UPS TOULOUSE III **Le 22/02/2018**
M1 MAPI3 2018

Partiel
Simulations aléatoires

Durée 2 heures

1 Laplace

1.1 Hors d'œuvre

La loi de Laplace est utilisée pour modéliser des erreurs d'expérience. Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace, de densité de probabilité f donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

1) Calculer l'espérance et la variance de X.
2) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \exp(x) & \text{si } \; x \leq 0, \\ 2 - \exp(-x) & \text{si } \; x \geq 0. \end{cases}$$

3) Pour $y \in]0,1[$, calculer la fonction de quantile $F^{-1}(y)$ et en déduire un programme pour simuler X à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1.2 Plat

Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

1) Montrer que la différence $Y - Z$ suit la même loi que X.
2) En déduire un second programme pour simuler une loi de Laplace.
3) Soit ε une variable aléatoire indépendante de Y et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Montrer que $\varepsilon Y - (1-\varepsilon)Y$ suit la même loi que X et en déduire un troisième programme pour simuler une loi de Laplace.

2 Chaîne de Markov

Pour $\theta \in [0, 1/2]$, on considère la chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3\}$ d'état initial $X_0 = 1$ et de matrice de transition

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}(1-\theta) \\ \theta & 1-2\theta & \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Discuter suivant la valeur de θ de la nature de la chaîne (irréductibilité, récurrence).
2) On suppose que $\theta = 0$ et $X_1 = 1$. Calculer $\mathbb{P}(X_6 = 1)$.
3) Soit k un entier naturel. On suppose que $\theta = \frac{1}{3}$. Que vaut la limite presque sûre de $n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j^k$?
4) Ecrire un programme pour simuler la chaîne de Markov précédente et illustrer le point 3).