# Calcul Différentiel

**Exercice 1** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

1. Déterminer $O = f(\mathbb{R}^2)$. $f$ est elle une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $O$ ?
2. Montrer que $f$ est un difféomorphisme local de classe $C^1$. Est-ce un difféomorphisme global ?

**Exercice 2** 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (xy, x + y)$.

   (a) Montrer que $f$ est injective sur $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\}$.

   (b) Montrer que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ de $O$ sur son image que l'on déterminera.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (xyz, xy + yz + xz, x + y + z)$.

   (a) Montrer que $f$ est injective sur $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x < y < z\}$. (On pourra considérer le polynôme $P(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$).

   (b) Montrer que $f$ est un difféormorphisme de classe $C^1$ de $O$ sur son image, sans la déterminer.

**Exercice 3** Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ telle que $\exists k > 0, \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^n$, $Df(x) \in \text{Isom }(\mathbb{R}^n)$
2. Montrer que $f$ est injective
3. Montrer que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$
4. Montrer que $f$ est surjective. (On pourra utiliser la connexité de $\mathbb{R}^n$). Que peut-on en conclure ?

**Exercice 4** Soient $E$ un espace de Banach, $k$ une constante et $g : E \longrightarrow E$ de classe $C^1$ telle que $\|Dg(x)\| \leqslant k < 1$ pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = x + g(x), x \in E$.

1. Montrer que $f$ est un $C^1$-difféomorphisme local de $E$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant (1 - k)\|x - y\|$. En déduire que $f$ est injective.
3. Soit $y_0 \in E$; montrer à l'aide du théorème du point fixe qu' il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y_0$. Conclure.
4. On suppose $E$ de dimension finie et que sa norme provient d'un produit scalaire. Soient $y_0 \in E$ et $u(x) = \|f(x) - y_0\|^2$, $x \in E$. Montrer que $\lim_{\|x\| \to \infty} u(x) = +\infty$ et en déduire que $u$ atteint son minimum en un point $x_0 \in E$. Montrer que $u$ est de classe $C^1$ et calculer $Du(x)$ pour $x \in E$. En déduire que $f(x_0) = y_0$. Retrouver le résultat du 3.

**Exercice 5** Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = -g(1) = 1$. Donner une condition suffisante pour que le système

$$\begin{cases} f(xy) + g(yz) = 0 \\ g(xy) + f(yz) = 0 \end{cases}$$

admette une solution unique de la forme

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

au voisinage du point $(1, 1, 1)$. Que peut on dire de $\varphi$ et $\psi$?

**Exercice 6** On considère l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x-y} = 1 + x + y\}$. Montrer qu' au voisinage de $(0, 0)$, les points de $\Gamma$ vérifient une équation de la forme $y = \varphi(x)$, avec $\varphi$ de classe $C^2$. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$.

**Exercice 7** On considère l'espace vectoriel normé $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f(x) \mid + \sup_{x\in\mathbb{R}} \mid f'(x) \mid$ . On définit $\phi : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\phi(f, x) = f(x)$.

1. Montrer que $\phi$ est de classe $C^1$ sur $E \times \mathbb{R}$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer qu'on peut résoudre $\phi(f, x) = 0$ au voisinage d'un point $(f_0, x_0)$ tel que $f_0'(x_0) \neq 0$ en $x = \theta(f)$.
3. Montrer que $\theta$ est différentiable sur un voisinage de $f_0$ et calculer sa différentielle.

**Exercice 8** Soit $E$ un espace de Banach et $L(E)$ l'algèbre des applications continues de $E$ dans lui-même.

1. Soit $n$ un entier strictement positif et $\delta_n$ l'application de $L(E)$ définie par $\delta_n(u) = u^n$.
   (a) Montrer que $\delta_n$ est différentiable sur $L(E)$ et calculer sa différentielle.
   (b) Etablir, pour tout $h \in L(E)$, l'inégalité :
   $$\| D\delta_n(u).h \| \leqslant n \| u^{n-1} \| \| h \| .$$
2. $\exp u$ désigne la somme de la série normalement convergente de terme général $\frac{u^n}{n!}$ .
   (a) Montrer que la serie de terme général $\frac{1}{n!} D\delta_n(u)$ converge uniformément vers un élément de $L(L(E), L(E))$ pour $\| u \| \leqslant M$.
   (b) Etablir que exp est différentiable sur $L(E)$ et calculer $D\exp(0)$.
   (c) En considérant l'application $F_u : \mathbb{R} \to L(E)$ définie par $F_u(t) = \exp(tu)$ montrer que $\exp u \in \mathrm{Isom}(E)$.
3. On note $\ln u$ la somme de la série de terme général $-\frac{(id-u)^n}{n}$ pour $u \in V = \{u \in L(E), \| u - id \| < 1\}$.
   (a) Montrer que ln est de classe $C^1$ sur $V$ et que $D\ln(u).h = u^{-1}.h$ pour $u \in V$ et $h \in L(E)$.
   (b) En déduire que $\ln \exp u = u$ dans un voisinage de 0