants pour les systèmes linéaires

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{(I)}{=} Ax \text{ et } \frac{dx}{dt} \stackrel{(II)}{=} Bx, \text{ avec } A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).$$

Lemme 3. Si (I) et (II) sont linéairement équivalents alors A et B ont les mêmes valeurs propres.

On a le résultat principal suivant.

Théorème 2. Soient $\frac{dx}{dt} \stackrel{(I)}{=} Ax$ et $\frac{dx}{dt} \stackrel{(II)}{=} Bx$. On suppose que toutes valeurs propres de A et B vérifient toutes $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$. On désigne par $m_{\pm}(A)$ (resp. $m_{\pm}(B)$) le nombre de valeurs propres de A (resp. de B) de parties réelles positives (+) et négatives (-). Alors, (I) et (II) sont topologiquement équivalents si et seulement si $m_{\pm}(A) = m_{\pm}(B)$.

Ce type de résultat pour les systèmes linéaires restent encore vrais entre système et son linéarisé.

Théorème 3 (Hartman-Grobman). Soit f de classe \mathcal{C}^2 et a tel que $f(a) = 0$. On suppose que toutes les valeurs propres de $Df(a)$ sont de parties réelles non nulles. Alors il existe un voisinage G de a dans \mathbb{R}^d tel que

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \text{ et } \frac{dx}{dt} = Df(a)(x - a)$$

soient topologiquement équivalents.

On peut maintenant énoncer la définition de stabilité structurelle.

Définition 5. On dit que le système $\frac{dx}{dt} = f(x)$ est **structurellement stable** dans un ensemble $G \subset \mathbb{R}^d$, si $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que pour tout g vérifiant $\|f - g\|_{1,G} \leq \epsilon_0$, alors $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et $\frac{dx}{dt} = g(x)$ soient topologiquement équivalents dans G .

On a donc le résultat suivant.

Théorème 4. Soit f de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(a) = 0$ et telle que les valeurs propres de $Df(a)$ soient toutes de partie réelle non nulle. Alors il existe un voisinage G de a dans lequel le système $\frac{dx}{dt} = f(x)$ est structurellement stable.

2 TD

Exercice 1 (Portrait de phase des systèmes linéaires en dimension 2.)

On considère le système différentiel suivant

$$X' = AX, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On suppose que A est inversible. On note τ et Δ , respectivement, la trace et le déterminant de la matrice A .

1. Trouver le ou les points d'équilibre de $X' = AX$.
2. Exprimer les valeurs propres de A en fonction de τ et Δ .
3. Valeurs propres réelles :
 - (a) Trouver une condition en fonction de τ et Δ pour que les valeurs propres soient réelles.
 - (b) Dans ce cas, trouver une condition en fonction de Δ pour que l'équilibre soit un noeud-col.
 - (c) Trouver une condition sur τ et Δ pour que l'équilibre soit attractif (puit).
 - (d) Trouver une condition sur τ et Δ pour que l'équilibre soit répulsif (source).
4. Valeurs propres complexes :
 - (a) Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit attractif (foyer stable).
 - (b) Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit répulsif (foyer stable).
5. Représenter sur un diagramme dans le plan (τ, Δ) la stabilité du point d'équilibre ainsi que le portrait de phase associé.

Exercice 2 (Un premier exemple de bifurcation.)

1. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{x} = 1 - \cos(x), \quad x(0) = x_0 \in [0, 2\pi].$$

- (a) Etudier l'existence, l'unicité et le caractère globale des solutions.
 - (b) Montrer que si $x(t)$ est solution alors $x(t) + 2\pi$ est solution.
 - (c) Montrer que si $x_0 \in (0, 2\pi)$ alors $x(t) \in (0, 2\pi)$ pour tout temps.
 - (d) Résoudre l'équation explicitement pour toute condition initiale $x_0 \in [0, 2\pi]$. (Indication : $\int \frac{dx}{\cos(x)-1} = \frac{1}{\tan(x/2)}$).
 - (e) Représenter le graphe de $x(t) = \varphi(t, x_0)$ pour plusieurs conditions initiales x_0 représentatives.
2. Etudier la stabilité des points d'équilibre de l'équation différentielle

$$\dot{x} = 1 - \cos(x) + \mu(1 + \cos(x))$$

lorsque μ varie dans \mathbb{R} . Représenter le portrait de phase sur le cercle unité.

Exercice 3 On considère un système proie-prédateur de la forme

$$\dot{x} = x(1-x) - \mu \frac{xy}{1+x}, \tag{4a}$$

$$\dot{y} = y(1-y), \tag{4b}$$

où $\mu > 0$ est un paramètre. On considérera toujours qu'à l'instant initial $t = 0$ on a $x(0) = x_0 \geq 0$ et $y(0) = y_0 \geq 0$.

1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions. Montrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout temps où ils sont définis.
2. On appelle x -isocline (resp. y -isocline) l'ensemble des points de l'espace (x, y) pour lesquels $\dot{x} = 0$ (resp. $\dot{y} = 0$). Représentez les isoclines de (4) dans la partie du plan $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
3. Trouver l'ensemble des points d'équilibre de (4) en fonction du paramètre $\mu > 0$ et étudier leur stabilité.

4. Expliquer qualitativement ce qu'il se passe au voisinage de $\mu = 1$.
5. Dessiner le portrait de phase de (4) pour $\mu \in (0, 1)$ et pour $\mu > 1$. Que peut-on en déduire pour la dynamique de la population du système proie-prédateur : a-t-on coexistence des espèces ? extinction ?

3 Excitabilité, bifurcation et chaos – TP

3.1 Mise en pratique de la méthode d'Euler implicite.

Le but de la première partie du TP est d'implémenter numériquement la méthode d'Euler implicite sur un exemple simple. On reprendra pour cela l'équation différentielle de l'exercice 2 du TD :

$$\dot{x} = f(x) := 1 - \cos(x), \quad x(0) = x_0 \in (0, 2\pi).$$

On souhaite donc résoudre l'équation ci-dessus sur $[0, T_f]$ avec un pas de temps constant $\Delta t > 0$ en utilisant la méthode d'Euler implicite. On rappelle que la méthode s'écrit :

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t f(x^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad x^0 = x_0,$$

où $N = T_f/\Delta t$. On pourra prendre $T_f = 50$ et faire varier $\Delta t \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2\}$. On voit donc que l'on est amené à résoudre à chaque itération une équation implicite. Pour cela, on va utiliser la méthode de Newton que l'on rappelle maintenant. La méthode de Newton permet de résoudre $F(z) = 0$ en supposant que $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}^1 . Formellement, on part de $z_0 \in \mathbb{R}^d$ et on construit par récurrence la suite :

$$z_{k+1} = z_k - (DF(z_k))^{-1}F(z_k) \tag{5}$$

où $DF(z_k)$ est la matrice Jacobienne associée à F au point z_k . Dans le cas où $d = 1$, il s'agit simplement de la dérivée usuelle. Enfin, on note que la méthode d'Euler implicite peut se réécrire sous la forme $F_{\Delta t, x^n}(x^{n+1}) = 0$ avec

$$F_{a,b}(z) := z - af(z) - b.$$

1. Ecrire une fonction **Scilab** que l'on nommera **newton** qui prend en entrée deux inconnues a et b et retourne la solution de $F_{a,b}(z) = 0$ à partir de (5). On effectuera 10 itérations et l'initialisation se fera toujours avec $z_0 = b$.
2. Ecrire une fonction **Scilab** que l'on nommera **eulerimplicite** qui prend en entrée T_f , Δt et x_0 une condition initiale et renverra en sortie le vecteur ligne de taille $N + 1$ dont chaque composante est composée des itérations successives de la méthode d'Euler implicite : $[x^0 x^1 \dots x^{N+1}]$.
3. On représentera sur une figure la solution approchée obtenue. Comparer avec la solution exacte trouvée en TD.
4. On prend $x_0 = \pi$. En faisant varier Δt , montrer que l'erreur relative $\sup_n |x(t^n) - x^n|$ entre la solution exacte $x(t)$ et la solution approchée est de l'ordre de $\mathcal{O}(\Delta t)$.

3.2 Modèle de FitzHugh-Nagumo

En 1963, Hodgkin et Huxley reçoivent le Prix Nobel de médecine pour leurs travaux sur les mécanismes ioniques qui permettent l'initiation et la propagation des potentiels d'action dans l'axone du calamar géant. En quelques mots et très schématiquement, l'axone est un long

tube partant de chaque neurone et sa membrane extérieure, sensible aux courants et potentiels chimiques, permet la propagation des signaux électriques. En particulier, elle présente une différence de potentiel au repos et on mesure la perturbation de ce potentiel suite à un changement chimique ou électrique. Cette perturbation peut se propager le long de l'axone pour transmettre une information entre neurones.

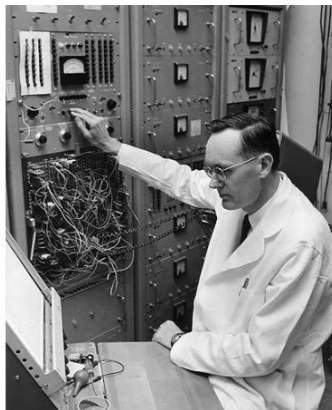


FIGURE 1 – Richard FitzHugh.

Le modèle de Hodgkin et Huxley est composé de plusieurs équations différentielles couplées entre elles. Le système que nous étudions est une simplification due à FitzHugh et Nagumo du modèle de Hodgkin et Huxley. Nous considérons la variation de potentiel $u(t)$ en fonction du temps $t > 0$. L'état de repos est donné par $u = 0$. La fonction $v(t)$ représente plusieurs variables liées entre elles et tient compte, entre autres, des variations de concentration des ions sodium et potassium. Le système s'écrit

$$\dot{u} = u(a - u)(u - 1) - v + I(t), \quad (6a)$$

$$\dot{v} = \epsilon(u - bv), \quad (6b)$$

où les coefficients b, ϵ, a sont tous choisis positifs et pour fixer les idées on prendra :

$$a = 1/4, \quad \epsilon = 0.001, \quad b = 1/3.$$

$I(t)$ est un courant appliqué au système en continu. On va tout d'abord chercher à retrouver un effet de seuil observé expérimentalement : si le potentiel électrique est perturbé initialement par une valeur de $u(0) = u_0$ petite, alors le potentiel retourne à son état de repos $u = 0$ rapidement. En revanche, si la perturbation est plus importante, la solution commence par croître avant de décroître et de retourner à 0, en passant par des valeurs négatives.

1. Dans le cas $I = 0$, commencer par représenter les courbes isoclines et montrer que le seul point d'équilibre est $(u, v) = (0, 0)$.
2. Etudier la stabilité du point d'équilibre obtenu à la question précédente.
3. Représenter le champ de vitesses associé à (6) ainsi que les courbes isoclines sur une même figure.
4. Vérifier numériquement la présence de l'effet de seuil en mettant en évidence une valeur critique pour la donnée initiale u_0 . On pourra fixer $v_0 = 0$ et faire varier uniquement u_0 . Pour se faire on utilisera la fonction `ode` de Scilab.
5. Comment est modifié le portrait de phase lorsque $I(t) = I > 0$? Quel genre de phénomène voit-on émerger?

6. On suppose maintenant que $I(t) = \cos(\omega t)$ varie périodiquement au cours du temps. Résoudre numériquement le problème pour différentes valeurs de $\omega \in \mathbb{R}$. On utilisera la méthode numérique de son choix : Euler explicite, implicite, RK4 ou directement avec la fonction `ode` de `Scilab`.

3.3 L'attracteur de Lorenz & Chaos (Pour la culture)

En 1963, Lorenz a étudié numériquement un système de trois équations différentielles censé représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère. Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère terrestre avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les ordinateurs existant au temps de Lorenz. Celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement *trois* degrés de liberté, beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ. C'est aussi un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres.



FIGURE 2 – Edward Lorenz.

Le système dynamique s'écrit :

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \tag{7a}$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz, \tag{7b}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z. \tag{7c}$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de σ et β sont fixées, respectivement à 10 et $8/3$. Le paramètre de contrôle est ρ qui est positif. Physiquement, ρ est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide (nombre de Rayleigh), σ au nombre de Prandtl et β à l'élongation de la boîte contenant le fluide.

Les variables dynamiques x, y et z représentent l'état du système à chaque instant. L'interprétation physique en est la suivante : $x(t)$ est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température verticale par rapport à un profil linéaire.

1. La solution triviale $x = y = z = 0$ du système correspond physiquement à un régime où le fluide est au repos et où la chaleur se transmet uniquement par diffusion moléculaire (état conductif). Etudier sa stabilité en fonction du paramètre ρ . Expliquer en quoi la valeur $\rho = 1$ est une valeur critique pour le système.
2. Caractériser les autres points d'équilibre du système (7) en fonction de ρ et étudier leur stabilité en fonction de ρ . Que se passe-t-il en

$$\rho_c = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} \quad ?$$

3. Analyser numériquement le comportement des solutions pour $\rho < \rho_c$ et pour $\rho > \rho_c$. Représenter plusieurs trajectoires significatives dans l'espace de phase (x, y, z) .

Lorsque $\rho > \rho_c$ le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour d'un des deux équilibres instables comme si elle y convergerait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement. Toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire chaotique : l'attracteur de Lorenz. Essayons d'étudier cet objet.

4. On rappelle une propriété générale sur les flots générés par un champ de vecteurs \vec{X} . Si $U(t) \subset \mathbb{R}^3$ est un ensemble de points transportés par le flot alors on a

$$\frac{d\text{Vol}(U(t))}{dt} = \int_{U(t)} \text{div} \vec{X}.$$

Si $\text{div} \vec{X} < 0$, on dit que le flot est dissipatif car les volumes diminuent au cours du temps. Montrer que le flot de Lorenz (7) est partout dissipatif.

5. Montrer qu'il existe un ellipsoïde \mathcal{E} autour de l'origine tel que partant de n'importe quelle condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^3$, la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ entre dans \mathcal{E} et y reste pour toujours. (Indication : on pourra considérer l'énergie $E(x, y, z) = \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2$.)
6. En déduire que $(\varphi(t, \mathcal{E}))_{t \geq 0}$ est une suite d'ensembles strictement inclus les uns dans les autres.

On définit l'attracteur de Lorenz comme étant l'ensemble limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathcal{E})$. Précisément, l'attracteur de Lorenz est

$$\mathcal{A} := \bigcap_{t \geq 0} \varphi(t, \mathcal{E}) \subset \mathcal{E}.$$

7. Montrer que le volume de \mathcal{A} est nul.
8. On fixe $\rho = 28$. On prend une condition initiale proche de l'origine : $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, -0.1)$. Faire évoluer le système jusqu'au temps $T = 100$. On notera (x_T, y_T, z_T) le point obtenu à la dernière itération du processus. On se donne $\delta t > 0$, comparez l'évolution des trajectoires entre les points ayant pour condition initiale (x_T, y_T, z_T) et $(x_T, y_T, z_T) + \delta t$ pour $\delta t = 10^{-n}$ avec $n = 1, 2, 3$. Que remarque-t-on ? Peut-on caractériser l'écartement entre deux trajectoires très proches ? On appelle le phénomène observé la sensibilité aux conditions initiales.