Cours photocopié pour le module UE2 (Mathématiques I)

Conventions.

Dans ce qui suit, les *mots en italiques* sont ceux que l'on est en train de définir. On emploie le symbole $:=$ lorsqu'une égalité sert à définir le membre gauche à partir du membre droit. Par exemple :

On appelle *carré* du réel x le réel $x^2 := x.x$.

On peut aussi introduire un terme sans définition complète et sans que sa connaissance soit exigible : on le mettra plutôt entre guillemets. Par exemple :

On résume les propriétés de l'addition dans $\mathbf{R}$ en disant que $(\mathbf{R}, +)$ est un "groupe commutatif".

À propos du module UE2. Le programme qui figure dans le syllabus est presque entièrement contenu dans le programme de terminale. D'autre part, les étudiants de UE2 sont tous les étudiants qui s'orienteront vers des matières diverses, y compris biologie (portails IA et IB). Ce module a donc pour objectif la consolidation des "acquis" de terminale, sous une forme précise et rigoureuse ; plus quelques compléments nécessaires pour les sciences exactes. Ce n'est pas un module de mathématiques théoriques : tout est fait rigoureusement mais tout n'est pas prouvé.

Comme prévu dans le syllabus, la logique et la théorie des ensembles ne sont pas traitées à part. On introduit le vocabulaire au fur et à mesure des besoins, mais le vocabulaire devra être acquis.

Ce photocopié s'appuie lourdement sur le manuel suivant, qui a en partie été écrit par des enseignants de l'Université Paul Sabatier :

"Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence. Niveau L1" sous la direction de Jean-Pierre Ramiis et André Warusfel, Éditions Dunod.

Ce livre coûte 49 euros pour près de 900 pages, *mais il n'est absolument pas nécessaire de l'acheter*. Il est consultable à la Bibliothèque Universitaire, et les étudiants pourront y trouver de nombreux compléments, éclaircissements et exercices supplémentaires.

Il est parfois cité comme référence des différents chapitres du photocopié sous le nom de "L1, module ..." (dans cette collection, les chapitres sont appelés modules).

Signalons qu'il existe un autre ouvrage de qualité pour le L1, écrit dans un style un peu différent : *"Mathématiques, L1", sous la direction de Jean-Pierre Marco, Éditions Pearson.*

Chapitre 1

Nombres complexes

Référence pour ce chapitre : le module II.5 du L1, sections 2, 3, partie de 4 et facultativement 5.

1.1 Calcul dans $\mathbf{C}$

1.1.1 Le corps $\mathbf{C}$

Nous rappelons ici les règles fondamentales concernant “le corps des nombres complexes”. L’existence d’un ensemble de nombres doté de ces propriétés ne va pas de soi, et requiert, en principe, une preuve (ou un axiome) : nous *admettrons* cette existence.

En tant qu’*ensemble* (c’est-à-dire simple collection non structurée de nombres), $\mathbf{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ avec la règle fondamentale :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbf{R}, a + ib = a' + ib' \iff a = a', b = b'.$$

On peut exprimer cette définition en disant que tout complexe s’écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbf{R}$; ce qui revient à dire que l’application $(a, b) \mapsto a + ib$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est une *bijection* : tout élément de l’*ensemble d’arrivée* $\mathbf{C}$ admet un unique *antécédent* dans l’*ensemble de départ* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On appelle *représentation cartésienne* ou *algébrique* l’écriture $z = a + ib$. Le réel a est appelé *partie réelle* de z et noté $\operatorname{Re}(z)$. Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et noté $\operatorname{Im}(z)$. (La partie imaginaire est donc un réel.)

Exercice: Les applications Re et Im de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$ sont elles bijectives ? (Une réponse oui-non ne saurait suffire!)

Nous dirons que le complexe z est *réel* si $\operatorname{Im}(z) = 0$, *i.e.* s’il est de la forme $a + i0$ avec $a \in \mathbf{R}$. On convient alors d’*identifier* $a \in \mathbf{R}$ au complexe $a + i0$; nous verrons plus

loin pourquoi cette identification est licite. Nous dirons que le complexe z est *imaginaire pur* si $\operatorname{Re}(z) = 0$, *i.e.* s'il est de la forme $0 + ib$ avec $b \in \mathbf{R}$. On l'écrit alors simplement ib .

Exercice: Tout complexe est-il réel ou imaginaire pur ? Existe-t-il des complexes réels et imaginaires purs ?

On définit l'addition dans $\mathbf{C}$ par la formule :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbf{R}, (a + ib) + (a' + ib') := (a + a') + i(b + b').$$

L'addition est *associative* : $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$. Dans cette égalité, on a sous-entendu "quels que soient les complexes z, z', z'' " et nous continuerons à sous-entendre de telles déclarations dans ce paragraphe. L'addition est *commutative* : $z + z' = z' + z$. L'élément 0 (c'est-à-dire $0 + i0$) est *neutre* pour l'addition : $0 + z = z + 0$. Enfin tout complexe $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbf{R}$) admet un *opposé* $-z := (-a) + i(-b)$, autrement dit : $z + (-z) = (-z) + z = 0$. On résume ces propriétés en disant que $(\mathbf{C}, +)$ est un "groupe commutatif".

On définit la multiplication dans $\mathbf{C}$ par la formule :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbf{R}, (a + ib)(a' + ib') := (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

On note, selon le cas, zz' , $z.z'$ ou même $z \times z'$ le produit. La multiplication est associative et commutative et l'élément 1 (c'est-à-dire $1 + i0$) est neutre. La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition : $z(z' + z'') = zz' + zz''$. La question de l'inverse est plus compliquée. L'élément 0 ne peut en avoir, car $0z = 0$ (on dit que 0 est *absorbant* pour la multiplication). Mais tout complexe non nul $z = a + ib \in \mathbf{C}^* := \mathbf{C} \setminus \{0\}$ admet un inverse $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$. Cette expression est bien définie parce que $(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. On résume ces propriétés en disant que $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ est un "corps commutatif". Cela implique entre autres que le produit de deux complexes non nuls est non nul, et l'on peut remarquer que $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ est un groupe commutatif, le "groupe multiplicatif du corps $\mathbf{C}$ ".

Exercice: Est-il vrai que que $\operatorname{Re}(x + iy) = x$ dans $\mathbf{C}$? (Il y a un piège.)

Exercice: Quel est l'inverse de zz' ? de $z + z'$?

Si maintenant on veut additionner les réels a, a' , on dispose de deux définitions possibles : l'addition dans $\mathbf{R}$ ou celle que l'on vient de définir dans $\mathbf{C}$, puisque l'on a respectivement identifié a et a' à $a + i0$ et $a' + i0$. En fait, les deux modes de calcul reviennent au même, en vertu de l'égalité évidente : $(a + i0) + (a' + i0) = (a + a') + i0$. De manière analogue, les deux modes de calcul du produit reviennent au même, en

vertu de l'égalité presque aussi évidente : $(a + i0)(a' + i0) = (aa') + i0$. C'est pour cela que l'on a déclaré que l'identification de a à $a + i0$ était "licite" : elle ne cause pas de contradiction entre les calculs.

On vérifie les égalités suivantes :

$$\forall z, z' \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z').$$

On les résume en disant que Re et Im sont des "morphisms" du groupe $(\mathbf{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbf{R}, +)$.

Exercice: Est-il vrai que $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ dans $\mathbf{C}$?

1.1.2 Le plan d'Argand-Cauchy

C'est le plan de la géométrie euclidienne, que vous avez déjà rencontré dans le secondaire, mais vu ici comme une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On suppose le plan Π rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note $\vec{\Pi}$ le "plan vectoriel associé", c'est à dire l'ensemble $\{x\vec{u} + y\vec{v} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ des vecteurs.

À tout $z \in \mathbf{C}$, on associe son *point image* $[z]$: c'est l'unique point M du plan tel que $\vec{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$. À tout point $M(x, y)$, on associe son *affiche* (mot féminin, comme abscisse et ordonnée) : $\operatorname{Aff}(M) := x + iy$. Ces deux applications sont *récioproques* l'une de l'autre, donc bijectives. On a donc une bijection entre l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes et le "plan d'Argand-Cauchy" Π .

À tout $z \in \mathbf{C}$, on associe son *vecteur image* $\vec{[z]}$: c'est le vecteur $x\vec{u} + y\vec{v}$. À tout vecteur $\vec{V}(x, y)$, on associe son *affiche* : $\operatorname{Aff}(\vec{V}) := x + iy$. Ces deux applications sont *récioproques* l'une de l'autre, donc bijectives. On a donc une bijection entre l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes et le "plan vectoriel" $\vec{\Pi}$.

Exercice: Quel est l'affixe du milieu de MM' ? D'un barycentre plus général ?

Exercice: Quelle relation y a-t'il entre abscisse, ordonnée, affiche ?

Exercice: Interpréter géométriquement les applications $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$.

Exercice: Comparer les vecteurs $\vec{[z]}$ et $\vec{[iz]}$.

Exercice: Quels sont les affixes des points de la droite passant par $[z_0]$ et de vecteur directeur $\vec{[z]}$?

1.1.3 Conjugaison

Le nombre complexe *conjugué* de $z = x + iy$ est le complexe $\bar{z} := x - iy$. (Si $x, y \in \mathbf{R}$!). L'opération de conjugaison vérifie un certain nombre de propriétés, ou règles de calcul :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}', \\ \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}', \\ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \overline{\lambda z} &= \lambda \bar{z}, \\ \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \\ z \in \mathbf{R} &\iff \bar{z} = z, \\ z \in i\mathbf{R} &\iff \bar{z} = -z. \end{aligned}$$

Dans la dernière équivalence, $i\mathbf{R}$ désigne l'ensemble $\{ib \mid b \in \mathbf{R}\}$ des imaginaires purs (on le note également $\mathbf{R}i$).

La *norme algébrique* du complexe z est $N(z) := z\bar{z}$, qui est un réel ¹. En représentation cartésienne :

$$N(x + iy) = x^2 + y^2.$$

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier : la norme algébrique $N(z)$ est un réel positif ou nul, qui s'annule si, et seulement si, $z = 0$. On a $N(\bar{z}) = N(z)$ et $N(zz') = N(z)N(z')$. Enfin, si $z \neq 0$, on peut utiliser $N(z)$ pour calculer l'inverse :

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{N(z)}, \text{ ou encore : } (x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Deux nombres intéressants pour la géométrie peuvent être calculés à l'aide du conjugué. Posons $z := x + iy$, $z' := x' + iy'$, et $\vec{U} := \vec{[z]}$, $\vec{U}' := \vec{[z']}$. Alors :

$$\operatorname{Re}(\bar{z}z') = xx' + yy'.$$

On reconnaît le *produit scalaire* $(\vec{U} \mid \vec{U}')$. De même :

$$\operatorname{Im}(\bar{z}z') = xy' - x'y.$$

On reconnaît le *déterminant* $\det(\vec{U}, \vec{U}')$.

¹Le mot "norme" reviendra un peu plus loin, sans l'adjectif "algébrique". Il désignera tout autre chose. La norme algébrique n'est pas une norme "tout court".

Exercice: Interpréter géométriquement les applications $z \mapsto \pm \bar{z}$.

Exercice: Calculer $N(z + z') - N(z) - N(z')$. À quelle condition trouve-t'on 0 ?

1.1.4 Module

Le *module* de $z \in \mathbf{C}$ est $|z| := \sqrt{N(z)}$; comme $N(z)$ est un réel positif ou nul, sa racine carrée est bien définie et c'est également un réel positif ou nul. En représentation cartésienne :

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier : le module $|z|$ est un réel positif ou nul, qui s'annule si, et seulement si, $z = 0$. On a $|\bar{z}| = |z|$ et $|zz'| = |z| |z'|$.

Le module admet les interprétations géométriques suivantes : si z est l'affixe du vecteur $\vec{U}$, alors $|z|$ est la longueur de ce vecteur, que l'on note $\|\vec{U}\|$, ce qui se lit "norme de $\vec{U}$ "

$$|\text{Aff}(\vec{U})| = \|\vec{U}\|.$$

C'est donc la deuxième apparition du mot "norme" ; mais il faut noter que le terme employé ici est beaucoup plus important que dans l'usage précédent.

Si d'autre part z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B , alors $|z_B - z_A|$ est la distance de ces deux points, que l'on note $d(A, B)$:

$$|\text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)| = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Lemme. (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

On a :

$$\text{Re}(\bar{z}z') \leq |zz'|.$$

De plus, pour que l'égalité ait lieu, il faut, et il suffit, que z et z' soient *positivement liés* (c'est-à-dire que l'un soit multiple de l'autre par un réel positif ou nul.)

Démonstration. Soit $w := \bar{z}z'$. On vérifie sans peine que $\text{Re}(w) \leq |w|$, et que $\text{Re}(w) = |w| \Leftrightarrow w \in \mathbf{R}_+$. Puis on invoque l'exercice 4 de la feuille de TD1. $\square$

Théorème. (*Première inégalité triangulaire*)

On a :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

De plus, pour que l'égalité ait lieu, il faut, et il suffit, que z et z' soient positivement liés.

Démonstration. Il s'agit d'une inégalité entre réels positifs, elle est donc équivalente à l'inégalité entre leurs carrés. On calcule :

$$(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 = N(z) + N(z') + 2|zz'| - N(z + z') = 2|zz'| - 2\operatorname{Re}(\bar{z}z').$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

Pour comprendre le nom du théorème il suffit de l'appliquer à la situation suivante : on fixe trois points A, B, C du plan et l'on pose $z := \operatorname{Aff}(B) - \operatorname{Aff}(A)$ et $z' := \operatorname{Aff}(C) - \operatorname{Aff}(A)$. Alors $z + z' = \operatorname{Aff}(C) - \operatorname{Aff}(A)$, et le théorème dit que :

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si, A, B, C sont alignés et dans cet ordre.

Corollaire. (*Deuxième inégalité triangulaire*)

On a :

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

Démonstration. En appliquant la première inégalité à $z - z'$ et z' , on trouve :

$$|z| \leq |z - z'| + |z'| \implies |z| - |z'| \leq |z - z'|.$$

On montre de même l'inégalité symétrique :

$$|z'| - |z| \leq |z - z'|.$$

Enfin, on applique le "principe" :

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b \text{ et } -a \leq b \implies |a| \leq b.$$

$\square$

L'interprétation du module comme une longueur ou une distance conduit naturellement aux définitions suivantes :

1. Le *disque ouvert* de centre z_0 et de rayon r est : $\overset{\circ}{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$.
2. Le *disque fermé* de centre z_0 et de rayon r est : $\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$.
3. Le *cercle* de centre z_0 et de rayon r est : $\partial D(z_0, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\}$.

Le lecteur est invité à bien distinguer *disque* (une portion de surface) de *cercle* (une ligne fermée) et *disque ouvert* (ne comprenant pas sa frontière) de *disque fermé* (comprenant sa frontière).

Exercice: Calculer $|z + z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2$ et prouver le théorème de Pythagore.

1.1.5 Racines carrées

L'étude de "la racine carrée" dans $\mathbf{R}$ se résume à ceci : les réels strictement négatifs n'ont pas de racine carrée (réelle) ; 0 a une seule racine carrée (lui-même) ; et tout réel strictement positif admet exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre. On appelle *la* racine carrée celle qui est positive.

L'étude de "la racine carrée" dans $\mathbf{C}$ n'est pas un problème simple. En fait, on va voir que, si tout nombre complexe admet *des* racines carrées, il n'y a pas de moyen naturel d'en choisir une et de l'appeler *la* racine carrée :

La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que lorsque z est un réel positif ou nul.

Commençons par des remarques simples. D'abord, toute racine carrée z de $Z := 0$ vérifie $z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$. Donc 0 admet une seule racine carrée (lui-même). Si $Z \neq 0$ et si z_1 et z_2 sont des racines carrées de Z (en admettant donc qu'il en existe), alors :

$$z_1^2 = Z = z_2^2 \implies (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) = 0 \implies z_2 - z_1 = 0 \text{ ou } z_2 + z_1 = 0 \implies z_2 = \pm z_1.$$

Ainsi, si $Z \neq 0$ admet (au moins) une racine carrée, il en admet exactement deux, opposées l'une de l'autre.

Pour savoir s'il existe des racines carrées, on se donne $Z := X + iY \in \mathbf{C}$ et l'on cherche $z := x + iy \in \mathbf{C}$ tel que $z^2 = Z$. Cela équivaut au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X, \\ 2xy = Y. \end{cases}$$

On commence par les cas faciles, ceux où Z est réel, *i.e.* $Y = 0$ et $Z = X$. Si $X = 0$, la seule racine carrée est $z = 0$. Si $X > 0$, les racines carrées sont $\pm\sqrt{X}$, où $\sqrt{X}$ désigne celle qui est positive. Si $X < 0$, les racines carrées sont $\pm i\sqrt{-X} = \pm i\sqrt{|X|}$. Il y en a bien deux opposées, mais aucune des deux ne bénéficie d'une notation particulière.

Passons au cas général $Y \neq 0$. Pour simplifier la résolution du système, on remarque que $N(z)^2 = N(z^2) = N(Z)$. Puisqu'il s'agit de deux réels positifs, on a donc $N(z) = \sqrt{N(Z)}$, d'où une nouvelle équation :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

En la combinant avec la première, on trouve :

$$\begin{cases} x^2 = \frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}, \\ y^2 = \frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}, \\ y = \pm \sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}. \end{cases}$$

(On a le droit, car les quantités mises sous racine sont bien des réels positifs.) On se retrouve donc avec deux valeurs distinctes possibles pour x et deux valeurs distinctes possibles pour y , donc, *a priori*, quatre valeurs distinctes possibles pour $z = x + iy$, ce qui en fait trop ! En fait, l'équation $2xy = Y$ impose une liaison de plus entre x et y .
Premier cas : $Y > 0$. Alors x et y sont de même signe, et l'on trouve les deux racines carrées :

$$\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}.$$

Deuxième cas : $Y < 0$. Alors x et y sont de signe contraire, et l'on trouve les deux racines carrées :

$$\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{2}}.$$

L'équation du second degré dans $\mathbf{C}$. L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbf{C}$ et $a \neq 0$ se résout de à l'aide de la *forme canonique du trinôme du second degré* :

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right), \text{ où } \Delta := b^2 - 4ac.$$

Le *discriminant* Δ est un nombre complexe. Si $\Delta = 0$, on a $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2$ et l'équation admet la *racine double* $z := -\frac{b}{2a}$. Si $\Delta \neq 0$, il admet deux racines carrées distinctes opposées, δ et $-\delta$. Il y a alors deux racines :

$$z_1 := \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 := \frac{-b - \delta}{2a}.$$

On a, comme pour le cas des coefficients réels, la *factorisation du trinôme* :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

On a aussi les *relations entre coefficients et racines* :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Toutes ces formules sont encore valables lorsque $\Delta = 0$ en prenant $\delta := 0$.

Exercice: Calculer les racines carrées de $\pm i$, les racines cubiques de 1.

Exercice: Les dangers de $\sqrt{z}$, premier épisode : peut-on définir $\sqrt{z}$ "de proche en proche" ? (Partir de $\sqrt{1} = 1$, puis calculer $\sqrt{i}$ au plus proche, puis $\sqrt{-1}$, puis $\sqrt{-i}$; et si l'on était parti dans l'autre sens ?)

Module UE2 : Première feuille de TD

Nombres complexes

Exercice 1

Résoudre le système (dans $\mathbf{R}^2$) : $(a + ib)(x + iy) = 1$.

Exercice 2

Déterminer les affixes des points de la droite (MM') .

Exercice 3

Déterminer les affixes des points de la droite passant par $[z_0]$ et orthogonale au vecteur $\vec{[z]}$.

Exercice 4

Soient $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ des vecteurs d'affixes respectives z et z' .

(i) Montrer que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont *liés* (c'est-à-dire que l'un est multiple de l'autre) si, et seulement si, $\bar{z}z' \in \mathbf{R}$. (On utilisera le critère de terminale sur le déterminant.)

(ii) À quelle condition ces vecteurs sont-ils *positivement liés*? (C'est-à-dire que l'un est multiple de l'autre par un réel positif ou nul.)

Exercice 5

À quelle condition les disques ouverts $\overset{\circ}{D}(z_0, r)$ et $\overset{\circ}{D}(z'_0, r')$ se rencontrent-ils ?

Exercice 6

Calculer les racines cinquièmes de 1.

(Marche à suivre : factoriser $z^5 - 1 = (z - 1)P(z)$; diviser $P(z)$ par z^2 ; faire apparaître l'inconnue auxiliaire $Z := z + z^{-1}$.)

Exercice 7

Les dangers de $\sqrt{z}$, deuxième épisode : peut-on choisir pour tout complexe z une racine carrée $\sqrt{z}$ de manière à toujours avoir $\sqrt{zz'} = \sqrt{z}\sqrt{z'}$? (Essayer avec $z, z' := 1$ puis avec $z, z' := -1$.)

1.2 Représentation trigonométrique

Dans cette section, on exploite la connaissance des fonctions trigonométriques acquise dans le secondaire : l'étudiant est donc invité à réviser ses cours sur le sujet.

1.2.1 Le cercle unité

Le *cercle unité* de $\mathbf{C}$ est formé des nombres complexes de module 1 : $\mathbf{U} := \partial D(0, 1)$. Il contient 1, et il est stable par multiplication et inversion, ce que l'on résume en disant que c'est un "sous-groupe" de $\mathbf{C}^*$.

On définit : $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ (avec $\theta \in \mathbf{R}$). L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$. Elle n'est pas injective :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta' \equiv \theta \pmod{2\pi\mathbf{Z}} \iff \theta' - \theta \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Rappelons que la dernière notation (*congruence modulo 2π*) signifie : $\exists k \in \mathbf{Z} : \theta' - \theta = 2k\pi$. La formule fondamentale est la suivante :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}.$$

On dit que l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un "morphisme" de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(\mathbf{U}, \cdot)$. Pour prouver la formule, on compare les parties réelles et imaginaires, ce qui nous ramène aux formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \theta') &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \\ \sin(\theta + \theta') &= \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'.\end{aligned}$$

Sachant que $e^{i\pi} = -1$ (célèbre formule d'Euler) et que $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$, on peut toujours ramener le calcul des valeurs de cette fonction au cas où $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Les valeurs suivantes sont à connaître par coeur :

$$\begin{aligned}e^{i0} &= 1, \\ e^{i\pi/6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \\ e^{i\pi/4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ e^{i\pi/3} &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ e^{i\pi/2} &= i.\end{aligned}$$

Exercice: Calculer $e^{2i\pi/3}$, $e^{i\pi/12}$ et $e^{2i\pi/5}$.

Exercice: On pose $\sqrt{e^{i\theta}} := e^{i\theta/2}$. Suivre les valeurs pour θ variant de 0 à 2π . Constater qu'il y a un problème.

Exercice: On choisit un antécédent θ de $u \in \mathbf{U}$ de proche en proche en passant par 1, i , -1 , $-i$, 1 (et d'autres points intermédiaires si l'on veut, pris sur le cercle). Constater qu'il y a un problème.

1.2.2 Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel non nul. On appelle *racine n^e de l'unité* un complexe z tel que $z^n = 1$. Les racines n^{es} de l'unité forment l'ensemble :

$$\mu_n := \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}.$$

On a les implications :

$$z \in \mu_n \implies z^n = 1 \implies |z|^n = 1 \implies |z| = 1 \implies z \in \mathbf{U},$$

d'où l'inclusion $\mu_n \subset \mathbf{U}$. Pour déterminer les racines n^{es} de l'unité, on les cherche donc sous la forme $e^{i\theta}$. On a les équivalences :

$$(e^{i\theta})^n = 1 \iff e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi\mathbf{Z}} \iff \exists k \in \mathbf{Z} : n\theta = 2k\pi,$$

d'où $\mu_n = \{e^{2ki\pi/n} \mid k \in \mathbf{Z}\}$. D'autre part, si $k' \equiv k \pmod{n}$, *i.e.* si $k' - k$ est un multiple de n , alors on écrit $k' = k + mn$ avec $m \in \mathbf{Z}$, d'où :

$$e^{2k'i\pi/n} = e^{2ki\pi/n + 2mi\pi} = e^{2ki\pi/n} e^{2mi\pi} = e^{2ki\pi/n}.$$

On peut donc choisir $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ car les autres valeurs de k ne fourniront pas de nouvelles valeurs de $e^{2ki\pi/n}$. On trouve donc en fin de compte :

$$\mu_n = \{e^{2ki\pi/n} \mid 0 \leq k \leq n-1\}.$$

De plus, ces n valeurs $e^{2ki\pi/n}$ sont deux à deux distinctes, car :

$$e^{2ki\pi/n} = e^{2k'i\pi/n} \implies 2k\pi/n \equiv 2k'\pi/n \pmod{2\pi} \implies k \equiv k' \pmod{n}.$$

En effet, $2k\pi/n - 2k'\pi/n = m(2\pi) \implies k - k' = mn$.

L'étude des racines de l'unité est appelée "cyclotomie" à cause de leur très belle propriété géométrique : les racines n^{es} sont les affixes des sommets d'un polygone régulier. En effet, ce polygone est invariant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$ (et par chacune de ses "itérées", les rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$).

Exercice: Calculer "à la main" $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$. Dessiner les polygones réguliers correspondants.

1.2.3 Module et argument

Tout complexe non nul admet une unique écriture $z = \rho u$, avec $\rho > 0$ et $|u| = 1$. En effet, si $z \neq 0$, cette écriture implique que $|z| = \rho$, donc que $u = \frac{z}{|z|}$; e,t réciproquement, on voit que ces choix conviennent bien.

L'existence et l'unicité d'une telle écriture se traduisent en disant que l'on a une application bijective :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}^*, \\ (\rho, u) \mapsto \rho u. \end{cases}$$

Si l'on combine ce résultat avec ceux de la section 1.2.1, on en déduit que tout complexe non nul admet une écriture $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ est unique et où $\theta \in \mathbf{R}$ est déterminé modulo 2π : c'est la *représentation trigonométrique* ou *exponentielle*. On a donc une application surjective :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^*, \\ (\rho, \theta) \mapsto \rho e^{i\theta}. \end{cases}$$

Les réels ρ et θ s'obtiennent à partir de z en posant $\rho := |z|$ et en résolvant l'équation $e^{i\theta} := \frac{z}{|z|}$.

La représentation trigonométrique est très commode pour tous les calculs qui comportent des multiplications, des inverses, des puissances ... C'est dû aux règles de calcul suivantes :

$$\begin{aligned} (\rho e^{i\theta}) (\rho' e^{i\theta'}) &= (\rho\rho') e^{i(\theta+\theta')}, \\ (\rho e^{i\theta})^{-1} &= \rho^{-1} e^{-i\theta}, \\ (\rho e^{i\theta})^n &= \rho^n e^{ni\theta}, \\ -\rho e^{i\theta} &= \rho e^{i(\theta+\pi)}. \end{aligned}$$

À titre d'exemple, calculons les puissances de $z := 1 + i$. On a $|z| = \sqrt{2}$ et $\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4}$, d'où $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On en conclut que $(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n e^{ni\pi/4}$.

La représentation trigonométrique conduit à quelques définitions. Soit z un complexe non nul. Tout réel θ tel que z admet une représentation trigonométrique de la forme $\rho e^{i\theta}$ (autrement dit, tout réel θ tel que $e^{i\theta} := \frac{z}{|z|}$) s'appelle *un argument* de z .

On note $\arg(z)$ l'ensemble des arguments ². L'unique argument de z qui appartient à $] -\pi, \pi]$ s'appelle *argument principal* de z et on le note $\text{Arg}(z)$. La fonction $z \mapsto \text{Arg}(z)$ est appelée *détermination principale de l'argument*.

²Dans la terminologie de UE8 = Maths II, $\arg(z)$ est donc une "classe d'équivalence modulo 2π ".

Application au calcul des racines n^{es} d'un nombre complexe. On sait *a priori* que l'équation $z^n = 0$ a pour seule solution $z = 0$. Supposons $Z \neq 0$ et soit $Z = re^{it}$ une écriture trigonométrique de Z : donc $r > 0$ est le module de Z et $t \in \mathbf{R}$ est un argument de Z . Alors :

$$z^n = Z \iff \rho^n e^{ni\theta} = re^{it} \iff (\rho^n = r \text{ et } n\theta \equiv t \pmod{2\pi}).$$

Ainsi, on doit prendre $\rho := r^{1/n} := \sqrt[n]{r}$ (la racine n^{e} d'un réel positif est bien définie) et $\theta := t/n + 2k\pi/n$ pour un entier certain $k \in \mathbf{Z}$. Le même raisonnement que dans le cas des racines de l'unité donne alors l'ensemble des racines n^{es} de $Z = re^{it} \neq 0$:

$$\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = Z\} = \{r^{1/n} e^{it/n + 2ki\pi/n} \mid 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Notons d'ailleurs que, si l'on a trouvé l'une quelconque de ces racines n^{es} de Z , mettons z_0 , les autres s'en déduisent :

$$z^n = Z \iff z^n = z_0^n \iff (z/z_0)^n = 1 \iff z/z_0 \in \mu_n,$$

de sorte que :

$$\{z \in \mathbf{C} \mid z^n = Z\} = \{z_0 u \mid u \in \mu_n\}.$$

Interprétation géométrique de l'argument. Soient $\vec{U}, \vec{U}'$ deux vecteurs non nuls, d'affixes respectives z, z' (qui sont donc des complexes non nuls). Alors l'angle orienté de $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ est égal à l'argument de z'/z :

$$\widehat{(\vec{U}, \vec{U}')} = \arg \left(\frac{\text{Aff}(\vec{U}')}{\text{Aff}(\vec{U})} \right).$$

Noter que l'on a employé la notation $\arg$ qui désigne un réel modulo 2π . Ainsi, l'angle orienté de deux vecteurs n'est connu que modulo 2π . Par exemple, l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{1}, \vec{i})}$ est égal à $\arg i = \pi/2 \pmod{2\pi}$.

On connaît la relation de Chasles pour les angles :

$$\widehat{(\vec{U}, \vec{U}')} + \widehat{(\vec{U}', \vec{U}'')} = \widehat{(\vec{U}, \vec{U}'')}.$$

Si l'on pose $z := \text{Aff}(\vec{U})$, $z' := \text{Aff}(\vec{U}')$ et $z'' := \text{Aff}(\vec{U}'')$, cela s'écrit :

$$\arg \frac{z'}{z} + \arg \frac{z''}{z'} + \arg \frac{z''}{z}.$$

Posons $z_1 := \frac{z'}{z}$ et $z_2 := \frac{z''}{z'}$; la relation devient :

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2).$$

Comme on n'additionne pas de véritables réels, mais des “réels modulo 2π ”, il faut préciser ce que peut bien signifier une telle relation. On choisit *un* argument θ_1 de z_1 et *un* argument θ_2 de z_2 et on les additionne : on trouve que $\theta_1 + \theta_2$ est *un* argument de $z_1 z_2$. Cela découle d'ailleurs de la règle déjà vue : $(\rho e^{i\theta}) (\rho' e^{i\theta'}) = (\rho\rho') e^{i(\theta+\theta')}$. Si l'on choisissait un autre argument $\theta'_1 = \theta_1 + 2k\pi$ de z_1 (avec $k \in \mathbf{Z}$) et un autre argument $\theta'_2 = \theta_2 + 2l\pi$ de z_2 (avec $l \in \mathbf{Z}$), on obtiendrait $\theta'_1 + \theta'_2 = \theta_1 + \theta_2 + 2(k+l)\pi$, qui est bien un autre argument de $z_1 z_2$. La morale de cette histoire, c'est que l'on peut additionner des “réels modulo 2π ”. Pour des raisons analogues, on peut également calculer l'opposé d'un “réel modulo 2π ”, et l'on a la relation :

$$\widehat{(\vec{U}', \vec{U})} = -\widehat{(\vec{U}, \vec{U}')}$$

Application aux similitudes directes. Géométriquement, la *similitude directe de centre M_0 , de rapport $r > 0$ et d'angle θ* est la transformation du plan qui transforme M_0 en lui-même et tout point $M \neq M_0$ en l'unique point $M' \neq M_0$ tel que :

$$\|\overrightarrow{M_0 M'}\| = r \|\overrightarrow{M_0 M}\| \quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{M_0 M}, \overrightarrow{M_0 M'})} = \theta \pmod{2\pi}.$$

Notons $z_0 := \text{Aff}(M_0)$, $z := \text{Aff}(M)$, $z' := \text{Aff}(M')$. Les relations ci-dessus sont équivalentes à :

$$z' - z_0 = a(z - z_0), \quad \text{où } a := r e^{i\theta}.$$

On peut encore écrire $z' = az + b$, où a est un complexe non nul, et où $b := (1 - a)z_0$.

Réciproquement, pour étudier la transformation géométrique qui s'écrit (en termes d'affixes) $z' = az + b$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$, on doit distinguer trois cas :

1. Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $z' = z$, c'est la transformation identique du plan. C'est la similitude directe de rapport 1 et d'angle $0 \pmod{2\pi}$, et tout point du plan en est le centre.
2. Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors $z' = z + b$ n'a aucun *point fixe* (i.e. transformé en lui-même) et ne peut donc être une similitude. Bien entendu, on sait que c'est la *translation de vecteur* $\overrightarrow{[b]}$.
3. Si $a \neq 1$, on cherche d'abord un point fixe. Son affixe z_0 doit vérifier $z_0 = az_0 + b$, et la seule possibilité est $z_0 := \frac{b}{1-a}$ (par hypothèse, $1 - a \neq 0$). Alors $z' - z_0 = a(z - z_0)$ et l'on reconnaît la similitude de centre $[z_0]$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

Deux cas particuliers importants sont à signaler : si le rapport est 1 la similitude est une *rotation* ; dans ce cas, $a \in \mathbf{U}$. Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ (resp. $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$), la similitude est une homothétie de rapport positif (resp. de rapport négatif), et $a \in \mathbf{R}^*$.

Exercice: À quelle condition a-t-on $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$, avec où $\rho, \rho' \in \mathbf{R}^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$?

Exercice: Tracer les $(1 + i)^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$. Quelles courbes d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ simple les relient ?

Exercice: Quels sont les arguments des réels, des imaginaires purs, des réels positifs ?

Exercice: Calculer $\text{Arg}(z^{-1})$. (Il y a une discussion.)

Exercice: Quelle similitude directe amène $[1]$ sur $[i]$ et $[1 + i]$ sur $[1]$? On la calculera algébriquement (forme $z \mapsto az + b$) et géométriquement (centre, rapport réel, angle).

1.2.4 L'exponentielle complexe

On a vu que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $y \mapsto e^{iy}$ ont des propriétés communes. On peut les combiner en une application appelée *exponentielle complexe* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$, définie par :

$$\forall z := x + iy \in \mathbf{C}, e^z := e^x e^{iy}.$$

Puisque $e^x \in \mathbf{R}_+^*$ et $e^{iy} \in \mathbf{U}$, on voit que $e^z \in \mathbf{C}^*$. Le module et l'argument se calculent "à vue" :

$$\begin{aligned} |e^z| &= e^{\text{Re}z}, \\ \arg e^z &= \text{Im}z \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

En combinant les formules d'addition pour e^x et pour e^{iy} , on obtient la formule :

$$\forall z, z' \in \mathbf{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

On dit que la fonction exponentielle complexe est un "morphisme" de groupes de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{C}^*, \cdot)$.

Tout élément $Z \in \mathbf{C}^*$ se met sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$. On voit alors que $Z = e^z$, où $z = \ln \rho + i\theta$. L'exponentielle complexe est donc surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$. Elle n'est pas injective :

$$e^z = e^{z'} \iff z' \equiv z \pmod{2\pi\mathbf{Z}} \iff z' - z \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Il suffit en effet de comparer les modules et les arguments.

Le logarithme complexe. Tout d'abord, une mise en garde : le logarithme complexe est un objet beaucoup plus délicat à manier que le logarithme réel. En L3, on en sera encore à comprendre certaines de ses subtilités. La cause première est la non

injectivité de l'exponentielle complexe.

Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Tout complexe $w \in \mathbf{C}$ tel que $e^w = z$ s'appelle *un logarithme de z* . D'après un calcul effectué plus haut, les logarithmes de z sont les complexes $\ln |z| + i\theta$, où $\theta \in \arg z$.

Si $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, l'argument principal de z n'est pas égal à π , c'est un élément de l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$. Le complexe z admet donc un et un seul logarithme dont la partie imaginaire est dans $]-\pi, \pi[$: c'est la *détermination principale du logarithme*, parfois notée $\log z$. On a la formule :

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

L'approche de l'exponentielle complexe présentée ici repose sur l'étude en terminale de l'exponentielle réelle, qui est fondée sur de l'analyse et peut aisément être rendue rigoureuse ; et sur celle des fonctions trigonométriques, qui est largement basée sur des dessins liés au cercle unité et sur des interprétations heuristiques. De plus, dans cette approche, la magnifique formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ est une tautologie, qui ne fait que traduire les égalités $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$. En réalité, la vraie définition de l'exponentielle complexe (due à Euler) repose sur la formule suivante :

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots$$

Bien entendu, il faut donner un sens à la "somme infinie", ce qui revient à définir le passage à la limite dans $\mathbf{C}$ à partir des sommes finies. Cela repose sur la notion de "série" que l'on commencera à étudier dès le second semestre de L1.

On doit ensuite prouver à *partir de cette définition* diverses propriétés de l'exponentielle complexe, puis en déduire celles de l'exponentielle réelle et des fonctions trigonométriques. Cette démarche est détaillée dans la section 5.2 du module II.5 du livre de L1 auquel fait référence l'introduction du poly.

Exercice: Calculer les logarithmes de $\pm 1 \pm i$.

Exercice: Calculer (avec discussion) $\log z^{-1}$.

1.2.5 Applications à la trigonométrie

Elles reposent essentiellement sur les *formules d'Euler* :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

et sur la *formule de Moivre* :

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n.$$

Signalons également la formule utile :

$$e^{ix} - 1 = e^{ix/2} (2i \sin x/2).$$

La formule du binôme. Pour appliquer la formule de Moivre, on aura souvent besoin de la *formule du binôme* (valable pour $n \in \mathbf{N}$) :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Rappelons que les *coefficients binomiaux* sont définis par la formule :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

où les *factorielles* sont elles-mêmes définies par :

$$n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par exemple, $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, etc. On a toujours $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; si $n \geq 1$: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; si $n \geq 2$: $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = n(n-1)/2$; etc. La formule du binôme se prouve par récurrence sur n en utilisant les relations de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Expression explicite pour $\cos nx$ et $\sin nx$. Ecrivons que $\cos nx$ et $\sin nx$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $(\cos x + i \sin x)^n$, que l'on développe avec la formule du binôme. On prend en compte le fait que i^k est réel si k est pair, et imaginaire pur si k est impair : $i^{2\ell} = (-1)^\ell$ et $i^{2\ell+1} = (-1)^\ell i$. On trouve :

$$\begin{aligned} \cos nx &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell (\cos x)^{n-2\ell} (\sin x)^{2\ell}, \\ \sin nx &= \sum_{\ell=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2\ell+1} (-1)^\ell (\cos x)^{n-2\ell-1} (\sin x)^{2\ell+1}. \end{aligned}$$

On a noté $\lfloor a \rfloor$ la *partie entière* de a . Si l'on remplace partout $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on constate que $\cos nx$ s'exprime comme un polynôme en $\cos x$ seul, et que $\sin nx$ s'exprime comme le produit de $\sin x$ par un polynôme en $\cos x$ seul. Il existe des formules très générales, mais il est aussi simple de savoir les retrouver au coup par coup.

Linéarisation d'une expression trigonométrique. Des formules d'Euler, on déduit que les puissances de cosinus et de sinus et leurs produits peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires d'exponentielles. Voici un exemple de formule générale :

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}.$$

Comme on sait d'avance que le résultat est réel, on peut remplacer chaque terme du membre droit par sa partie réelle :

$$\cos^n x = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{Re} \left(e^{i(2k-n)x} \right) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k - n)x.$$

Un exercice célèbre. Il s'agit du calcul de $\sum_{k=0}^n \cos kx$ et de $\sum_{k=0}^n \sin kx$. Notons respectivement $C(x)$ et $S(x)$ ces deux expressions. Alors :

$$W(x) := C(x) + iS(x) = \sum_{k=0}^n (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^n w^k, \text{ où } w := \cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Si $w = 1$, c'est-à-dire si $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, la somme vaut $n + 1$ et l'on en déduit $C(x) = n + 1$ et $S(x) = 0$.

Sinon, on reconnaît la somme partielle d'une série géométrique :

$$W(x) = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}.$$

Grâce à la "formule utile" rappelée plus haut, on en déduit :

$$W(x) = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x/2} 2i \sin(n+1)x/2}{e^{ix/2} 2i \sin x/2} = e^{inx/2} \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos kx &= \frac{\cos nx/2 \sin(n+1)x/2}{\sin x/2}, \\ \sum_{k=0}^n \sin kx &= \frac{\sin nx/2 \sin(n+1)x/2}{\sin x/2}. \end{aligned}$$

Exercice: Exprimer $\cos 3x$ et $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ comme des polynômes en $\cos x$.

Exercice: Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice: Dans l'exercice célèbre, vérifier que les dénominateurs sont non nuls.

Module UE2 : Deuxième feuille de TD

Nombres complexes

Exercice 1

Soit $x \neq -i$. Montrer que $\frac{1+ix}{1-ix} \in \mathbf{U} \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.

Exercice 2

Soit $u := e^{4i\pi/5}$. Dessiner le polygone dont les sommets successifs sont $1, u, u^2, u^3, u^4$ (étoile Cherifienne). Peut-on obtenir ainsi l'étoile de David (polygone croisé dont les sommets sont les éléments de μ_6) ?

Exercice 3

Périmètre et aire du polygone régulier μ_n . Limites lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4

Calculer $\text{Arg}(zz')$. (Il y a une discussion.)

Exercice 5

Soit $x \in]-\pi, \pi]$. Déterminer le module et l'argument de $e^{ix} + 1$.

Exercice 6

Calculer $\log zz'$. (Il y a une discussion.)

Exercice 7

L'application $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbf{C}$) est-elle une similitude ? La composée de deux similitudes est-elle une similitude ?

Chapitre 2

Fonctions usuelles

Cette partie du cours est basée sur l'analyse de terminale : les fonctions et leurs propriétés ont déjà été rencontrées. On fait le point en étant précis et rigoureux. Cela ne veut pas dire que l'on démontre tout ce qui est nécessaire, mais on l'énonce et l'on dit que cela admet une démonstration.

Il y a aussi un problème avec les définitions : la continuité et la dérivabilité n'ont en général été présentées qu'heuristiquement en terminale. Et nous n'étudierons la continuité rigoureusement qu'ensuite. Il faut que cela soit conscient.

On commence par rappeler l'énoncé précis du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de continuité et de dérivabilité d'une fonction réciproque. Tout usage d'un de ces théorèmes doit le mentionner. "La restitution des énoncés est exigible".

2.1 Exponentielle et logarithme

2.1.1 Exponentielle

Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$: c'est la *fonction exponentielle (réelle)* $f(x) = e^x$.

Elle est indéfiniment dérivable, égale à toutes ses dérivées.

Elle est strictement croissante, strictement convexe, ses limites sont 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Son graphe ressemble à ...

unbeaugraphe...

On peut tracer un graphe approché par la méthode d'Euler. Soit $x > 0$ (mais ça marche également pour $x < 0$). On subdivise $[0, x]$ en n pas de longueur $h := x/n$. On construit les sommets (x_k, y_k) d'une ligne brisée pour $k := 0, \dots, n$ en posant $x_k := kh$

(donc on va de $x_0 = 0$ à $x_n = x$) et :

$$y_{k+1} \approx y_k + hf'(x_k) = y_k + hf(x_k) \approx y_k + hy_k,$$

c'est-à-dire pratiquement en posant $y_{k+1} := (1+h)y_k$. On a donc comme valeur approchée de $f(x) = f(x_n)$ la dernière ordonnée $y_n = (1+h)^n = (1+x/n)^n$. (On verra en exercice que la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de cette expression est bien e^x .)

Propriétés algébriques de l'exponentielles :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = 1/e^a;$$

Soit $r := p/q \in \mathbf{Q}$. Alors $(e^{ra})^q = (e^a)^p$, d'où, tout étant strictement positif :

$$e^{ra} = (e^a)^{p/q} := \sqrt[q]{(e^a)^p}.$$

Notons $e := e^1 \approx 2,718$: on a donc, pour $r \in \mathbf{Q}$, l'égalité : $e^r = e^r$ avec à gauche la fonction exponentielle et à droite une puissance rationnelle de e . La fonction exponentielle sert à interpoler les puissances lorsque les exposants ne sont pas rationnels.

Pour interpoler de même les a^r , où $a \in \mathbf{R}_+^*$ est quelconque (si $a < 0$, on ne peut même pas prendre $r := 1/2$), on choisit λ tel que $a = e^\lambda$ et l'on pose $a^x := e^{\lambda x}$. Bien entendu, on a reconnu $\lambda := \ln a$, d'où la définition :

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Un peu d'analyse. Propriétés locales de l'exponentielle :

on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, ce que l'on peut écrire $e^x = 1 + x + x\epsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$: "développement limité à l'ordre 1". Plus généralement :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

ATTENTION! On garde la notation $\epsilon(x)$ mais ce n'est jamais la même fonction, c'est simplement une abréviation pour "une fonction qui tend vers 0 en 0".

Pour un développement limité en $a \neq 0$, il suffit d'écrire $e^{a+x} = e^a e^x = e^a(1 + x + \dots)$.

Ordre de grandeur ("l'exponentielle l'emporte") :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0.$$

On peut prouver l'égalité suivante, de nature différente des développements limités ("développement en série") :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}x^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k.$$

On peut en déduire que e est irrationnel de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $n!e = a + u$ avec

$$a := \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbf{Z} \text{ et } u := \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \dots \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n},$$

donc $a < n!e < a + 1$ et $n!e$ n'est jamais entier.

Exercice: Nature des branches du graphe de l'exponentielle ?

Exercice: Développement limité de $\frac{x}{e^x - 1}$ en 0 ?

2.1.2 Logarithme népérien

La fonction $\ln$ réciproque de la fonction exponentielle est appelée *logarithme népérien*. C'est une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$. C'est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1 :

$$\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Elle est strictement croissante, strictement concave, ses limites sont $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. Son graphe ressemble à ...

unbeaugraphe...

Si $a > 0$, la réciproque de $x \mapsto a^x$ est la fonction $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Propriétés algébriques : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^x) = x \ln(a)$, etc.

Développement limité :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + x^n \epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Pour un développement limité en $a > 0$, écrire $\ln(a+x) = \ln(a) + \ln(1+x/a)$ et appliquer celui qui précède à x/a .

Ordre de grandeur :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \beta > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta (\ln x)^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0.$$

On peut encore prouver un "développement en série" :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Ces égalités sont vérifiées pour $-1 < x \leq 1$. Par exemple, $\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice: Nature des branches du graphe de $\ln$?

Exercice: Dérivée k^{e} de $\ln$?

Exercice: Graphe et dérivée de $\log_a$?

2.2 Fonctions circulaires

2.2.1 Cosinus et sinus

Il existe un unique couple de fonctions dérivables $C, S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $S' = C$, $C' = -S$, $C(0) = 1$ et $S(0) = 0$. On peut également écrire ces conditions vectoriellement : on pose $F(x) := \begin{pmatrix} C(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(x) \text{ et } F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on peut écrire ces conditions avec une fonction à *valeurs complexes* (mais de variable réelle) $z(x) := \cos x + i \sin x$:

$$z'(x) = iz(x) \text{ et } z(0) = 1.$$

Cette dernière forme fait irrésistiblement penser à une exponentielle, et suggère de noter $z(x) = e^{ix}$.

La fonction C est appelée *cosinus*, c'est la fonction $\cos x$; la fonction S est appelée *sinus*, c'est la fonction $\sin x$. On a donc retrouvé la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

La méthode de résolution approchée d'Euler marche comme dans le cas de l'exponentielle réelle et donne une valeur approchée :

$$e^{ix} \approx (1 + ix/n)^n.$$

Cette formule est justifiée en exercice.

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont évidemment indéfiniment dérivables. On montre l'existence d'un réel positif (célèbre) $\pi \approx 3,14$ tel que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, respectivement paire et impaire. Sur $[0, \pi]$:

La fonction $\cos$ est strictement décroissante de $\cos 0 = 1$ à $\cos \pi = -1$, points en lesquels la tangente est horizontale ; elle est concave sur $[0, \pi/2]$, s'annule avec un point d'inflexion en $\pi/2$ et elle est convexe sur $[\pi/2, \pi]$.

La fonction $\sin$ est convexe, elle est croissante de $\sin 0 = 0$ à $\sin \pi/2 = 1$ (où elle a une tangente horizontale) puis décroissante de $\sin \pi/2 = 1$ à $\sin \pi = 0$.

En fait, on a $\sin(x + \pi/2) = \cos x$, d'où deux beaux graphes décalés :

unbeaugraphedouble...

On a $\cos^2 + \sin^2 = 1$. L'application $x \mapsto (\cos x, \sin x)$ est donc à valeurs dans le cercle unité $\mathbf{U}$. Elle est en fait surjective et deux réels ont même image si, et seulement s'ils sont congrus modulo 2π .

On a des "formules d'addition", qui se résument au mieux dans la formule de Moivre : $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Les développements limités se déduisent de celui de e^{ix} :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2}i^2x^2 + \dots + \frac{1}{n!}i^n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Puis on sépare parties réelle et imaginaire. Pour un DL ailleurs qu'en 0, utiliser les formules d'addition. Par exemple :

$$\cos(a+x) = \cos a - (\sin a)x + x\epsilon(x) \text{ et } \sin(a+x) = \sin a + (\cos a)x + x\epsilon'(x).$$

Ce n'est pas le même ϵ !

Il y a un développement en série entière, obtenu en séparant les parties réelles et imaginaires de :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2}i^2x^2 + \dots + \frac{1}{n!}i^n x^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}i^k x^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}i^k x^k.$$

Exercice: Montrer que, pour x réel, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + ix/n)^n = e^{ix}$.

Exercice: Calculer la dérivée k^e de $\cos x$, de $\sin x$, de $\cos x \sin x$.

Exercice: Donner le développement limité de $\cos x \sin x$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice: Préciser les développements en série entière de $\cos$ et $\sin$.

Exercice: Étudier la fonction $\tan := \frac{\sin}{\cos}$.

Exercice: Comportement de $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ en 0 ?

2.2.2 Fonctions circulaires inverses

Fonctions arccos, arcsin, arctan : définition, dérivée, graphe, branches, valeurs spéciales, formules d'addition, développements limités, développement en série.

Exercices :

- 1.
- 2.
- 3.

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Fonctions cosh, sinh (tanh en exercice) : définition à partir de l'exponentielle, dérivée, équation différentielle, graphe, branches, valeurs spéciales, formules d'addition, développements limités, développement en série.

Exercices :

- 1.
- 2.
- 3.

2.3.2 Fonctions hyperboliques inverses

Fonctions réciproques des précédentes : définition, calcul à partir du logarithme, dérivée, graphe, branches, valeurs spéciales, formules d'addition, développements limités, développement en série.

Exercices :

- 1.
- 2.
- 3.

Chapitre 3

Équations différentielles

Équations : $y' = ay$, $y' = ay + b$, $y'' + ay' + by = 0$, $y'' + ay' + by = c$, variation des constantes, allures des solutions, espaces vectoriels ou affines de dimension 2 (sans les termes), systèmes $Y' = AY + B$ (vectoriels), ce que l'on peut faire avec la méthode d'Euler.

Chapitre 4

Limites, continuité

- 1) Définitions et exemples à la main.
- 2) Propriétés algébriques (sommes, etc) *avec preuves*.
- 3) *Peut-être* : développements limités, quelques calculs de dérivées “à la main”.
- 4) Propriétés d’existence *avec preuves*.
- 5) Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de continuité de la réciproque, avec ou sans preuve, mais avec illustrations.

Chapitre 5

Polynômes

En plus du syllabus, prévoir la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

Chapitre 6

Géométrie