Une nouvelle théorie spectrale dans le cadre analytique complexe. Application à l'équation différentielle prolate sphéroidale et à ses relations avec les zéros de zeta

J.P. Ramis

15 mai 2024

1 Abstract

Travail en commun avec Françoise Richard-Jung et Jean Thomann.

Le principal acteur est l'opérateur prolate sphéroidal (d'ordre zéro) :

$$W_\Lambda = -\frac{d}{dx}(\Lambda^2 - x^2)\frac{d}{dx} + (2\pi\Lambda x)^2;$$

Λ est un paramètre ("bandwith parameter"). Dans un pemier temps il est réel et ensuite complexe ; W_Λ is formellement auto-adjpoint.

Historiquement les opérateurs sphéroidaux ont apparu dans l'étude de l'équation de Helmoltz $(\Delta + k^2)\Psi = 0$ sur un sphéroide (prolate resp. oblate). Le sphéroide prolate est un ellipsoide de révolution (un ballon de rugby), que l'on peut voir comme une déformation de la sphère (un ballon de foot).

Les coordonnées adaptées sont des coordonnées sphéroidales (prolates ou oblates). Comme en coordonnées sphériques, il y a séparation de variables pour le Laplacien Δ. L'équation de Helmoltz est ainsi équivlalente à 3 équations différentielles ordinaires. Les fonctions sphéroidales sont les solutions des équations angulaires et radiales. On obtient une généralisation des fonctions sphériques classiques, mais la "bifurcation" est "singulière".

Les fonctions prolate sphéroidales (d'ordre zéro) ont réapparu plus tard, de façon surprenante, en théorie du signal. Je rappellerai quelques résultats de la théorie du signal dus à Slepian et autres des Laboratoires Bell 1960-1965. Un signal ne peut pas être localisé parfaitement en temps et fréquence et il y donc un. problème de communication des signaux puisque l'on ne dispose que d'un domaine limité de temps et de fréquences. Ceci conduit à introduire un opérateur intégral de convolution Q_Λ avec un noyau sinus cardinal. Son spectre est infini discret, à valeurs propres positives. Les premières valeurs propres sont très voisines de 1 et ensuite elle tombent brutalement et deviennent très proches de zéro. Le calcul des vecteurs propres est alors instable. Slepian et autres ont fait une

remarquable découverte : l'opérateur Q_Λ commute avec l'opérateur prolate différentiel W_λ. Par suite ils ont les mêmes fonctions propres et il est possible d'utiliser une version singulière de la théorie de Sturm-Liouville sur le segment $[-\Lambda, \Lambda]$. Slepian a appelé ceci "the lucky accident", disant que c'était un mystère. J'expliquerai l'origine du miracle.

Vers 1998, Alain Connes, découvre une relation entre l'opérateur Q_Λ et les zéros non triviaux de zeta. Il développe ensuite la question avec Matilde Marcolli, puis dans une série d'articles avec Caterina Consani. En 1998, A. Connes découvre aussi une extension auto-adjointe de W_Λ sur la droite réelle, mais ne l'utilise pas. Récemment Alain Connes et Henri Moscovici ont repris l'étude de cette extension et ils ont fait une remarquable découverte : le spectre est discret, il contient une copie du spectre classique, mais aussi une partie nouvelle et, pour $\Lambda = \sqrt{2}$, celle-ci donne, "dans l'ultraviolet", une très bonne approximation des carrés des parties imaginaires des zéros non triviaux de zeta.

Dans une partie de l'exposé, je présenterai une "nouvelle" théorie spectrale pour les opérateurs différentiels rationnels du second ordre élaborée avec Françoise Richard-Jung et Jean Thomann. L'idée est de définir des spectres analytiques, en n'utilisant que des propriétés analytiques : structure des singularités et prolongemnt analytique. Nous "oublions" les conditions de réalité et la propriété de Sturm-Liouville. Nous choisissons comme extrémités des points singuliers et nous définissions des conditions au bord en utilisant la structure analytique de ces points (et éventuellement des symétries s'il y en a). Dans le cas d'une singularité régulière la condition au bord est donnée par une droite propre de la monodromie. Cette approche apparait déjà dans l'article fondateur de Schrödinger sur l'atome d'hydrogène. Le cas irrégulier est plus difficile, nous utilisons la k-sommabilité. (Schrödinger utilisait la transformation de Laplace.)

J'expliquerai comment, pour étudier le spectre de Connes-Moscovici pour l'opérateur prolate, il est possible d'utiliser notre nouvelle approche analytique à la place des techniques L^2. Je note μ le paramètre spectral. Cette approche donne de nouveaux résultats.

1. Elle permet la construction (par "matching" analytique) d'un "déterminant fonctionnel" : une fonction $F(\Lambda, \mu)$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ telle que, pour Λ fixé, les zéros de F soient les valeurs propres. Cette fonction est analytique réelle en Λ et entière d'ordre $\leq 1/2$ en μ. .
2. On peut définir un prolongement analytique du spectre CM pour $\Lambda \in \mathbb{C}^*$. Plus précisèment il faut utiliser la variable $\log \Lambda$. On peut alors s'intéresser au prolongement analytique ("en Λ ") des valeurs propres. Pour les valeurs propres classique, ce prolongement a été étudié par Meixner et Schäfke dans leur monographie sur les fonctions de Mathieu et les fonctions sphéroidales. Nous conjecturons que les valeurs propres paires (resp. impaires) sont reliées par prolongement analytique, comme dans le cas de l'oscillateur quartique (Bender-Wu) ; "il n'y a qu'une valeur propre". Schäfke l'a montré pour les fonctions de Mathieu.
3. En utilisant F nous obtenons une méthode efficace de calcul des valeurs propres : on utilise la resommation et le prolongement analytique numérique avec SageMath.
4. On a une interprétation "géomètrique" du spectre CM. Il est possible d'interprèter ce specgtre par "pull-back" par une application. de Riemann-Hilbert d'une courbe algèbrique (calculée explicitement) sur la variété des caractères des équations prolate, une surface cubique affine (calculée explicitement). Le spectre classique est

le “pull-back” d’une droite (double) de la surface cubique. Elle correspond à la trivialité du phénomène de Stokes à l’infini.