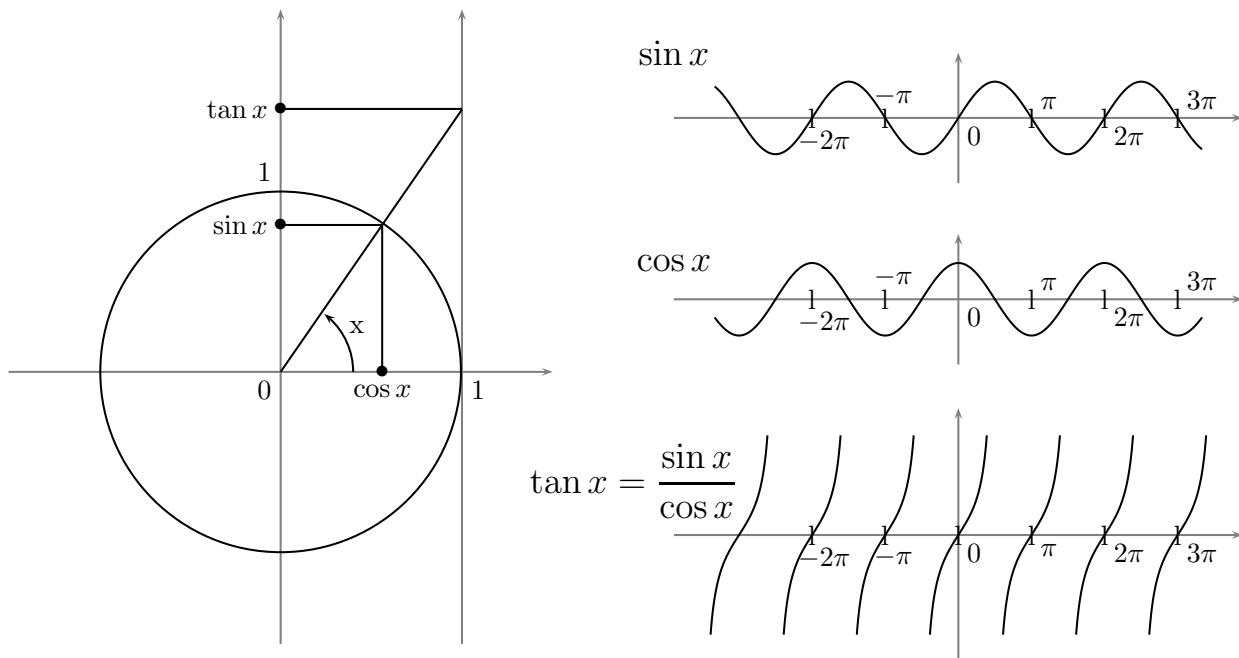


2.2 Fonctions circulaires

Commençons par le lien classique entre le “cercle trigonométrique” et les *fonctions trigonométriques* ou *circulaires*. Il faut cependant bien être conscient que les “définitions” ci-dessous, héritées de la terminale, ne sont rien d’autre que des dessins.



2.2.1 Cosinus, sinus et tangente

Nous allons fonder l’étude des fonctions circulaires sur l’analyse, quitte à admettre sans démonstration certains théorèmes. Ainsi, nous *admettrons* le théorème suivant, dont la démonstration repose sur un théorème d’existence des solutions des équations différentielles que l’on verra en L2.

Théorème.

Il existe un unique couple de fonctions dérivables $C, S : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $S' = C$, $C' = -S$, $C(0) = 1$ et $S(0) = 0$.

On peut également ces conditions à l’aide d’une *fonction à valeurs complexes* ; pour cela on pose :

$$z(x) := C(x) + iS(x).$$

C’est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et le théorème nous dit qu’il existe une unique telle fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que l’on ait :

$$z'(x) = iz(x) \text{ et } z(0) = 1.$$

Enfin, on peut écrire ces conditions à l'aide d'une "fonction à valeurs vectorielles" ; pour cela, on pose : $F(x) := \begin{pmatrix} C(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$. C'est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$, mais on écrit les éléments de $\mathbf{R}^2$ sous formes de "vecteurs colonnes". Le théorème nous dit alors qu'il existe une unique telle fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et telle que l'on ait : $F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(x)$ et $F(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La règle utilisée implicitement est celle du produit d'une "matrice" par un vecteur colonne : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Définition: La fonction C est appelée *cosinus* et l'on note : $\cos x$. La fonction S est appelée *sinus*, et l'on note : $\sin x$. On note alors : $e^{ix} := \cos x + i \sin x$ (formule d'Euler).

Corollaire.

La fonction $x \mapsto z(x) := e^{ix}$ est l'unique fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $z'(x) = iz(x)$ et $z(0) = 1$.

Théorème. (*Formule de Moivre*)

On a des "formules d'addition" résumées par la formule de Moivre :

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}.$$

Démonstration. La fonction $Z(x) := (e^{ia})^{-1} e^{i(a+x)}$ vérifie $Z(0) = 1$ et $Z' = iZ$; on a donc $Z(x) = e^{ix}$. $\square$

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont évidemment indéfiniment dérivables (voir les exercices).

On montre l'existence d'un réel positif (célèbre) $\pi \approx 3,14$ tel que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de plus petite période strictement positive 2π . On a donc $e^{2i\pi} = 1$, donc, d'après la formule de Moivre, $(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1$, donc $e^{i\pi} = \pm 1$. Si l'on avait $e^{i\pi} = 1$, les fonctions $\cos$ et $\sin$ auraient la période π (toujours d'après la formule de Moivre), ce qui n'est point. On en tire la jolie formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1.$$

Lemme.

On a $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Autrement dit : $\forall x \in \mathbf{R}, e^{ix} \in \mathbf{U}$.

Démonstration. La dérivée de $\cos^2 + \sin^2$ est $2\cos\cos' + 2\sin\sin' = 0$, c'est donc une fonction constante. Sa valeur en 0 est 1.

L'application $x \mapsto (\cos x, \sin x)$ est donc à valeurs dans le cercle unité $\mathbf{U}$. En conséquence, les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont à valeurs dans $[-1, 1]$.

Puisque $|e^{ix}| = 1$ et que $e^{-ix} = (e^{ix})^{-1}$ (cela découle de la formule de Moivre), on voit que e^{-ix} est le conjugué de e^{ix} (les complexes $z \in \mathbf{U}$ sont tels que $z^{-1} = \bar{z}$), donc $\cos(-x) = \cos x$ (fonction paire) et $\sin(-x) = -\sin x$ (fonction impaire).

Variations. Puisque les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, il suffit de les étudier sur le segment $[-\pi, \pi]$ par exemple. Puisqu'elles sont respectivement paire et impaire, il suffit de les étudier sur le segment $[0, \pi]$. Sur ce segment, la fonction $\cos$ est strictement décroissante de $\cos 0 = 1$ à $\cos \pi = -1$, points en lesquels la tangente est horizontale; et la fonction $\sin$ est croissante de $\sin 0 = 0$ à $\sin \pi/2 = 1$ (point en lequel elle a une tangente horizontale) puis décroissante de $\sin \pi/2 = 1$ à $\sin \pi = 0$. Enfin, on a $\sin(x + \pi/2) = \cos x$: les deux graphes sont donc "déphasés". On a enfin les relations $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (conséquences de la formule de Moivre et de la jolie formule d'Euler). On peut en déduire un grand nombre de propriétés de symétrie des deux graphes.

Théorème.

(i) L'application $x \mapsto e^{ix}$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$.

(ii) Deux réels ont même image si, et seulement s'ils sont congrus modulo 2π .

Démonstration. (i) Soit $(a, b) \in \mathbf{U}$. Puisque $a^2 + b^2 = 1$, on a $-1 \leq a \leq 1$, et il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos x = a$. Alors $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\sqrt{1 - a^2}$, d'où $\sin x = \pm b$. Si $\sin x = b$, on a trouvé l'antécédent x ; sinon, si $\sin x = -b$, on a l'antécédent $-x$.

(ii) D'après la formule de Moivre, il suffit de prouver que $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbf{Z}$. Si l'on note u l'unique représentant u de $x \pmod{2\pi}$ dans $[0, 2\pi[$, on a $x \in 2\pi\mathbf{Z} \Leftrightarrow u = 0$ et $e^{iu} = e^{ix} = 1$. Il est clair que $u = 0 \Rightarrow e^{ix} = 1$. Réciproquement, si $e^{ix} = 1$, les formules de Moivre entraînent que $e^{i(\theta+u)} = e^{i\theta}$, i.e. que u est une période positive pour $\cos$ et $\sin$. Comme $u < 2\pi$, cela n'est possible (par définition de π) que si $u = 0$. $\square$

En principe, ayant rigoureusement fondé l'étude des fonctions circulaires, il faudrait rétablir le lien avec le cercle. Il s'agit en fait de démontrer que la longueur de l'arc de cercle qui va de $(1, 0)$ à $(\cos x, \sin x)$ est x (on prend ici $x \in [0, \pi]$). Ce sera fait en L2.

La fonction tangente. Il s'agit de la fonction $\tan := \frac{\sin}{\cos}$. Elle est définie et indéfiniment dérivable là où $\cos$ ne s'annule pas, donc sur $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$, autrement dit sur $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$. Comme $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$, on a $\tan(x + \pi) = \tan x$ et la fonction $\tan$ est périodique de période π . On peut donc l'étudier sur l'intervalle ouvert $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Ses limites aux bornes sont : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\pi/2 \\ x > -\pi/2}} \tan x = -\infty$ et

$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x = +\infty$. Sa dérivée est : $\tan' = \frac{\sin' \cos - \cos' \sin}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$. La fonction

$\tan$ réalise donc une bijection strictement croissante de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbf{R}$. Puisque $\sin$ est impaire et $\cos$ paire, $\tan$ est impaire.

Valeurs spéciales. Les valeurs suivantes sont à connaître par coeur :

$$\begin{array}{lll}
 \cos 0 & = & 1, & \sin 0 & = & 0, & \tan 0 & = & 0, \\
 \cos \pi/6 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin \pi/6 & = & \frac{1}{2}, & \tan \pi/6 & = & \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
 \cos \pi/4 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \pi/4 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tan \pi/4 & = & 1, \\
 \cos \pi/3 & = & \frac{1}{2}, & \sin \pi/3 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \pi/3 & = & \sqrt{3}, \\
 \cos \pi/2 & = & 0, & \sin \pi/2 & = & 1, & \tan \pi/2 & = & \textbf{BOUM}.
 \end{array}$$

Développements limités. On a les développements limités à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 \cos(a+h) &= \cos a - h \sin a + h\epsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1(h) = 0, \\
 \sin(a+h) &= \sin a + h \cos a + h\epsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2(h) = 0, \\
 \tan(a+h) &= \tan a + \frac{h}{\cos^2 a} + h\epsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_3(h) = 0.
 \end{aligned}$$

Exercice: Calculer la dérivée k^e de $\cos x$, de $\sin x$, de $\cos x \sin x$.

Exercice: Reconnaître toutes les symétries des graphes de $\cos$, $\sin$ et $\tan$.

2.2.2 Fonctions circulaires inverses

La fonction arc-sinus. La fonction sinus est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Sa dérivée sur $] -\pi/2, \pi/2[$ est $\cos$, qui est strictement positive sur cet intervalle ouvert. La fonction sinus réalise donc une bijection strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.

Définition: La fonction *arc-sinus* est l'application réciproque de la bijection $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. On la note $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$. Pratiquement :

$$\forall x \in [-1, 1], \arcsin x = y \iff x = \sin y \text{ et } y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

La fonction $\arcsin$ est donc une bijection strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. C'est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Soit en effet $y := \arcsin x$. On a donc $x = \sin y$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, d'où $\cos y \geq 0$. Comme $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, connaissant le signe, on peut calculer :

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

En revanche, puisque la dérivée de $\sin$ s'annule aux bornes $\pm\pi/2$ du segment étudié, sa fonction réciproque $\arcsin$ n'est pas dérivable aux bornes ± 1 du segment image.

La fonction arc-cosinus. La fonction cosinus est continue sur $[0, \pi]$. Sa dérivée sur $]0, \pi[$ est $-\sin$, qui est strictement négative sur cet intervalle ouvert. La fonction cosinus réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition: La fonction *arc-cosinus* est l'application réciproque de la bijection $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. On la note $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Pratiquement :

$$\forall x \in [-1, 1] \text{ , } \arccos x = y \iff x = \cos y \text{ et } y \in [0, \pi] .$$

La fonction $\arccos$ est donc une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. C'est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée :

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Soit en effet $y := \arccos x$. On a donc $x = \cos y$ et $y \in [0, \pi]$, d'où $\sin y \geq 0$. Comme $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, connaissant le signe, on peut calculer :

$$\sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2} .$$

En revanche, puisque la dérivée de $\cos$ s'annule aux bornes $0, \pi$ du segment étudié, sa fonction réciproque $\arccos$ n'est pas dérivable aux bornes ± 1 du segment image.

Signalons enfin la formule :

$$\forall x \in [-1, 1] \text{ , } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} .$$

On prouve cette formule en dérivant le membre gauche et en l'évaluant en 0.

La fonction arc-tangente. La fonction tangente est continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$ et sa dérivée est $1 + \tan^2$, qui est strictement positive. La fonction tangente réalise donc une bijection strictement croissante de l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image, qui est $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$, d'après les calculs de limites de la page 31.

Définition: La fonction *arc-tangente* est l'application réciproque de la bijection $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbf{R}$. On la note $\arctan : \mathbf{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$. Pratiquement :

$$\forall x \in \mathbf{R} \text{ , } \arctan x = y \iff x = \tan y \text{ et } y \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

La fonction $\arctan$ est donc une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. C'est une fonction continue dérivable et sa dérivée est donnée par la formule :

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{(1 + \tan^2)(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2} .$$

En effet, on a toujours $\tan(\arctan x) = x$. Enfin, la fonction $\tan$ étant impaire de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbf{R}$, il en est de même de la fonction $\arctan$.

Valeurs spéciales. Les valeurs suivantes sont à connaître par cœur :

$$\begin{array}{lll} \arccos 1 & = & 0, & \arcsin 0 & = & 0, & \arctan 0 & = & 0, \\ \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} & = & \pi/6, & \arcsin \frac{1}{2} & = & \pi/6, & \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} & = & \pi/6, \\ \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} & = & \pi/4, & \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} & = & \pi/4, & \arctan 1 & = & \pi/4, \\ \arccos \frac{1}{2} & = & \pi/3, & \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} & = & \pi/3, & \arctan \sqrt{3} & = & \pi/3, \\ \arccos 0 & = & \pi/2, & \arcsin 1 & = & \pi/2. \end{array}$$

Développements limités. On a les développements limités à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \arccos(a+h) &= \arccos a - \frac{h}{\sqrt{1-a^2}} + h\epsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1(h) = 0, \\ \arcsin(a+h) &= \arcsin a + \frac{h}{\sqrt{1-a^2}} + h\epsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2(h) = 0, \\ \arctan(a+h) &= \arctan a + \frac{h}{1+a^2} + h\epsilon_3(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_3(h) = 0. \end{aligned}$$

Exercice: Tracer les graphes de arcsin, arccos et arctan.

Exercice: Calculer $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\arctan(\tan x)$, $\arcsin(\cos x)$ et $\arccos(\sin x)$.

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition: Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont respectivement définies par les formules :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les propriétés suivantes se déduisent alors immédiatement des propriétés de la fonction exponentielle. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont continues dérivables sur $\mathbf{R}$. La fonction cosh est paire et strictement positive sur $\mathbf{R}$. La fonction sinh est impaire, strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$. Chacune admet l'autre pour dérivée :

$$\cosh' = \sinh \text{ et } \sinh' = \cosh.$$

Il en découle que cosh est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ avec un minimum strict $\cosh 0 = 1$; alors que sinh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On a les limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty.$$

On a les formules : $\cosh x + \sinh x = e^x$ et $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, d'où l'on tire :

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1.$$

Définition: La fonction *tangente hyperbolique* est définie par la formule :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Elle est définie, continue dérivable sur $\mathbf{R}$, c'est une fonction impaire et sa dérivée vaut : $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$. Elle est donc strictement croissante. ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement -1 et $+1$. elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $] -1, +1[$.

Exercice: Tracer les graphes de $\cosh$, de $\sinh$ et de $\tanh$.

2.3.2 Fonctions hyperboliques inverses

La fonction $\sinh$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, la fonction $\cosh$ une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et la fonction $\tanh$ une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $] -1, +1[$.

Définition: La fonction *argument du sinus hyperbolique* est la réciproque de $\sinh$: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On la note $\operatorname{argsinh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. La fonction *argument du cosinus hyperbolique* est la réciproque de $\cosh$: $\mathbf{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$. On la note $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}_+$. La fonction *argument de la tangente hyperbolique* est la réciproque de $\tanh$: $\mathbf{R} \rightarrow] -1, +1[$. On la note $\operatorname{argtanh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Pour calculer $\operatorname{argsinh} x$ et $\operatorname{argcosh} x$, on résout les équations $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$ et $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$ (cette dernière avec de plus l'hypothèse $x \geq 1$ et la condition $y \geq 0$) ; il suffit pour cela d'introduire l'inconnue auxiliaire $Y := e^y$, qui est elle-même solution d'une équation du second degré. On trouve :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ et } \forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Le calcul des dérivées, soit comme dérivées de fonctions réciproques, soit à partir des formules ci-dessus, donne :

$$\forall x \in \mathbf{R}, (\operatorname{argsinh})'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ et } \forall x \in [1, +\infty[, (\operatorname{argcosh})'x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

De manière analogue, on trouve, pour tout $x \in] -1, +1[$:

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ et } (\operatorname{argtanh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice: Tracer les graphes de $\operatorname{argcosh}$, de $\operatorname{argsinh}$ et de $\operatorname{argtanh}$.

Module UE2 : Quatrième feuille de TD

Fonctions usuelles

Exercice 1

La méthode de résolution approchée d'Euler appliquée comme dans le cas de l'exponentielle donne la valeur approchée :

$$e^{ix} \approx (1 + ix/n)^n.$$

Cette formule peut être rigoureusement justifiée, mais c'est un peu compliqué. (On peut montrer que, pour tout x réel, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + ix/n)^n = e^{ix}$.)

Exercice 2

Étudier la fonction $\cot := \frac{\cos}{\sin}$.

Exercice 3

Calculer $\tan(a \pm b)$, $\tan(2a)$ et $\tan \pi/8$.

Exercice 4

Calculer $\arctan x + \arctan y$.

Exercice 5

Étudier les solutions de l'équation $\tan x = x$.

Exercice 6

Exprimer $\cosh(a + b)$ et $\sinh(a + b)$ en fonction de $\cosh a$, $\sinh a$, $\cosh b$ et $\sinh b$. (Passer par l'intermédiaire des exponentielles.) En déduire l'expression de $\tanh(a + b)$ en fonction de $\tanh a$ et $\tanh b$.

Exercice 7

Calculer $\sinh(\operatorname{argcosh} x)$, $\cosh(\operatorname{argsinh} x)$ et $\operatorname{argcosh}(\cosh x)$.