CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LICENCE DE MATHÉMATIQUES ANNÉES 2000-2004

Georges COMTE

Laboratoire J. A. Dieudonné,
UMR CNRS 6621,
Université de Nice-Sophia Antipolis,
28, avenue de Valrose,
06108 Nice Cedex 2,
e-mail : comte@math.unice.fr
bureau : 821

I - CALCUL DIFFÉRENTIEL

II - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

III - EXAMENS ET PARTIELS

I - Calcul Différentiel

Introduction

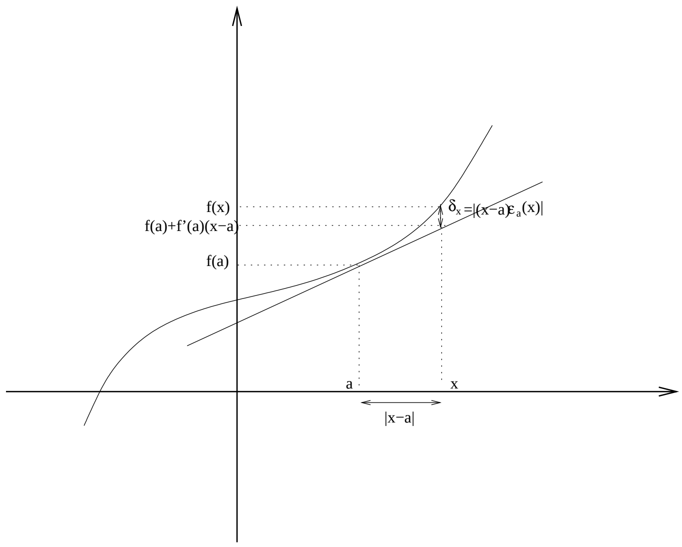
Nous commençons par des rappels sur la notion de dérivée, et tout d'abord dans le cas le plus simple des fonctions à variables et valeurs réelles (le cas des fonctions à variables et valeurs complexes est plus spécifiquement traité dans le cours de variable complexe.)

Définition (fonction réelle dérivable). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est *dérivable en* $a \in I$ ssi le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, admet une limite lorsque x tend vers a dans $I \setminus \{a\}$. Cette limite, comme toute limite de fonction si elle existe est alors unique; on la note $f'(a)$. Il s'agit d'un nombre réel. On dit que $f'(a)$ est *la dérivée de* f *en* a. Si f est dérivable en tout point a de I, on en déduit une fonction $I \ni a \mapsto f'(a) \in \mathbb{R}$, appelée *la fonction dérivée de* f.

Remarquons que dire que f est dérivable en a équivaut à dire qu'il existe un réel $f'(a)$ (qui s'avère être unique en tant que limite), tel que la fonction $I \setminus \{a\} \ni x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)}[f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)] \in \mathbb{R}$ tende vers 0 lorsque x tend vers a. Ceci revient encore à dire qu'il existe un réel $f'(a)$ (qui s'avère être unique) et une fonction $\epsilon_a : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers a tels que :

$$\text{pour tout } x \in I : \ f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) = (x-a)\epsilon_a(x) \qquad (*).$$

Dans cette introduction, on se concentre sur l'aspect *géométrique* de la définition de la dérivabilité: le graphe de l'application $I \ni x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ est la partie de la droite Δ de $\mathbb{R}^2$ (au-dessus des abscisses $x \in I$) de pente $f'(a)$ et passant par $(a, f(a))$. Ce que nous apprend l'égalité $(*)$ sur la géométrie du graphe Γ de f au voisinage de $(a, f(a))$ est que la distance δ_x représentée sur la figure ci-dessous est de l'ordre de $|(x-a)\epsilon_a(x)|$, et donc tend vers 0 plus vite que $|x-a|$ (†). Autrement dit le graphe Γ vient "s'écraser" sur la droite Δ au point $(a, f(a))$.



(†) Soient u_1 et u_2 deux fonctions définies sur un intervalle I, $a \in I$ et supposons que u_2 ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x\to 0} u_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} u_2(x) = 0$. On dit alors que u_1 tend vers 0 plus vite que u_2 lorsque x tennd vers a ssi le rapport u_1/u_2 tend vers 0 en a.

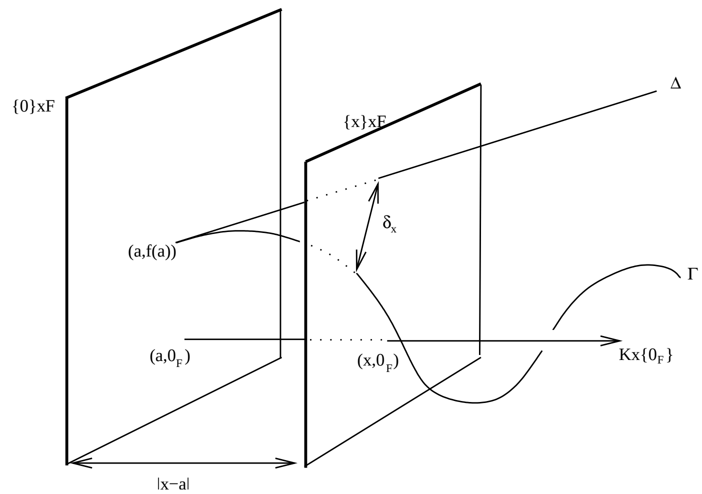
Considérons maintenant le cas un peu plus général des fonctions à variables dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque $(F, \| \ \|)$ (et de dimension quelconque) sur le corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{K}$ (ie par exemple un intervalle ouvert si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou un disque ouvert si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $a \in \Omega$. La définition ci-dessus de la dérivée d'une application réelle est transposable à la lettre dans ce nouveau contexte, puisque l'on dispose bien de la notion de limite dans l'espace normé F.

Définition. On dit que l'application $f : \Omega \to F$ est dérivable en a ssi la fonction $\Omega \setminus \{a\} \ni a \to \dfrac{1}{x-a}(f(x) - f(a)) \in F$ admet une limite en a dans F (nécessairement unique et notée $\vec{f'}(a)$), ou de façon équivalente ssi il existe un vecteur $\vec{f'}(a) \in F$ et une application $p_a : \Omega \to F$ de limite nulle en a, tels que :

$$\forall x \in \Omega; \quad f(x) - f(a) = (x-a).\vec{f'}(a) + |x-a|.p_a(x). \qquad (**)$$

Notons que la phrase $(**)$ généralise la phrase $(*)$, et que si $(**)$ est vérifiée, le membre de droite de l'égalité tend vers 0_F lorsque x tend vers a dans $\mathbb{K}$. On en déduit que $f(x)$ tend vers $f(a)$ dans F lorsque x tend vers a dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, **si f est dérivable en a, f est continue en a.**

L'interprétation géométrique de $(**)$ ressemble à celle de $(*)$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K} \times F$, normé (par exemple) par $\| \ \|_{\mathbb{K}\times F} = \max\{| \ |_{\mathbb{K}}, \| \ \|_F\}$, la courbe qui représente le graphe de f vient s'écraser sur la droite passant par $(a, f(a))$ et dirigée par $(1_{\mathbb{K}}, \vec{f'}(a))$ (cf la figure ci-dessous où $F = \mathbb{R}^2$).



Remarque. • Dans cette définition, la norme de F intervient (la notion de limite dépend a priori de la norme choisie sur F), la notion de dérivabilité et de dérivée en un point dépend donc a priori de la norme que
✓ l'on se donne sur F. Mais on verra (Théorème 0.5) que lorsque F est de dimension finie, la dérivabilité et la dérivée de f en un point sont indépendantes de la norme choisie.

• La définition de la dérivabilité $(**)$ n'a plus de sens dès que f est définie sur E, un espace vectoriel qui n'est pas le corps des scalaires, puisque dans ce cas le produit $(x-a).\vec{f'}(a)$ n'a plus de sens !

Le but de ce cours est de donner une notion pertinente de "dérivée", pour les applications à variables dans un espace vectoriel normé E de dimension > 1. Pour cela, on remarquera que l'application $\mathrm{L} : \mathbb{K} \ni x \mapsto x.\vec{f'}(a) \in F$ est linéaire, sur ce modèle on remplacera donc dans le cas général la définition $(**)$ par : " il existe une application linéaire $\mathrm{L}_a : E \to F$, une application $p_a : \Omega \to F$ qui tend vers 0_F lorsque sa variable tend vers 0_E, telles que :

$$\forall x \in \Omega, f(x) - f(a) = \mathrm{L}_a(x-a) + \|x-a\|_E.p_a(x-a)."$$

Cependant, lorsque la dimension de E est infinie, il se peut qu'une telle application linéaire L_a ne soit pas continue en 0_E, et donc que cette notion de dérivabilité n'implique pas même la continuité de f en a. On réclamera alors, dans la définition ci-dessus, afin qu'elle soit plus forte que la continuité de f en a, que l'application linéaire L_a soit continue.

Chapitre 0- Rappels d'algèbre multilinéaire et notion de graphe.

0.1- Continuité et algèbre multilinéaire.

On s'intéresse ici aux applications multilinéaires et à leur continuité éventuelle.

Définition (continuité dans les evn). Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux evn, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application. On dit que f est continue en a ssi :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \eta_\epsilon, \ \text{tel que } \forall x \text{ vérifiant } \|x - a\|_E \leq \eta_\epsilon, \ \text{on ait : } \|f(a) - f(x)\|_F \leq \epsilon. \qquad (*)$$

Clairement, la définition ci-dessus montre que la notion de continuité en un point dépend des normes que l'on se donne sur E et F.

Définition (applications multilinéaires). Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On dit qu'une application $\mathrm{L} : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est n-linéaire ssi L est linéaire sur chaque facteur, c'est-à-dire ssi pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}_j^a : & E_j & \to & F \\ & h & \mapsto & \mathrm{L}_j^a(h) = \mathrm{L}(a_1, \ldots, a_{j-1}, h, a_{j+1} \ldots, a_n) \end{array}$$

est linéaire.

Remarque. Lorsque $n = 1$, on retrouve la définition d'une application linéaire (1-linéarité).

Exemples. • L'application $\mathrm{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}(x, y) = xy$ (ie le produit de $\mathbb{R}$) est une application 2-linéaire (on dit bilinéaire) sur $\mathbb{R}$.

• L'application $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $L(\vec{h}, \vec{k}) = 3h_1k_1 - 5h_2k_2 + h_1k_2$, où $\vec{h} = (h_1, h_2)$ et $\vec{k} = (k_1, k_2)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet fixons $\vec{k} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'application $\mathrm{L}^{\vec{k}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{h} = (h_1, h_2) \mapsto \mathrm{L}^{\vec{k}}(\vec{h}) = \mathrm{L}(\vec{h}, \vec{k}) = 3h_1a - 5h_2k + h_1b$ est linéaire en $\vec{h}$ et pour $\vec{h} = (a, b)$ fixé dans $\mathbb{R}^2$ l'application $\mathrm{L}^{\vec{h}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{k} = (k_1, k_2) \mapsto \mathrm{L}^{\vec{h}}(\vec{k}) = \mathrm{L}(\vec{h}, \vec{k}) = 3ak_1 - 5bk_2 + ak_2$ est linéaire en $\vec{k}$.

• Soit $E = C_{00}$ l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et $\mathrm{L} : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j.v_j$ (cette somme est finie, car les suites $\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots,)$ et $\vec{v} = (v_0, v_1, \ldots,)$ sont nulles à partir d'un certain rang). L est bilinéaire.

On suppose maintenant que chaque espace vectoriel $E_1, \ldots, E_n, F$ de la définition ci-dessus est un espace vectoriel normé, par la norme (respectivement) : $|| \ ||_{E_1}, \ldots, || \ ||_{E_n}, || \ ||_F$. **On munit alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \ldots, \|x_n\|_{E_n}\}$.**

Exercice 1. *Montrer que $|| \ ||$ est bien une norme sur $E_1 \times \ldots \times E_n$. Montrer ensuite que cette norme est équivalente (au sens de la définition de la page suivante) aux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ définies par : $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum_i^n \|x_i\|_{E_i}$ et $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}^2}$. Dans le cas où $n = 2$ et $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, représenter la boule unité de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associée à la norme $|| \ ||$.*

Les espaces vectoriels $E_1 \times \ldots \times E_n$ et F étant normés, on peut se poser la question de la continuité d'une application multilinéaire $\mathrm{L} : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. On va voir (Théorème 0.1) que la continuité pour les applications multilinéaires est beaucoup plus simplement caractérisée que par la phrase $(*)$. Par exemple, dans le cas le plus simple où $n = 1$ et $E_1 = \mathbb{R}$, et $|| \ ||_{\mathbb{R}} = | \ |$ (la valeur absolue), il est très facile de démontrer que $\mathrm{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire ssi il existe un réel Λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{L}(x) = \Lambda x$. Dans ce cas on a alors : $\forall x, y \in \mathbb{R} : \ |\mathrm{L}(x) - \mathrm{L}(y)| = |\Lambda|.|x - y| \leq |\Lambda|.|x - y|$. C'est-à-dire que L est non seulement continue, mais de plus lipschitzienne.

Exercice 2. *Montrer que l'application bilinéaire* $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de l'exemple ci-dessus est une application qui vérifie : il existe un réel* $\Lambda \geq 0$ *tel que quel que soit* $(\vec{h}, \vec{k}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ $|\mathrm{L}(\vec{h}, \vec{k})| \leq \Lambda ||\vec{h}||_{\mathbb{R}^2}.||\vec{k}||_{\mathbb{R}^2} \leq \Lambda ||(\vec{h}, \vec{k})||^2$, $\|\ \|_{\mathbb{R}^2}$ *étant la norme euclidienne de* $\mathbb{R}^2$*. En déduire que* L *est continue.*

Remarque. Il n'est pas vrai en général qu'une application multilinéaire est automatiquement continue. Cependant on verra (Théorème 0.3**) que de tels cas n'existent que lorsque la dimension de l'espace de départ est infinie.** Par exemple l'application $\mathrm{L}(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j.v_j$ de l'exemple ci-dessus n'est pas continue pour le choix suivant de norme sur C_{00} : $\|\vec{u}\|_{C_{00}} = \sup_{j=0,\ldots,\infty} |u_j|$. En effet, considérons la suite (de suites !) $(\vec{u}_n = (\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}, 0, \ldots))_{n\in\mathbb{N}}$ (n apparitions de la quantité $1/\sqrt{n}$ dans $\vec{u}_n$). L'élément $\vec{U}_n = (\vec{u}_n, \vec{u}_n)$ de la suite $((\vec{u}_n, \vec{u}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $C_{00} \times C_{00}$ est de norme $||\vec{U}_n|| = \max(||\vec{u}_n||_{C_{00}}, ||\vec{u}_n||_{C_{00}}) = ||\vec{u}_n||_{C_{00}} = \max_{j=0,\ldots,\infty} |(\vec{u}_n)_j| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc la suite $(\vec{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0_{C_{00}\times C_{00}}$. Cependant $\mathrm{L}(\vec{U}_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = (n+1)/n$, et la suite $(\mathrm{L}(\vec{U}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Les théorèmes 0.3 et 0.1 qui suivent assurent que :

• les seuls exemples d'applications multilinéaires non continues se rencontrent en dimension infinie (c'est-à-dire lorsqu'au moins un des espaces $E_1, \ldots, E_n$ est de dimension infinie, la dimension de F en revanche ne joue pas).

• les applications n-linéaires continues vérifient le même type de propriété que l'application bilinéaire continue de l'exercice 2.

Nous donnons ces deux théorèmes sans preuve (on pourra trouver les preuves par exemple dans [Ra-De-Od], t. 3. (†))

Théorème 0.1. — *Soient* $E_1, \ldots, E_n, F$ *des espaces vectoriels normés et soit* $\mathrm{L} : E_1 \times \ldots E_n \to F$ *une application* n*-linéaire. On munit* $E_1 \times \ldots \times E_n$ *de la norme* $||(h_1, \ldots, h_n)|| = \max_{j=1,\ldots,n}(||h_1||_{E_1}, \ldots, ||h_n||_{E_n})$. *Les propriétés qui suivent sont équivalentes :*

i- L *est continue sur* $E_1 \times \ldots \times E_n$.
ii- L *est continue seulement en* $(0_{E_1}, \ldots, 0_{E_n})$.
iii- L *est bornée sur* $B_1 \times \ldots \times B_n$*, où* B_j *désigne la boule unité de* E_j.
iv- L *est bornée sur* $S_1 \times \ldots \times S_n$*, où* S_j *désigne la sphère unité de* E_j.
v- Il existe un réel $\Lambda > 0$*, tel que pour tout* $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$,

$$\|\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \Lambda.\|x_1\| \ldots \|x_n\|.$$

Exercice 3. *Vérifier que l'ensemble des applications* n*-linéaires de* $E_1 \times \ldots \times E_n$ *dans* F *est un espace vectoriel, ainsi que l'ensemble des applications* n*-linéaires continues de* $E_1 \times \ldots \times E_n$ *dans* F.

Définition. On note $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues (noter les rôles des **virgules** et du **point virgule** ! Les virgules séparent les espaces qui forment le produit de l'espace de départ, alors que le point virgule sépare les espaces définissantl'espace de départ $E_1 \times \ldots \times E_n$ de l'espace d'arrivée F). Pour tout $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, on pose :

$$\|\mathrm{L}\| = \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\setminus\{0\}\times\ldots\times E_n\setminus\{0\}} \frac{\|\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n)\|}{\|x_1\| \ldots \|x_n\|}$$

(†) [Ra-De-Od] : Ramis, Deschamps, Odoux. Cours de Mathématiques Spéciales. Masson Éd.

Noter que par multilinéairité :

$$\|\mathrm{L}\| = \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in B_1\setminus\{0\}\times\ldots\times B_n\setminus\{0\}} \frac{\|\mathrm{L}(x_1,\dots,x_n)\|}{\|x_1\|\dots\|x_n\|}$$

Exercice 4. *Montrer que* $||\mathrm{L}||$ *est une quantité qui est bien définie (ie* $||\mathrm{L}|| \neq \infty$*), en montrant que* $\|\mathrm{L}\| = \inf(\{\Lambda$ *vérifiant la propriété* v *du théorème* 0.1$\})$.

Théorème 0.2. — $\|\ \|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$.

Remarque. On a, par l'exercice 4, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\ldots\times E_n$,

$$\|\mathrm{L}(x_1,\dots,x_n)\|_F \leq \|\mathrm{L}\|.\|x_1\|_{E_1}\dots\|x_n\|_{E_n}.$$

Théorème 0.3. — *Si* $E_1,\dots,E_n$ *sont de dimensions finies, toute application* n*-linéaire* $\mathrm{L} : E_1\times\ldots\times E_n \to F$ *est continue (en particulier toute application linéaire qui part d'un espace de dimension finie est lipschitzienne (propriété* v *du théorème* 0.1*))*

Définition. On dit que deux normes $\|\ \|_1, \|\ \|_2$ définies sur un même espace vectoriel E sont équivalentes ssi il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ telles que pour tout $x\in E$: $\lambda\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \Lambda\|x\|_2$.

Exercice 5. *Lorsque deux normes sont équivalentes sur un espace vectoriel, montrer que pour ces normes les notions continuité de fonctions en un point et d'existence de limite de suites (ainsi que ces limites) sont les mêmes.*

Théorème 0.4. — *Toutes les normes de* E *sont équivalentes, lorsque* $\dim(E) < \infty$.

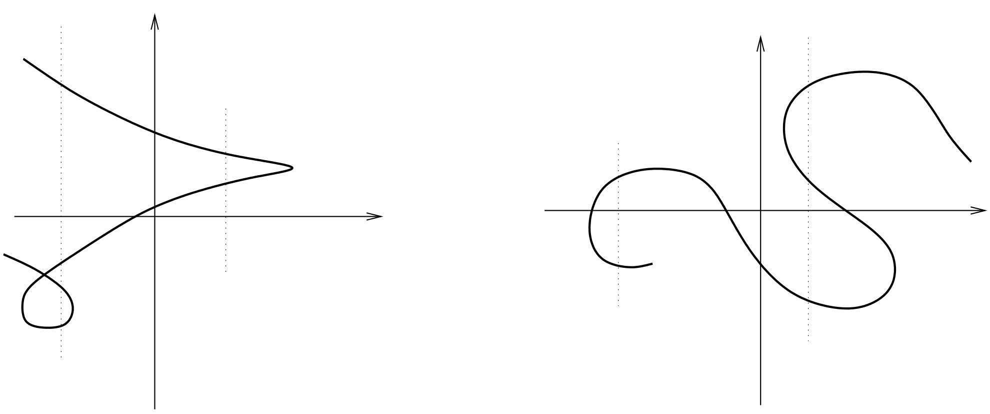
Preuve. Soient $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ deux normes de E. Les applications identité $Id : (E,\|\ \|_1) \to (E,\|\ \|_2)$ et $Id : (E,\|\ \|_2) \to (E,\|\ \|_1)$ sont continues par le Théorème 0.3, donc lipschitziennes par le Théorème 0.1.v. Il existe alors $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ tels que $\forall x \in E$, $\|x = Id(x)\|_2 \leq \lambda\|x\|_1$ et $\|x = Id(x)\|_1 \leq \Lambda\|x\|_2$. □

0.2- Graphe d'une application.

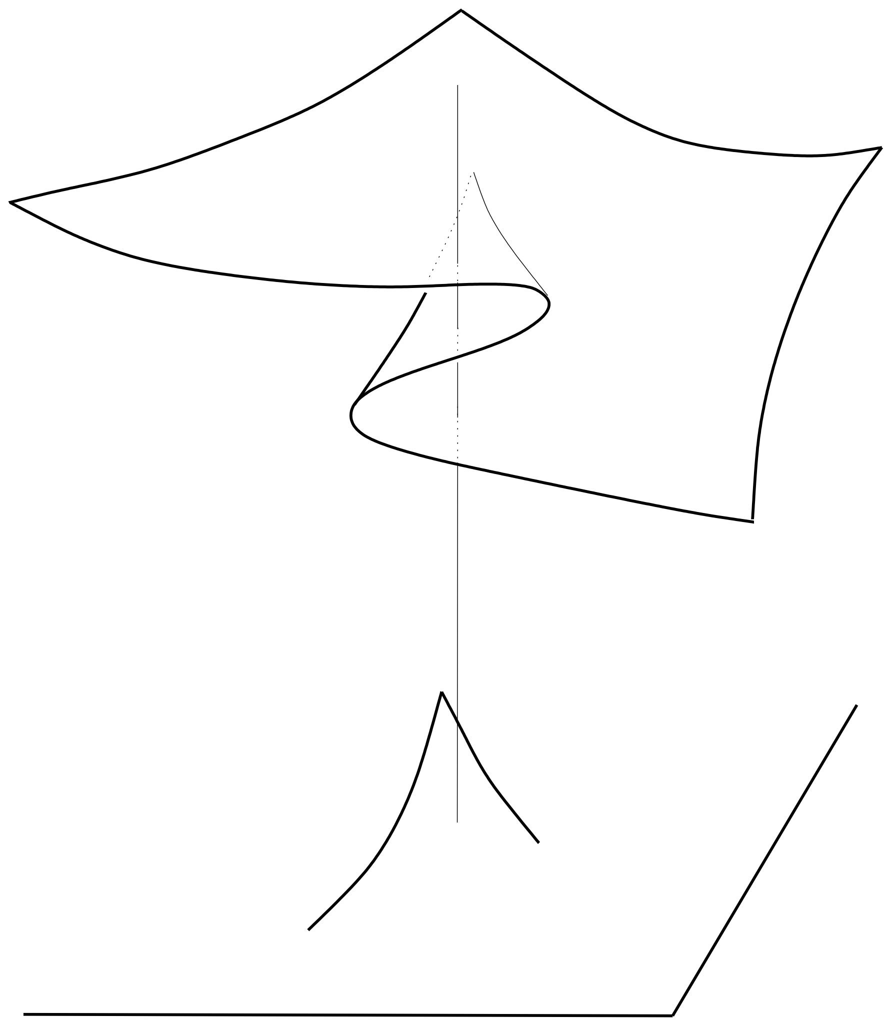
Définition. Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \in A\times B; a\in A\}$.

Remarquons que si $x\in A$, par définition d'une application, si $(x,y)\in\Gamma_f$ et $(x,z)\in\Gamma_f$, nécessairement $y = z = f(x)$ (x n'a qu'ne seule image par f).

Par exemple, si $A = B = \mathbb{R}$, $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants ne sont pas des graphes :



Et si $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}$, $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$. L'ensemble suivant n'est pas non plus un graphe :



Chapitre 1- Applications différentiables

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (par les normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$, que l'on notera chacune sans ambiguité $\| \ \|$), $\mathbb{K}$, le corps de base ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais que l'on prendra presque toujours égal à $\mathbb{R}$), $\Omega \subset E$ un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application.

1.1- Insuffisance de la dérivée suivant un vecteur.

Commençons par rappeler qu'une droite Δ de E qui passe par le point a est la donnée d'un vecteur non nul $\vec{h}$ de E qui appartient à Δ (par exemple $\vec{h}$ peut être choisi de norme 1). On a alors :

$$\Delta = \{x \in E \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } x = a + t\vec{h}\}.$$

On voit donc que Δ est en bijection avec $\mathbb{R}$ et qu'il y a autant de droite Δ passant par a que de vecteurs unitaires (c'est-à-dire appartenant à la sphère unité S_E de E, $S_E = \{x \in E, \|x\| = 1\}$), à condition d'identifier $\vec{h}$ et $-\vec{h}$, qui donne lieu à la même droite. On appelle l'ensemble des directions de droites de E *l'espace projectif de E*.

Pour définir une "bonne notion de dérivée" de f en a, généralisant la définition satisfaisante de dérivée des fonctions de variables scalaires ($t \in \mathbb{K}$), on essaie justement dans un premier temps de partir de la définition de la dérivée des fonctions de variables scalaires que l'on connait bien, en restreignant la fonction f aux droites de E qui passent par a. Cette restriction est faite naturellement grâce à l'application $\varphi_{(a,\vec{h})} : t \mapsto a + t \cdot \vec{h}$, que l'on compose avec f. On obtient alors autant de fonctions de variables sacalaires $f_{\vec{h}} = f \circ \varphi_{(a,\vec{h})}$ que de vecteurs unitaires $\vec{h}$ (autrement l'ensemble des fonctions $f_{\vec{h}}$ est en bijection avec S_E). Notons que $f_{\vec{h}}(0_{\mathbb{R}}) = f(a)$.

Pour chacune de ces fonctions de variables sacalaires $f_{\vec{h}}$ on peut poser la question de sa dérivabilité en $0_{\mathbb{R}}$. Si une telle dérivé existe, on l'appelle la *dérivée directionnelle de f en a suivant la direction $\vec{h}$.*

On va cependant voir que cette notion est bien insuffisante pour généraliser celle de dérivée, puisqu'il existe des fonctions qui admettent des dérivées directionnelles en a suivant toutes les directions de droites possibles, sans pour autant être continues en a (cf exemple ci-dessous) !

Nous reprenons maintenant plus formellement ce qui vient d'être dit.

Considérons $\vec{h} \in E$ et $\Delta_{(a,\vec{h})}$ le sous-espace affine de E de dimension 1, passant par a et dirigé par $\vec{h}$. Nous disposons de la paramétrisation de $\Delta_{(a,\vec{h})}$ par $\mathbb{K}$:

$$\varphi_{(a,\vec{h})} : \mathbb{K} \ni t \to a + t.\vec{h} \in \Delta_{(a,\vec{h})}$$

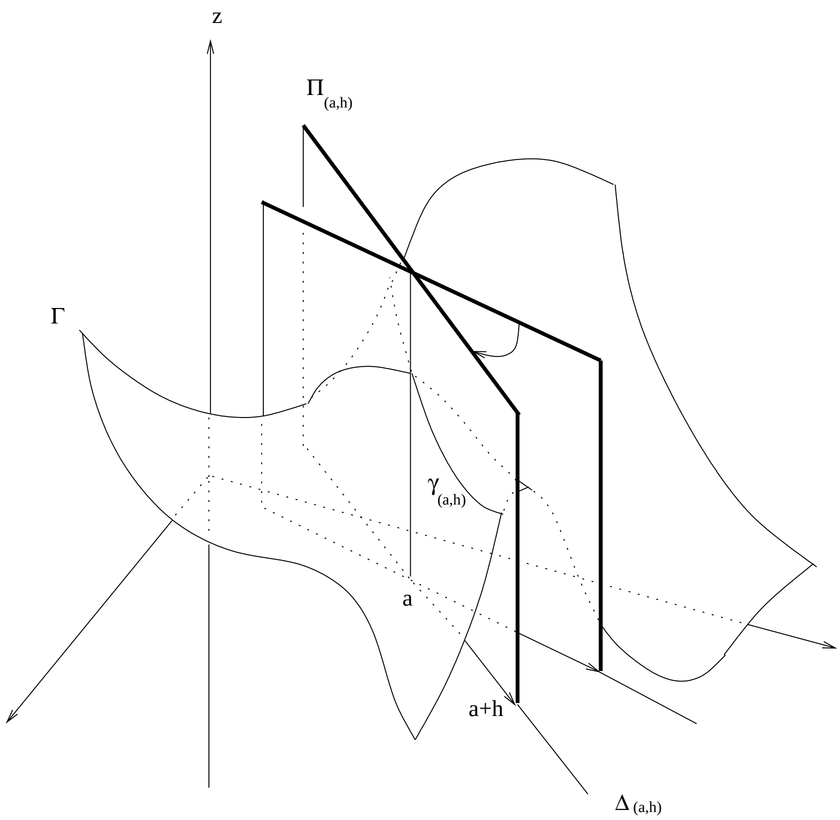
On considère alors la spécialisation de f sur la droite $\Delta_{a,\vec{h}}$:

$$\widetilde{f}_{(a,\vec{h})} : \mathbb{K} \ni t \xrightarrow{\varphi_{(a,\vec{h})}} a + t.\vec{h} \in \Delta_{(a,\vec{h})} \xrightarrow{f} f(a + t.\vec{h}) \in F$$

Définition. On dit que f admet au point a une dérivée directionnelle suivant la direction $\vec{h}$ ssi l'application $\widetilde{f}_{(a,\vec{h})}$ de variable scalaire est dérivable en $0 \in \mathbb{K}$.

Si cette dérivée existe, en tant que limite, elle est unique; on la note alors $D_{\vec{h}} f_{(a)}$.

Si par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, le graphe Γ de f est une surface de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Le graphe $\gamma_{(a,\vec{h})}$ de $\widetilde{f}_{(a,\vec{h})}$ est alors l'ensemble des points $(x, f(x))$ tels que $x \in \Omega \cap \Delta_{(a,\vec{h})}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de Γ au-dessus de $\Delta_{(a,\vec{h})} \cap \Omega$, ou encore $\Gamma \cap \Pi_{(a,\vec{h})}$, où $\Pi_{(a,\vec{h})}$ est le plan passant par $\Delta_{(a,\vec{h})}$ et parallèle à l'axe des z. Se poser la question de l'existence des dérivées directionnelles de f, c'est donc se poser la question de la dérivabilité de toutes ces fonctions dont les graphes sont les tranches verticales (le long de toutes les droites de E passant par a) du graphe de f.



Exemple. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) = z = x - y^2$. Cherchons les éventuelles dérivées directionnelles de f en $(0, 0)$. Soit $\vec{h} = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. $f((0, 0) + t\vec{h}) = ta - t^2b^2$. Cette fonction est dérivable en $t = 0$, quel que soit $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$, de dérivée $D_{\vec{h}}f_{(0,0)} = a$. f admet donc des dérivées directionnelles suivant toutes les directions $\vec{h}$.

Exemples importants. a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante: $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x}$, si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$. Cette fonction admet des dérivées directionnelles suivant toutes les directions à l'origine, cependant f n'est pas continue en $(0, 0)$. Soit en effet $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. $f((0, 0) + t\vec{h}) - f(0, 0) = f(ta, tb) = t^3b^3/ta$ si ✓ $a \neq 0$, et 0 si $a = 0$. Donc quel que soit $\vec{h}$, $D_{\vec{h}}f(0, 0)$ existe et vaut 0. Or la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = (t^3, t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en $t = 0$ et $\gamma(0) = (0, 0)$. Donc si f était continue en $(0, 0)$, $f \circ \gamma$ serait continue en 0. Mais $(f \circ \gamma)(t) = 1$ et $(f \circ \gamma)(0) = 0$: $\lim\limits_{t \to 0}(f \circ \gamma)(t) \neq (f \circ \gamma)(0)$ et f n'est pas continue en $(0, 0)$.

b) Exemple de fonctions non différentiable en un point, mais continue et admettant en ce point toutes ses dérivées directionnelles $D_{\vec{h}}\nu_{(a)}$ linéaires et continues par rapport à $\vec{h}$:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^4 + y^4} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ et } f(0, 0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \|(x, y)\|_2 \text{ si } y = x^2, \text{ et } f(0, 0) = 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

1.2- Différentielle en un point et sur un ouvert.

Comme on l'a vu au chapitre précédent, une fonction f peut admettre des dérivées directionnelles suivant toutes les directions possibles et ces dérivées peuvent être égales, sans que l'on obtienne pour son graphe la propriété d'approximation par un espace affine (aplatissement du graphe sur un espace affine), puisque la continuité de f n'est pas même assurée. Il faut par conséquent introduire une notion de dérivabilité plus globale que l'existence des dérivées directionnelles suivant toutes les directions, qui prenne en compte toutes les façons d'approcher un point dans E, et non pas seulement les chemins rectilignes: on va approcher f par une application linéaire.

Définition. On dit que f admet une différentielle (ou une différentielle totale) au point a ssi il existe une application linéaire continue $\mathrm{L}_a : E \to F$ et une application $p_a : \Omega \to F$ de limite nulle en a telles que:

$$\forall x \in \Omega; \quad f(x) - f(a) = \mathrm{L}_a(x-a) + \|x-a\| p_a(x).$$

On dit que f est différentiable sur Ω ssi f est différentiable en tout point de Ω.

Remarques. • A priori, si elles existent, les applications L_a et p_a ne sont pas nécessairement uniques,
✓ cependant si l'une d'entre elles est connue, l'autre l'est aussi. Par exemple p_a est uniquement déterminée sur $\Omega \setminus \{a\}$ par $\dfrac{1}{\|x-a\|}(f(x) - f(a) - \mathrm{L}_a(x-a))$, de sorte que si L_a est une application linéaire continue, L_a sera une différentielle de f en a ssi le rapport $\dfrac{1}{\|x-a\|}(f(x) - f(a) - \mathrm{L}_a(x-a))$ tend vers 0 lorsque x tend vers a.

• La notion de différentiabilité en un point dépend a priori du choix des normes $\| \, \|_E$ et $\| \, \|_F$. Cependant, si E et F sont de dimensions finies, toutes les normes respectivement de E et F sont équivalentes (Théorème 4); et si f est différentiable pour un choix de couple de normes, f le sera pour tout autre choix.(cf Exercice 9).

• Une application linéaire $\mathrm{L} : E \to F$, lorsque E est de dimension infinie, n'est pas nécessairement continue (par exemple, si C_{00} désigne l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang muni de la norme $\| \, \|_\infty$ et si L est définie par $\mathrm{L}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j$, la suite $X_p = (\frac{1}{\sqrt{p}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{p}}, 0, \ldots)$ (p fois) converge vers $0_{C_{00}}$, mais $\mathrm{L}(X_p)$ tend vers ∞. cf Chapitre 0). En revanche, lorsque $\dim(E) < \infty$, une application linéaire $\mathrm{L} : E \to F$ est nécessairement continue (Théorème 0.3).

✓ • **Aplatissement en $(a, f(a))$ du graphe de f sur un espace affine.** Le graphe de f est $\{(x, f(x)); x \in \Omega\}$. Le graphe de L_a est $\Gamma_{\mathrm{L}_a} = \{(h, \mathrm{L}_a(h)); h \in E\}$. Ce dernier est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ isomorphe par $\Psi : E \ni h \mapsto (h, \mathrm{L}_a(h)) \in \Gamma_{\mathrm{L}_a}$ à E (facile à vérifier). Le graphe de $g : E \ni x \mapsto f(a) + \mathrm{L}_a(x-a)$ est un sous espace affine de $E \times F$, de même direction que Γ_{L_a}, et passant par $(a, f(a))$. La distance, dans $E \times F$ muni de la norme $\| \, \| = \max(\| \, \|_E, \| \, \|_F)$, du point $(x, f(x))$ du graphe de f au point $(x, f(a) + \mathrm{L}_a(x-a))$ du graphe de g est : $\|f(x) - f(a) - \mathrm{L}_a(x-a)\|_F = \|x-a\|_E . p_a(x)\|_F$. Cette distance tend donc plus vite vers 0 que $\|x-a\|$, lorsque x tend vers a. Autrement dit le graphe de f au point $(a, f(a))$ s'aplatit bien sur l'espace affine $(a, f(a)) + \{(h, \mathrm{L}_a(h)); h \in E\}$ de $E \times F$.

• Une application linéaire est nécessairement définie sur E tout entier, donc L_a est définie sur E tout entier et non pas seulement sur Ω, comme l'est f.

• Dans le cas où $\dim(E) = 1$, les notions de différentiabilité en a et dérivabilité coïncident bien, puisque $\mathrm{L}_a : \mathbb{K} \ni t \to t.\vec{f}'(a) \in F$ est linéaire et continue (le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ est de dimension 1 sur lui-même)

• Il résulte immédiatement de la définition qu'une application linéaire continue f est différentiable en tout point de E ($\mathrm{L}_a = f$ et $p_a = 0$ conviennent), de même qu'une application constante est différentiable en tout point de E ($\mathrm{L}_a = 0$ et $p_a = 0$ conviennent).

Proposition 1.1. — *Les applications linéaires continues et les applications constantes sont différentiables en tous les points de E.* $\square$

Nous allons maintenant vérifier que la différentiabilité est une notion plus forte que l'existence des dérivées directionnelles suivant toutes les directions.

Lien avec les dérivées directionnelles. Supposons f différentiable en a. Pour t suffisamment petit, $a+t.\vec{h} \in \Omega$, puisque Ω est un ouvert de E, et nous pouvons alors écrire:

$$f(a+t.\vec{h}) - f(a) = t.\mathrm{L}_a(\vec{h}) + |t|.\|\vec{h}\|.p_a(a+t.\vec{h}),$$

de sorte qu'en faisant tendre t vers 0, on obtient l'existence de la dérivée directionnelle $D_{\vec{h}}f_{(a)}$, et l'égalité $\mathrm{L}_a(\vec{h}) = D_{\vec{h}}f_{(a)}$. D'où la proposition:

✓ **Proposition 1.2.** — *Si f est différentiable en a, f admet en a des dérivées directionnelles suivant toutes les directions, la différentielle L_a (et par conséquent l'application p_a) est unique, on la note alors $Df_{(a)}$ et on a l'égalité:*

$$Df_{(a)}(\vec{h}) = D_{\vec{h}}f_{(a)} \qquad (1).$$

✓ **Proposition 1.3.** — *Si f est différentiable en a, f est continue en a.*

Preuve. Pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = f(a) + Df_{(a)}(x-a) + \|x-a\|p_a(x)$, et comme $\lim\limits_{x\to a} p_a(x) = 0$, et $Df_{(a)}$ est continue en 0, on a bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. $\square$

On peut résumer l'exemple et les propositions 1.2 et 1.3 par le diagramme:

f différentiable en a $\quad \underset{\not\Longleftarrow}{\overset{Prop.1.2}{\Longrightarrow}} \quad$ f admet des dérivées directionnelles suivant toutes les directions

*Prop.*1.3 $\Downarrow \not\Uparrow$

f est continue en a

Remarque. Montrer qu'une application f est différentiable en un point, c'est à la fois trouver sa différentielle $Df_{(a)}$ et montrer que $\dfrac{1}{\|x-a\|}(f(x) - f(a) - Df_{(a)}(x-a))$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. La proposition 1.2 montre que trouver $Df_{(a)}(\vec{h})$ revient essentiellement à calculer une dérivée, puisque quel que soit $\vec{h} \in E$, $Df_{(a)}(\vec{h})$ (si elle existe) est la dérivée directionnelle $D_{\vec{h}}f_{(a)}$. Bien sûr, ce calcul doit être fait a priori pour tous les $\vec{h}$ de E, afin de déterminer $Df_{(a)}$ sur E tout entier. On va voir dans le paragraphe suivant que lorsque E est de dimension finie n, il suffit de calculer n dérivées directionnelles privilégiées (suivant les directions des vecteurs d'une base quelconque de E), pour connaître entièrement $Df_{(a)}$ (toujours si cette dernière existe).

1.3. Dérivées partielles.

Supposons E de dimension finie, et soit $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Cette base étant fixée, on peut écrire tout vecteur $\vec{h}$ de E sur les ĺéments de la base $\mathcal{E}$: $\vec{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j.\vec{e}_j$, où $h_j \in \mathbb{K}$. La formule (1) donne alors:

$Df_{(a)}(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{n} h_j.Df_{(a)}(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} h_j.D_{\vec{e}_j}f_{(a)}$. Donc si $Df_{(a)}$ existe, pour connaître cette application linéaire, il suffit de calculer n dérivées directionnelles (suivant les directions données par les vecteurs d'une base).

Proposition 1.4. — *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie n, $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, on note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ la dérivée directionnelle $D_{\vec{e}_j}f_{(a)}$. On l'appelle la j^{eme} dérivée partielle de f au point a, relativement à la base $\mathcal{E}$.*
Par définition de la dérivée directionnelle: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + t.\vec{e}_j) - f(a))$. On a de plus la formule:

✓ $$Df_{(a)}(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{n} h_j.\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \tag{2}$$

Calcul pratique. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est par définition la limite $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + t.\vec{e}_j) - f(a))$. La fonction $\mathbb{K} \ni t \mapsto f(a + t.\vec{e}_j) \in F$ est obtenue en fixant toutes les coordonnées de la variable de f, autre que la $j$ème, égales respectivement à $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ et en libérant la $j$ème, $a_j + t$ (t varie au voisinage de 0 dans $\mathbb{K}$); cette fonction est parfois appelée la $j$ème fonction partielle de f en a. $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ n'est alors rien d'autre que la dérivée en a_j (au sens des fonctions à variables réelles) de cette fonction partielle.

Exemples. • Calculons la deuxième dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y, z) = \sin(xy) - z/y^2$, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, au point $(1, 1, 1)$. Pour cela on fixe les premières et troisième coordonnées de (x, y, z) dans la base canonique et on libère la deuxième. On obtient la deuxième fonction partielle de f en $(1, 1, 1)$: $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(1, y, 1) = \sin(y) - 1/y^2$. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1)$ est la dérivée de cette fonction en $y = 1$, soit $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1) = \cos(1) + 2$.

• Soit E l'espace vectoriel des polynômes d'une seule variable et de degré ≤ 2. Cet espace est de dimension 3. Soit la base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = X, \vec{e}_3 = X^2)$ de E. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $E \ni P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \mapsto f(P) = \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_0)\alpha_2^3 \in \mathbb{R}$. Calculons la troisième dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{E}$ au point $Q = 1 + X^2$. La troisième application partielle de f en Q est: $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(Q + x.X^2) = f(1 + (1 + x)X^2) = \sin(1 + x) + \cos(1)(1 + x)^3$. Sa dérivée en $x = 0$ est donc $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_3}(Q) = 4.\cos(1)$.

1.4- Différentielles d'ordres supérieurs.

Encore des rappels d'algèbre multilinéaire. On note $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Rappelons que si une application linéaire L est continue, $\sup_{x\in E;\|x\|_E=1} \|\mathrm{L}(x)\|_F = \inf_{x\in E}\{\Lambda \in \mathbb{R}^+; \|\mathrm{L}(x)\|_F \leq \Lambda.\|x\|_E\} < \infty$, ce qui donne une norme sur $\mathcal{L}(E; F)$ (cf Chap. 0). Notons cette norme $\|\mathrm{L}\|$.

Exercice 6. *Cette norme est compatible avec la composition des applications linéaires, en ce sens qu'elle vérifie $\|\mathrm{L} \circ \mathrm{L}'\| \leq \|\mathrm{L}\|.\|\mathrm{L}'\|$.*

Rappelons que nous notons $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, l'espace des applications n-linéaires continues de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, muni de la norme $\| \ \| = \max\{\| \ \|_{E_1}, \ldots, \| \ \|_{E_n}\}$, à valeurs dans F. Si une telle application N est continue, $\sup_{x\in B_1\times\ldots\times B_n} \|N(x)\|_F = \inf_{x\in E}\{\Lambda; \|N(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq \Lambda.\|x_1\|_E \ldots \|x_n\|_E\} < \infty$. Ce qui donne une norme sur $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Remarquons que l'application:

$$\psi: \quad \mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;\ldots;\mathcal{L}(E_n;F)\ldots)) \quad \to \quad \mathcal{L}(E_1,E_2,\ldots,E_n;F)$$

définie par: $\psi[U](\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_n)=(\ldots(U(\vec{h}_1))(\vec{h}_2)\ldots)(\vec{h}_n)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels qui conserve la norme (une isométrie linéaire) (cf Exercice 10).

On identifiera ainsi $\mathcal{L}(E_1;\mathcal{L}(E_2;\ldots;\mathcal{L}(E_n;F)\ldots))$ et $\mathcal{L}(E_1,E_2,\ldots,E_n;F)$.

Exemple. Soit l'application linéaire $U:\mathbb{R}^2\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, définie par $U(x,y):\mathbb{R}^2\ni(a,b)\mapsto(U(x,y))(a,b)=ax+ay-bx+3by\in\mathbb{R}$. À (x,y) fixé, $(a,b)\mapsto(U(x,y))(a,b)$ est bien linéaire, et $(x,y)\mapsto U(x,y)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ est aussi linéaire. Avec les notations ci-dessus, $\psi(U)$ est l'application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ ($\psi(U)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$) définie par $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\ni((x,y),(a,b))\to\psi(U)((x,y),(a,b))=ax+ay-bx+3by$.

Considérons maintenant $f:\Omega\to F$ une application différentiable sur Ω. On dispose de $Df:\Omega\to\mathcal{L}(E;F)$. La question de la différentiabilité de Df en $a\in\Omega$ se pose donc, on notera la différentielle de Df en a par $D^2f_{(a)}$. Si Df est différentiable sur Ω, on dispose de $D^2f:\Omega\to\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))\simeq\mathcal{L}(E,E;F)$, et la question de la différentiabilité de cette application en a et sur Ω se pose encore etc...

Définition (différentielles d'ordres supérieurs). On dit que $f:\Omega\to F$ admet une différentielle d'ordre $k\geq1$, ou est k fois différentiable en $a\in\Omega$ (resp. sur Ω) ssi:

- Pour $k=1$: f est différentiable en a (resp. différentiable sur Ω).
- Pour $k>1$: f est $k-1$ fois différentiable sur Ω et si sa différentielle d'ordre $k-1$, $D^{k-1}f:\Omega\to\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;\ldots;\mathcal{L}(E;F)\ldots))\simeq\mathcal{L}(E,\ldots,E;F)$ est différentiable en a (resp. sur Ω).

Soit $n\geq1$. On dit que f est $\mathcal{C}^k$ ou de classe k en a (resp. sur Ω) ssi D^kf existe sur Ω et est continue en a, (resp. sur Ω).

On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ ssi f est $\mathcal{C}^k$, pour tout $k\geq1$, ou de façon équivalente, puisque la différentiabilité implique la continuité, que f admet des dérivées à tous les ordres.

Notations: Grâce à l'isomorphisme indiqué ci-dessus, on considèrera $D^kf_{(a)}$ comme une application k-linéaire, et on notera: $D^kf_{(a)}(\vec{h}_k,\ldots,\vec{h}_1)=(\ldots(D^kf_{(a)}(\vec{h}_k))\ldots)(\vec{h}_1)$.

1.5. Exemples d'applications différentiables.

Applications constantes. Les applications constantes sont différentiables, de différentielle nulle. De sorte que les applications constantes sont $\mathcal{C}^\infty$, et toutes leurs différentielles sont nulles.

Applications linéaires continues, multilinéaires continues. Une application linéaire est différentiable ssi elle est continue. En particulier, si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires $\mathrm{L}:E\to F$ sont continues et donc différentiables. De plus la différentielle d'une application linéaire continue est l'application linéaire elle-même.

On peut inclure ce résultat dans un résultat plus général: considérons $\mathrm{L}:E_1\times\ldots\times E_n\to F$ une application multilinéaire continue.

$$\mathrm{L}(a+\vec{h})-\mathrm{L}(a)=\mathrm{L}((a_1,\ldots,a_n)+(\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_n))-\mathrm{L}(a_1,\ldots,a_n)=$$

$$\mathrm{L}(\vec{h}_1,a_2\ldots,a_n)+\ldots+\mathrm{L}(a_1,\ldots,a_{n-1}+\vec{h}_n)+\mathrm{L}^*,$$

où L^* est une somme de termes du type $\mathrm{L}(*_1,\ldots,*_n)$, avec au moins deux h_j comme argument, et des a_k pour compléter. Or

$$(\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_n)\mapsto\mathrm{L}(\vec{h}_1,a_2\ldots,a_n)+\ldots+\mathrm{L}(a_1,\ldots,a_{n-1},\vec{h}_n)$$

est linéaire continue et $\|\mathrm{L}(*_1,\ldots,*_n)\|\leq\|\mathrm{L}\|\cdot\|\vec{h}\|^k\cdot(\max_j\|a_j\|)^{n-k}$, où $k(\geq2)$ est le nombre de composantes de $\vec{h}$ figurant dans $\mathrm{L}(*_1,\ldots,*_n)$. En notant $A=\max_k(\max_j\|a_j\|)^{n-k}$, on obtient : $\|\mathrm{L}(*_1,\ldots,*_n)\|\leq\|\mathrm{L}\|\cdot\|\vec{h}\|^k\cdot A$, avec $k \geq 2$. Enfin comme le nombre de termes du type $\mathrm{L}(*_1, \ldots, *_n)$ dans la somme L^* ne dépend que de n (il est égal à $2^n - 1 - n$), on a montré que $\|\mathrm{L}^*\| = \|\vec{h}\| \cdot \epsilon(\vec{h})$, avec $\epsilon(\vec{h}) \to 0$ quand $\vec{h} \to 0$. En résumé :

Proposition 1.5. — *Soient $E_1, \ldots E_n, F$, des espaces vectoriels normés, $n \geq 1$, et $\mathrm{L} : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue. Alors L est différentiable et sa différentielle est:*

$$\begin{array}{rccl} D\mathrm{L}_{(a)}: & E_1 \times \ldots \times E_n & \to & F \\ & (\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n) & \to & \mathrm{L}(\vec{h}_1, a_2 \ldots, a_n) + \ldots + \mathrm{L}(a_1, \ldots, a_{n-1}, \vec{h}_n), \end{array}$$

en particulier, si $n = 1$, L est linéaire et sa différentielle est elle-même. Ainsi $a \to D\mathrm{L}_{(a)}$ est constante, et donc $D^2\mathrm{L}_{(a)}$ est nulle. On en conclut qu'une application linéaire L est $\mathcal{C}^\infty$ et $D^k\mathrm{L}_{(a)} = 0$, pour tout $a \in E_1 \times \ldots \times E_n$ et $k \geq 2$.

Enfin, si $n > 1$, on constate que $D\mathrm{L}$ s'exprime à l'aide d'applications $(n-1)$-linéaires et donc on en conclut que L est $\mathcal{C}^\infty$ et $D^k\mathrm{L}_{(a)} = 0$ pour tout $a \in E_1 \times \ldots \times E_n$ et $k \geq n+1$.

Exercices du chapitre 1

Exercice 7. *Montrer la multilinéairité et la continuité des applications suivantes :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 2x - \pi y \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & ((x,y),(u,v)) & \to & (xu - 3xv, yu) \end{array}$$

Exercice 8. *Soient $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions dérivables à dérivées continues.*

$i-$ Montrer que

$$\| \ \|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et que

$$\| \ \|_0 : \ f \mapsto \|f\|_0 = \|f'\|_\infty + |f(0)| \text{ et } \| \ \|_1 : \ f \mapsto \|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f'| + |f(0)|$$

sont des normes sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

ii- Les applications suivantes sont-elles continues ?

$$\begin{array}{rccl} D: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty) \\ & f & \mapsto & D(f) = f' \end{array}, \quad \begin{array}{rccl} \mathcal{D}: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_0) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty) \\ & f & \mapsto & \mathcal{D}(f) = f' \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \delta: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_1) & \to & (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty) \\ & f & \mapsto & \Delta(f) = f' \end{array}, \quad \begin{array}{rccl} I: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_0) \\ & f & \mapsto & I(f) = f \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_1) & \to & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_0) \\ & f & \mapsto & \mathcal{I}(f) = f \end{array}, \quad \begin{array}{rccl} \iota: & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_1) \\ & f & \mapsto & \iota(f) = f \end{array}$$

Exercice 9. *Montrer que la notion de différentiabilité ne dépend pas du choix des normes, pas plus que la différentielle elle-même, lorsque les normes sont équivalentes.*

Exercice 10. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit Φ l'application définie par:*

$$\begin{array}{rcccccccccc} \Phi: & \mathcal{L}(E,E;F) & \to & \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)) & & & & & & & \\ & B & \mapsto & \Phi(B): & E & \to & \mathcal{L}(E;F) & & & & \\ & & & & x & \mapsto & \Phi(B)(x): & E & \to & F & \\ & & & & & & & y & \mapsto & \Phi(B)(x)(y) = B(x,y) & \end{array}$$

Montrer que Φ rèalise un isomorphisme linèaire entre $\mathcal{L}(E,E;F)$ et $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$ qui préserve la norme. Généraliser ce résultat.

Exercice 11. *En utilisant la définition de la différentielle d'une application en un point, calculer la différentielle en $(0,0)$ de l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = 1 + x\sqrt{y^2+2}$.*

Exercice 12. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = xy/z^2 \in \mathbb{R}$, lorsque $z \neq 0$, et $f(x,y,0) = 0$. Calculer les trois dérivées partielles de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, au point $(1,1,1)$. Montrer ensuite que f est différentiable en $(1,1,1)$. f est-elle différentiable en $(0,0,0)$?*

Exercice 13. *Soit E l'espace vectoriel des polynômes d'une seule variable réelle et de degré inférieur à 2. On le munit de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|$. Soit la base $\mathcal{E} = (1, 1+X, 1+X^2)$ de E et $f : E \ni P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \mapsto f(P) = \sin(\alpha_0\alpha_2)X - \cos(\alpha_2)X^2 \in E$. Calculer les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{E}$, au point $Q(X) = 1 + X^2$ et montrer que f est différentiable.*

Exercice 14. (Un peu de dimension infinie) *Soit $E = C_\infty$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, bornées. On le munit de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$. On définit $\Phi : E \to E$ par $\Phi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$*

i- En supposant Φ différentiable, calculer $D_{\vec{h}}\Phi_{((x_n)_{n\in\mathbb{N}})}$, pour $\vec{h} \in E$.

ii- Vérifier que l'application $\vec{h} \to D_{\vec{h}}\Phi_{((x_n)_{n\in\mathbb{N}})} = D\Phi_{((x_n)_{n\in\mathbb{N}})}(\vec{h})$ est continue.

iii- Montrer que Φ est différentiable et même $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15. (Toujours un peu de dimension infinie) *Soit $E = \ell^1$, l'espace des suites dont la série associée est absolument convergente. On le munit de la norme $\|\ \|_1$, définie par: $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.*

i- Déterminer l'ensemble des points de ℓ^1 en lesquels $\|\ \|_1$ admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur.

ii- Déterminer en quels points $\|\ \|_1$ est différentiable.

$(*)$ **Exercice 16. (Encore un peu de dimension infinie)** *Soit $E = C_0$ l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0, muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.*

Etudier la question de la différentiabilité de $\|\ \| : E \to \mathbb{R}_+$.

Corrigé des exercices du chapitre 1

Exercice 6. Soient $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(E;F)$ et $\mathrm{L}' \in \mathcal{L}(F;G)$ deux applications linéaires continues. Montrons que $\|\mathrm{L}' \circ \mathrm{L}\| \leq \|\mathrm{L}'\| \cdot \|\mathrm{L}\|$. Soit $x \in E$. On a par définition de $\|\mathrm{L}'\|$, $\|\mathrm{L}'(\mathrm{L}(x))\| \leq \|\mathrm{L}'\|.\|\mathrm{L}(x)\|$. Et par définition de $\|\mathrm{L}\|$, $\|\mathrm{L}(x)\| \leq \|\mathrm{L}\|.\|x\|$. On a donc finalement : $\|\mathrm{L}'(\mathrm{L}(x))\| \leq \|\mathrm{L}'\|.\|\mathrm{L}(x)\| \leq \|L'\|.\|\mathrm{L}\|.\|x\|$, ce qui implique : $\|\mathrm{L}' \circ \mathrm{L}\| \leq \|\mathrm{L}'\|.\|\mathrm{L}\|$ (cf Exercice 4, qui caractérise la norme des applications linéaires comme l'inf des constantes Λ du Théorème 0.1.v).

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ des normes $\|\ \|_\infty$, c'est-à-dire $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\|x\|\infty = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est **linéaire**. En effet, pour tous $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda(x,y) + \mu(u,v)) = f(\lambda x + \mu u, \lambda y + \mu v) = 2(\lambda x + \mu u) - \pi(\lambda y + \mu v)$$

$$= \lambda(2x - \pi y) + \mu(2u - \pi v) = \lambda f(x,y) + \mu f(u,v)\,.$$

De plus, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x,y)\| = |f(x,y)| = |2x - \pi y| \leq 2|x| + \pi|y| \leq (2+\pi)\|(x,y)\|_\infty,$$

ce qui prouve que f est **continue** par le **Théorème 0.1** ($v \Rightarrow i$), appliqué à $n = 1$, $E_1 = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $\Lambda = 2+\pi$.

L'application g est **bilinéaire**. En effet, pour tous $(x, y), (z, t), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(\lambda(x, y) + \mu(z, t), (u, v)) = g((\lambda x + \mu z, \lambda y + \mu t), (u, v)) = ((\lambda x + \mu z)u - 3(\lambda x + \mu z)v, (\lambda y + \mu t)u)$$

$$= \lambda(xu - 3xv, yu) + \mu(zu - 3zv, tu) = \lambda g((x, y), (u, v)) + \mu g((z, t), (u, v))$$

et

$$g((x, y), \lambda(u, v) + \mu(z, t)) = g((x, y), (\lambda u + \mu z, \lambda v + \mu t)) = (x(\lambda u + \mu z) - 3x(\lambda v + \mu t), y(\lambda u + \mu z))$$
$$= \lambda(xu - 3xv, yu) + \mu(xz - 3xt, yz) = \lambda g((x, y), (u, v)) + \mu g((x, y), (z, t)).$$

De plus, pour tous $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\|g((x, y), (u, v))\|_\infty = \max(|xu - 3xv|, |yu|)$$

$$\leq \max(|xu| + 3|xv|, |yu|) \leq \max[\|(x, y)\|_\infty.\|(u, v)\|_\infty + 3\|(x, y)\|_\infty.\|(u, v)\|_\infty), \|(x, y)\|_\infty.\|(u, v)\|_\infty)]$$
$$\leq 4.\|(x, y)\|_\infty.\|(u, v)\|_\infty,$$

ce qui prouve que g est **continue** par le **Théorème 0.1** ($v \Rightarrow i$), appliqué à $n = 2$, $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $\Lambda = 5$.

En fait, comme $\mathbb{R}$ est de **dimension finie**, toutes les normes sur $\mathbb{R}$ sont **équivalentes**, (de même sur $\mathbb{R}^2$) et f et g sont donc continues pour **toutes** les normes possibles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. $i-$ $\|\ \|_\infty$ est une norme car, pour toutes les fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
(1) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1],\ |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1],\ f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$
(2) $\|\lambda f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}|\lambda f(x)| = \max_{x\in[0,1]}|\lambda||f(x)| = |\lambda|\max_{x\in[0,1]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty$
(3) $\|f + g\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}|f(x) + g(x)| \leq \max_{x\in[0,1]}|f(x)| + |g(x)| \leq \max_{x\in[0,1]}|f(x)| + \max_{y\in[0,1]}|g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|\ \|_0$ est une norme car, pour toutes les fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
(1) $\|f\|_0 = 0 \Leftrightarrow (\|f'\|_\infty = 0 \text{ et } f(0) = 0) \Leftrightarrow (f' = 0 \text{ et } f(0) = 0) \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1],\ f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} f' = 0 \Leftrightarrow f = 0$
(2) $\|\lambda f\|_0 = \|\lambda f'\|_\infty + |\lambda f(0)| = |\lambda|\|f'\|_\infty + |\lambda||f(0)| = |\lambda|\|f\|_0$
(3) $\|f + g\|_0 = \|f + g\|_\infty + |f(0) + g(0)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + |f(0)| + |g(0)| = \|f\|_0 + \|g\|_0$

$\|\ \|_1$ est une norme car, pour toutes les fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
(1) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow (\int_{[0,1]} |f'| = 0 \text{ et } f(0) = 0) \Leftrightarrow (|f'| = 0 \text{ et } f(0) = 0) \Leftrightarrow (f' = 0 \text{ et } f(0) = 0) \Leftrightarrow \|f\|_0 = 0 \Leftrightarrow f = 0$
(2) $\|\lambda f\|_1 = \int_{[0,1]} |\lambda f'| + |\lambda f(0)| = |\lambda| \int_{[0,1]} |f'| + |\lambda||f(0)| = |\lambda|\|f\|_1$
(3) $\|f + g\|_1 = \int_{[0,1]} |f' + g'| + |f(0) + g(0)| \leq \int_{[0,1]}(|f'| + |g'|) + |f(0)| + |g(0)| = \|f\|_1 + \|g\|_1$

ii- On remarque que les applications $D, \mathcal{D}, \delta, I, \mathcal{I}, \iota$ sont **linéaires**, car il s'agit de la dérivation et de l'application identique (seule les normes changent). Pour étudier leur continuité, nous pouvons donc appliquer le **Théorème 0.1** ($i \Leftrightarrow ii$), avec $n = 1$.

L'application D **n'est pas continue**. En effet, soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$ pour tout $n > 0$. On a $f_n \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty = 1/n$ et $\|f_n'\|_\infty = n$. Pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}$, l'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ \|f'\|_\infty \leq \Lambda\|f\|_\infty$$

est donc fausse.

L'application $\mathcal{D}$ est **continue**. En effet, on a pour tout $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'inégalité $\|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + |f(0)| = \|f\|_0$. L'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ \|f'\|_\infty \leq \Lambda\|f\|_0$$

est donc vraie avec $\Lambda = 1$.

L'application δ **n'est pas continue**. En effet, soit $f_n : x \mapsto (1-\exp(-nx))/n$ pour tout $n>0$. On a $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_n'\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = (1-\exp(-n))/n$. Pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}$, l'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \|f'\|_\infty \leq \Lambda \|f\|_1$$

est donc fausse.

L'application I **n'est pas continue**. En effet, soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin(n^2x)$ pour tout $n>0$. On a $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty = 1/n$ et $\|f_n\|_0 = n$. Pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}$, l'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_0 \leq \Lambda \|f\|_\infty$$

est donc fausse.

L'application $\mathcal{I}$ **n'est pas continue**. En effet, soit $f_n : x \mapsto (1-\exp(-nx))/n$ pour tout $n>0$. On a $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_n\|_0 = 1$ et $\|f_n\|_1 = (1-\exp(-n))/n$. Pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}$, l'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_0 \leq \Lambda \|f\|_1$$

est donc fausse.

L'application ι **n'est pas continue**. En effet, soit $f_n : x \mapsto (1-\cos(\pi n x))/n$ pour tout $n>0$. On a $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty = 1/n$ et $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |\sin(\pi n x)|\, dx = n\int_{[0,n]} |\sin(\pi n x)|\, dx = 2$. Pour tout $\Lambda \in \mathbb{R}$, l'assertion

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_1 \leq \Lambda \|f\|_\infty$$

est donc fausse.

Exercice 9. Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, a un point de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a pour les normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$. Il existe alors une application linéaire continue (continue pour les normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$!) $\mathrm{L}_a : E \to F$ et une application $p_a : \Omega \to F$ de limite 0_F en a (limite suivant les normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$!) telle que :

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) - f(a) = \mathrm{L}_a(x-a) + \|x-a\|_E p_a(x) \tag{$*$}$$

Considérons maintenant $\|\ \|'_E$ une norme de E équivalente à $\|\ \|_E$ et $\|\ \|'_F$ une norme de F équivalente à $\|\ \|_F$, et regardons si $f : (\Omega, \|\ \|'_E) \to (F, \|\ \|'_F)$ est encore différentiable en a.

Par hypothèse, il existe c, C, λ, Λ des constantes >0, telles que :

$$\forall x \in E :\ c.\|x\|_E \leq \|x\|'_E \leq C.\|x\|_E \tag{1}$$

$$\forall x \in E :\ \lambda.\|x\|_F \leq \|x\|'_F \leq \Lambda.\|x\|_F \tag{2}$$

Notons qu'un changement de norme n'affecte pas la linéarité de L_a, qui est une propriété algébrique. Essayons donc de tester la différentiabilité de $f : (\Omega, \|\ \|'_E) \to (F, \|\ \|'_F)$ en a sur le candidat L_a, c'est-à-dire regardons si :

- $\mathrm{L}_a : (E, \|\ \|'_E) \to (F, \|\ \|'_F)$ est continue,
- il existe une application $p'_a : \Omega \to F$ de limite 0_F en a (limite suivant les normes $\|\ \|'_E$ et $\|\ \|'_F$!) telle que :

$$\forall x \in \Omega,\ f(x) - f(a) = \mathrm{L}_a(x-a) + \|x-a\|'_E p'_a(x). \tag{$**$}$$

- La continuité de $\mathrm{L}_a : (E, \|\ \|'_E) \to (F, \|\ \|'_F)$: il suffit de la vérifier en 0_E. Si $\|x\|'_E \to 0$, par la première inégalité de (1), $\|x\|_E \to 0$, et par continuité de $\mathrm{L}_a : (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$, on a : $\|\mathrm{L}_a(x)\|_F \to 0$. Enfin par la deuxième inégalité de (2), on obtient: $\|\mathrm{L}_a(x)\|'_F \to 0$. On a donc prouvé : $\|x\|'_E \to 0 \Longrightarrow \|\mathrm{L}_a(x)\|'_F \to 0$, ie la continuité de $\mathrm{L}_a : (E, \|\ \|'_E) \to (F, \|\ \|'_F)$.

- Si $(**)$ est vérifiée, nécessairement : $\forall x \in \Omega : \|x-a\|_E.p_a(x) = \|x-a\|'_E.p'_a(x)$. On en conclut que p'_a est déterminée par : $\forall x \neq a, p'_a(x) = \dfrac{\|x-a\|_E}{\|x-a\|'_E}.p_a(x)$. Par (1) et (2), on a :

$$p'_a(x)\|'_F = \frac{\|x-a\|_E}{\|x-a\|'_E}.\|p_a(x)\|'_F \leq \frac{1}{c}.\Lambda\|p_a(x)\|_F. \tag{3}$$

Comme on a vu que $\|x\|'_E \to a \Longrightarrow \|x\|'_E \to a$, l'inégalité (3) implique : $\|x\|'_E \to a \Longrightarrow \|p'_a(x)\|'_F \to 0$.

On en conclut que $f : (\Omega, \| \ \|'_E) \to (F, \| \ \|'_F)$ est différentiable en a, de différentielle la différentielle de $f : (\Omega, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$.

Exercice 10. Φ est bien linéaire car si B et b sont deux applications de $\mathcal{L}(E,E;F)$ et si α et β sont deux réels, $\forall x, y \in E,\ \Phi(\alpha.B+\beta.b)(x)(y) = (\alpha.B+\beta.b)(x,y) = \alpha.B(x,y)+\beta.b(x,y) = \alpha.\Phi(B)(x)(y)+\beta.\Phi(b)(x)(y)$, et donc $\forall x \in E : \Phi(\alpha.B+\beta.b)(x) = \alpha.\Phi(B)(x)+\beta.\Phi(b)(x)$, soit : $\Phi(\alpha.B+\beta.b) = \alpha.\Phi(B)+\beta.\Phi(b)$.

Montrons que Φ est **injective**. Si $\Phi(B) = 0_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))}$, $\forall x \in E$, $\Phi(B)(x) = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$, et donc $\forall y \in E$, $\Phi(B)(x)(y) = B(x,y) = 0_F$, ie $B = 0_{\mathcal{L}(E,E;F)}$.

Montrons que Φ est **surjective** (l'injectivité n'implique la bijectivé des applications linéaires que lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie. Ici rien ne dit que E est de dimension finie, donc $\mathcal{L}(E,E;F)$ et $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$ ne sont peut-être pas de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$. Définissons $B : E \times E \to F$ par $B(x,y) = [f(x)](y)$. La bilinéarité de B résulte immédiatement de la linéarité de f en x (à y fixé) et en y (à x fixé). Montrons que B est **continue**. Par hypothèse f est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E;F)$, on a :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_{L(E;F)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))}.\|x\|_E. \tag{$*$}$$

Mais :

$$\forall y \in E,\ \|[f(x)](y)\|_F \leq \|f(x)\|_{L(E;F)}\|y\|_E,$$

donc par $(*)$ et $(**)$:

$$\forall x, y \in E,\ \|B(x,y) = [f(x)](y)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))}.\|x\|_E.\|y\|_E, \tag{$***$}$$

Ce qui est la continuité de B, par le Théorème 0.1.v. On en conclut que f possède bien un **antécédant** dans $\mathcal{L}(E,E;F)$, puisque $B \in \mathcal{L}(E,E;F)$ et par **construction** $\Phi(B) = f$.

Notons que $(***)$ prouve que $\|B\|_{\mathcal{L}(E,E;F)} \leq \|\Phi(B) = f\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))}$ (cf Exercice 4, qui montre que la norme d'une application multilinéaire est l'inf des constantes Λ du Théorème 0.1.v). Montrons pour terminer que : $\|\Phi(B)\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,E;F)}$.

Comme

$$\forall x, y \in E,\ \|B(x,y)\| \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,E;F)}.\|x\|_E.\|y\|_E,$$

on a (cf Exercice 4):

$$\|\Phi(B)(x)\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,E;F)}.\|x\|_E.$$

Ce qui donne bien :

$$\|\Phi(B)\|_{\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E,E;F)}.$$

En conclusion Φ est un **isomorphisme linéaire** qui ne change pas la norme (une isométrie linéaire). Ce résultat se **généralise** de la façon suivante : $\psi : \mathcal{L}(E,\ldots,E;F) \to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;\ldots;\mathcal{L}(E;F)\ldots))$ défini comme dans 1.4 est une isométrie linéaire. On pourrait bien sûr, comme dans 1.4, énoncer ce résultat avec n espaces distincts $E_1, \ldots, E_n$, au lieu de n fois E.

Toutes les méthodes de preuve dans le cadre du calcul différentiels sont insensibles aux actions des isométries linéaires, de sorte qu'on peut identifier sans ennui les éléments de $\mathcal{L}(E,\ldots,E;F)$ et ceux de $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;\ldots;\mathcal{L}(E;F)\ldots))$.

Exercice 11. nétait pas continue en $(0,0)$ on ne pourrait espérer prouver que f est différentiable en $(0,0)$). On sait que si f est différentiable en $(0,0)$, par la Proposition 1.4, f admet ses deux dérivées partielles en $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Regardons si ces deux quantités **existent**. Par définition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en 0 de $x \mapsto f(x,0) = 1 + x\sqrt{2}$. La fonction $x \mapsto 1 + x\sqrt{2}$ étant dérivable en 0, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe bien et est $\sqrt{2}$. On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0. **Si** f est différentiable, par la Proposition 1.4 la différentielle de f en $(0,0)$ est $\mathrm{L} : (h,k) \mapsto h\sqrt{2}$. Évaluons alors $|f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{L}(x-0, y-0)| = |x\sqrt{y^2+2} - x\sqrt{2}| = |x\sqrt{2}(\sqrt{1+y^2/\sqrt{2}} - 1)|$. Comme $\sqrt{1+y^2/\sqrt{2}} - 1 = (y^2/\sqrt{2})/(1+\sqrt{1+y^2/\sqrt{2}})$, $|\sqrt{1+y^2/\sqrt{2}} - 1| \leq y^2/\sqrt{2}$. On en déduit que $|f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{L}(x-0,y-0)| \leq |x|y^2 \leq \|(x,y)\|_\infty^3$, où $\|(x,y)\|_\infty^3 = \max(|x|,|y|)$. En particulier : $\dfrac{1}{\|(x,y)\|_\infty}|f(x,y) - f(0,0) - \mathrm{L}(x-0,y-0)|$ tend vers 0 lorsque $\|(x,y)\|_\infty$ tend vers 0. On en conclut que f est différentiable en $(0,0)$, de différentielle $Df_{(0,0)} : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto h\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Facilement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -2$. L'égalité (2) de la proposition 1.4 dit que **si** f est différentiable en $(1,1,1)$, sa différentielle est l'application $\mathbb{R}^3 \ni (h,k,l) \mapsto \mathrm{L}(h,k,l) = h + k - 2l \in \mathbb{R}$. Montrons alors que $\dfrac{1}{\|(h,k,l)\|}(f(1+h,1+k,1+l) - f(1,1,1) - h - k + 2l)$ tend vers 0 lorsque $\|(h,k,l)\|$ tend vers 0 (la norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^3$ est au choix, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et que dans ce cas la norme n'influe pas sur la différentiabilité). On a: $\delta = f(1+h,1+k,1+l) - f(1,1,1) - h - k + 2l = (1/1+2l+l^2)(hk - 2lh - 2lk + 2l^2 - l^2 - l^2h - l^2k + 2l^3)$. Choisissons $\|(h,k,l)\| = \max\{|h|,|k|,|l|\}$. Dès que $\|(h,k,l)\| \leq 1/2$, $1 + 2l + l^2 \leq 9/4$,

et $|hk - 2lh - 2lk + 2l^2 - l^2 - l^2h - l^2k + 2l^3| \leq 8\|(h,k,l)\|^2$, donc $\delta \leq 9/4.8.\|(h,k,l)\|^2$, et ainsi f est bien différentiable en $(1,1,1)$. En revanche f n'est **certainement** pas différentiable en $(0,0,0)$ puisque f n'est pas **continue** en $(0,0,0)$.

Exercice 14. *i*– **Si** Φ est différentiable, ses dérivées directionnelles suivant toutes les directions existent. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un point fixé de E en lequel on va calculer les dérivées directionnelles de Φ. Soit $\vec{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un vecteur de E. On a $\Phi(a + t\vec{h}) - \Phi(a) = (\sin(a_n + th_n) - \sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que $1/t[\Phi(a+t\vec{h}) - \Phi(a)]$ converge vers $\vec{l} = (l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ (la dérivée directionnelle de Φ en a suivant $\vec{h}$), on a alors par définition: $\|1/t[\Phi(a+t\vec{h}) - \Phi(a)] - \vec{l}\|_E \to 0$ quand $t \to 0$, et donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|1/t[\sin(a_n + th_n) - \sin(a_n)] - l_n| \leq \|1/t[\Phi(a+t\vec{h}) - \Phi(a)] - \vec{l}\|_E \to 0$ quand $t \to 0$. On en conclut que nécessairement $l_n = [\sin(a_n + t.h_n)]'_{(t=0)} = h_n.cos(a_n)$. Montrons alors que l'on a bien effectivement $D_{\vec{h}}\Phi(a) = (h_n.\cos(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varphi_n(t) = \sin(a_n + th_n) - th_n\cos(a_n)$, par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_t \in]0;t[$ ($]t,0[$ si t est négatif), tel que $\varphi_n(t) - \varphi_n(0) = t.\varphi_n'(\theta_t) = t.h_n.(\cos(a_n + \theta_t h_n) - \cos(a_n))$. À nouveau par le théorème des accroissements finis, il existe $\sigma_t \in]0;\theta_t[\subset]0,t[$, tel que: $\varphi_n(t) - \varphi_n(0) = t.h_n.\theta_t.h_n.(-\sin(a_n + \sigma_t.h_n))$, et donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(a_n + th_n) - \sin(a_n) - th_n\cos(a_n)| = |\varphi_n(t) - \varphi_n(0)| \leq |t|^2|h_n|^2$, de sorte que: $\|1/t[\Phi(a+t\vec{h}) - \Phi(a)] - \vec{l}\|_E = \max(|1/t[\sin(a_n + th_n) - \sin(a_n)] - h_n\cos(a_n)|) \leq |t|.\|\vec{h}\|_E^2$, et donc $\vec{h}$ étant fixé, on a $\|1/t[\Phi(a+t\vec{h}) - \Phi(a)] - \vec{l}\|_E \to 0$ quand $t \to 0$, c'est-à-dire que l'on a bien: $D_{\vec{h}}\Phi(a) = (h_n.\cos(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

ii- $E \ni \vec{h} \mapsto D_{\vec{h}}\Phi(a)$ est facilement linéaire et de plus $\|D_{\vec{h}}\Phi(a)\|_E = \max(|h_n\cos(a_n)|) \leq \max(|h_n|) = \|\vec{h}\|_E$. Donc cette application est continue.

iii- Si Φ est différentiable, nécessairement on $D\Phi_{(a)}(\vec{h}) = D_{\vec{h}}\Phi(a)$. On montre de même qu'au i, que Φ est différentiable en a, en montrant grâce au théorème des accroissements finis, que $(1/\|\vec{h}\|)[\Phi(a+\vec{h}) - \Phi(a) - D_{\vec{h}}\Phi(a)]$ tend vers 0 lorsque $\|\vec{h}\|$ tend vers 0.

Exercice 15. Sur E, l'espace ℓ^1 des suites réelles absolument convergentes, on considère la norme $\nu(x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Étudions la différentiabilté de $\nu : (E,\nu) \to (\mathbb{R}, |\ |)$. En 0_E on sait déja que ν n'est pas différentiable. Soit alors $a \in E \setminus \{0_E\}$.

- Comme toute norme, par la seconde inégalité triangulaire, $\nu : (E,\nu) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ est continue en a.
- Étude de l'existence des dérivées directionnelles. Soit $\vec{h} \in E$.

Évaluons:
$$\lim_{0\neq t\to 0}\frac{1}{t}[\nu(x+t.\vec{h})-\nu(x)] = \lim_{0\neq t\to 0}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{t}(|a_n+th_n|-|a_n|).$$

Évidemment s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n=0$, en choisissant $\vec{h}=(\delta_{(k,n)})_{k\in\mathbb{N}}$ (où $\delta_{(k,n)}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $k\neq n$ et 1 si $k=n$), on obtient: $\frac{1}{t}[\nu(x+t.\vec{h})-\nu(x)]=\frac{|t|}{t}$. Or cette quantité n'admet pas de limite lorsque t tend vers 0.

Notons alors $\Omega=\{a\in E;\ a_n\neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$, et supposons $a\in\Omega$. Notons encore $f_n(t)=\frac{1}{t}(|a_n+th_n|-|a_n|)$, où chaque f_n est prolongée par continuité en 0 par $f_n(0)=\epsilon(a_n)h_n$, ($\epsilon(a_n)=1$ si $a_n>0$ et -1 si $a_n<0$). On a: $\frac{1}{t}[\nu(x+t.\vec{h})-\nu(x)]=\sum_{n\geq 0}f_n(t)$.

Si la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}f_n(t)$ est uniforme, comme chaque $f_n(t)$ est continue en $t=0$, on aura la continuité de $\frac{1}{t}[\nu(x+t.\vec{h})-\nu(x)]=\sum_{n\geq 0}f_n(t)$ en $t=0$, c'est-à-dire: $\lim_{t\to 0}[\sum_{n\geq 0}f_n(t)] = [\sum_{n\geq 0}f_n(t)]_{(t=0)}=\sum_{n\geq 0}f_n(0)=\sum_{n\geq 0}\epsilon(a_n)h_n$.

Or $|f_n(t)|=|\frac{1}{t}(|a_n+th_n|-|a_n|)|\leq|\frac{1}{t}|th_n\|=|h_n|$; la série $\sum_{n\geq 0}|h_n|$ étant par hypotèse convergente, la série $\sum_{n\geq 0}f_n(t)$ est normalement convergente, donc uniformément convergente.

Conclusion: - Quel que soit $a\in\Omega$, quel que soit $\vec{h}\in E$, ν admet en a une dérivée directionnelle suivant la direction $\vec{h}$, et $D_{\vec{h}}\nu_{(a)}=\sum_{n\geq 0}\epsilon(a_n)h_n$.

- Quel que soit $a\in E\setminus\Omega$, il existe une direction $\vec{h}\in E$ suivant laquelle ν n'admet pas de dérivées directionnelles en a, et donc ν n'est pas différentiable en $a\in E\setminus\Omega$.

• L'application $E\ni\vec{h}\to D_{\vec{h}}\nu_{(a)}=\sum_{n\geq 0}\epsilon(a_n)h_n$ est facilement linéaire. Étudions sa continuité. On a: $|\sum_{n\geq 0}\epsilon(a_n)h_n|\leq\sum_{n\geq 0}|h_n|=\nu(\vec{h})$.

Conclusion: en $a\in\Omega$, toutes les dérivées directionnelles $D_{\vec{h}}\nu_{(a)}$ sont des applications linéaires continues de la variable $\vec{h}$.

• Étudions la différentiabilité de ν en $a\in\Omega$. Pour cela évaluons le rapport:
$$\frac{1}{\nu(\vec{h})}[\nu(a+\vec{h})-\nu(a)-D_{\vec{h}}\nu_{(a)}]=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\nu(\vec{h})}(|a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n),$$

lorsque $\vec{h}$ tend vers 0.

Essayons, comme pour l'exercice 14 une majoration uniforme en n de $|a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n$, grâce au théorème des accroissements finis. On a $|a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n=\phi(h_n)-\phi(0)$, où $\phi(t)=|a_n+t|-\epsilon(a_n)t$, donc $|a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n=\phi'(\theta_n).h_n$, avec $\theta_n\in]0;h_n[$ si

$h_n>0$ et $]h_n;0[$ si $h_n<0$. Mais $\phi'(\theta_n)=\epsilon(a_n+\theta_n)-\epsilon(a_n)$, ce qui implique, lorsque a_n et $a_n+\theta_n$ sont de signes opposés pour tout $n\geq 0$, que $||a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n|=2|h_n|$ et donc dans ce cas:
$$|\sum_{n\geq 0}|a_n+h_n|-|a_n|-\epsilon(a_n)h_n|=2\sum_{n\geq 0}|h_n|=2\nu(\vec{h})$$

n'est pas un petit o de $\nu(\vec{h})$. Cet essai suggère de mettre en défaut la définition de la différentiabilité de ν en a, en considérant la suite (de suites): $(\vec{h}_p)=(-2a_n\delta_{(p,n)})_{n\in\mathbb{N}})_{p\in\mathbb{N}}$.

En notant $(\vec{h}_p)_n$ le n^{eme} terme de $\vec{h}_p$, on a en effet:
$$\nu(\vec{h}_p)=|-2a_p|\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0,\ a_p+(\vec{h}_p)_p\ \text{ et } a_p\ \text{ sont de signes opposés, et}$$

$$|\nu(a+\vec{h}_p)-\nu(a)-\sum_{n\geq 0}\epsilon(a_n)(\vec{h}_p)_n| = ||a_p-2a_p|-|a_p|-(2\epsilon(a_p)a_p)| = 2|a_p| = \nu(\vec{h}_p).$$

On en conclut que $\dfrac{1}{\nu(\vec{h}_p)}[\nu(a+\vec{h}_p)-\nu(a)-D_{\vec{h}_p}\nu_{(a)}]$ ne tend pas vers 0 lorsque $p\to\infty$, et donc que ν n'est pas différentiable en a.

Conclusion générale: La norme ν n'est différentiable en aucun point de E, bien qu'admettant en tout point $a\in\Omega$ et selon toute direction $\vec{h}$, une dérivée directionnelle $D_{\vec{h}}\nu_{(a)}$ linéaire et continue en la variable $\vec{h}\in E$.

Remarque: L'ensemble Ω est d'intérieur vide. En effet, tout point de Ω est limite de suites de points de $E\setminus\Omega$. par exemple, si $a\in\Omega$, la suite $a_p=(a_0,a_1,\ldots,a_p,0,0,\ldots)$ est une suite de points de $E\setminus\Omega$ telle que $\nu(a-a_p)=\sum_{n\geq p+1}|a_n| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Chapitre 2- Calculs sur les différentielles.

2.1. Théorème des applications composées.

Dans le cas des applications de variables et de valeurs réelles, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, (I et J étant deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$) lorsque la composée $g \circ f$ a un sens, c'est-à-dire lorsque $f(I) \subset J$, on sait que la dérivabilité de f en un point a de I et celle de g en $f(a) = b$ impliquent, la dérivabilité de $g \circ f$ en a et que de plus $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

On dispose, dans le cas des applications définies sur un espace vectoriel normé quelconque, d'une généralisation de ce résultat. Il s'agit d'un résultat qualitatif (existence de la différentielle de la composée) aussi bien que quantitatif (expression de cette différentielle en fonction des différentielles des applications qui entrent dans la composition). À ce double titre, le Théorème des applications composées s'avère extrêmement pratique. Il permet d'assurer la différentiabilité d'applications “complexes”, lorsque la définition de la différentiabilité est impraticable, et de calculer directement la différentielle.

Théorème 2.1. (Théorème des applications composées) — *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, Ω un ouvert de E et $\mathcal{U}$ un ouvert de F. Soient $f : \Omega \to \mathcal{U} \subset F$ et $g : \mathcal{U} \to G$ deux applications différentiables respectivement en a et $b = f(a)$ telles que $f(\Omega) \subset \mathcal{U}$.*

Alors l'application $g \circ f : \Omega \to G$ est différentiable en a, et de plus :

$$D(g \circ f)_{(a)} = Dg_{[f(a)]} \circ Df_{(a)}.$$

Remarque. La formule est cohérente : puisque $Dg_{[f(a)]} \in \mathcal{L}(F; G)$ et $Df_{(a)} \in \mathcal{L}(E; F)$, ces deux applications linéaires se composent bien.

Preuve. on a :

$$\forall x \in \Omega; \quad f(x) - f(a) = Df_{(a)}(x - a) + \|x - a\| p_a(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} p_a(x) = 0.$$

$$\forall y \in \mathcal{U}; \quad g(y) - g(b) = Dg_{(b)}(y - b) + \|y - b\| q_b(y), \quad \text{avec} \quad \lim_{y \to b} q_b(y) = 0.$$

D'où :

$$\forall x \in \Omega; \quad g(f(x)) - g(f(a)) = Dg_{(b)}(Df_{(a)}(x - a)) + r_a(x), \quad \text{avec}$$

$$r_a(x) = \|x - a\| Dg_{(b)}(p_a(x)) + \|Df_{(a)}(x - a) + \|x - a\| p_a(x)\| q_b(f(x)).$$

Comme $Df_{(a)}$ est une application linéaire continue, d'après la définition même de sa norme $\|Df_{(a)}\| = \|Df_{(a)}\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ qui vérifie $\|Df_{(a)}(x - a)\| \leq \|Df_{(a)}\|.\|x - a\|$, on en déduit : $\|r_a(x)\| \leq \|x - a\|(\|Dg_{(b)}(p_a(x))\| + (\|Df_{(a)}\| + \|p_a(x)\|)\|q_b(f(x))\|)$, et par continuité de $Dg_{(b)}$, on a bien $r_a(x) \to 0$ quand $x \to a$. Enfin, la composée de deux applications linéaires continues étant linéaire continue, $Dg_{(b)} \circ Df_{(a)}$ est linéaire continue et est ainsi bien la différentielle de $g \circ f$ en a. $\square$

Remarque. Si $E = F = G = \mathbb{R}$, on a vu que : $Df_{(a)}(h) = f'(a).h \in \mathbb{R}$ et $Dg_{(b)}(k) = g'(b).k \in \mathbb{R}$, on a donc prouvé le résultat bien connu : $(g \circ f)'(a) = f'(a).g'[f(a)]$ en prouvant : $D(g \circ f)_{(a)} = Dg_{[f(a)]} \circ Df_{(a)}$, car $\forall h \in \mathbb{R}, (g \circ f)'(a).h = D(g \circ f)_{(a)}(h) = [Dg_{[f(a)]} \circ Df_{(a)}](h) = Dg_{[f(a)]}(Df_{(a)}(h)) = Dg_{[f(a)]}(f'(a).h) = g'(b).f'(a).h$

Remarque (retour sur les dérivées partielles). Si $\dim(E) = n$, la base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E étant fixée, on dispose d'un isomorphisme naturel $\Phi : \mathbb{K}^n \to E$, donné par $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j.\vec{e}_j$.

Notons $\widetilde{a} = \Phi^{-1}(a) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\vec{\epsilon}_j = \Phi^{-1}(\vec{e}_j) = (0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$. En considérant l'application $\widetilde{f} : \mathbb{K}^n \to F$, définie par $\widetilde{f} = f \circ \Phi$, on a par le Théorème des applications composées :

$$D\widetilde{f}_{(\widetilde{a})}(\vec{\epsilon}_j) = Df_{(a)}[D\Phi_{(\widetilde{a})}(\vec{\epsilon}_j)].$$

Mais Φ étant linéaire $D\Phi_{(\widetilde{a})}(\vec{\epsilon}_j) = \Phi(\epsilon_j) = \vec{e}_j$, on en déduit :

$$D\widetilde{f}_{(\widetilde{a})}(\vec{\epsilon}_j) = Df_{(a)}(\vec{e}_j), \text{ c'est-à-dire } \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}(\widetilde{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

On peut donc trouver $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ en calculant $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}(\widetilde{a})$, c'est-à-dire en calculant une dérivée (en 0) d'une fonction d'une seule variable scalaire :

$$\mathbb{K} \ni t \to \widetilde{f}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in F.$$

Bien sûr, dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$, $\Phi =$Id.

Exemple. Reprenons l'exemple du paragraphe 1.3 dans le formalisme de la remarque précédente. Dans cet exemple E est l'espace vectoriel des polynômes d'une seule variable et de degré ≤ 2, $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = X, \vec{e}_3 = X^2)$ est la base choisie de E. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $E \ni P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \mapsto f(P) = \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_0)\alpha_2^3 \in \mathbb{R}$. Calculons la troisième dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{E}$ au point $Q = 1 + X^2$, à l'aide de la remarque ci-dessus. Avec les notations de cette remarque, $\widetilde{Q} = (1, 0, 1)$, $\widetilde{f} : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \widetilde{f}(x, y, z) = \sin(z) + \cos(y) + \cos(x)z^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_3}(Q) = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial z}(\widetilde{Q}) = \cos(1) + \cos(1)(3.1^2) = 4\cos(1)$.

Remarque (effet d'un changement de base sur les dérivées partielles). Les dérivées partielles d'une application $f : E \to F$ dépendent de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ dans laquelle on les calcule. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n)$ une autre base de E. Voyons quelle est la relation entre les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_j}(a) = D_{\vec{e}_j} f_{(a)}$ de f dans la base $\mathcal{B}$ et les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\alpha}_j}(b) = D_{\vec{\alpha}_j} f_{(b)}$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

On a par définition $D_{\vec{e}_j} f_{(a)} = Df_{(a)}(\vec{e}_j) = Df_{(a)}(P(\vec{\alpha}_j))$, où $P : E \to E$ est l'application linéaire qui fait passer de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Or $DP_{(P^{-1}(a))} = P$, et par le Théorème des applications composées, on obtient : $D_{\vec{e}_j} f_{(a)} = Df_{(a)}(DP_{(P^{-1}(a))}(\vec{\alpha}_j)) = D(f \circ P)_{(P^{-1}(a))}(\vec{\alpha}_j) = \dfrac{\partial (f \circ P)}{\partial \vec{\alpha}_j}(P^{-1}(a))$: les dérivées partielles de f en a dans la base $\mathcal{B}$ au point a sont égales aux dérivées partielles de $f \circ P$ dans la base $\mathcal{B}'$, au point $P^{-1}(a)$.

Exercice 17. Calculer, en utilisant la remarque ci-dessus, les dérivées partielles de l'application de l'exemple précédent, au point Q, mais dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{\alpha}_1 = 1 + X, \vec{\alpha}_2 = X^2 - X, \vec{\alpha}_3 = X^2 - 1)$ de E.

2.2. Structure d'espace vectoriel.

Proposition 2.2. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, $a \in E$. Si Ω est un ouvert de E, $f, g : \Omega \to F$ deux applications différentiables en a, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$ et $\lambda.f$ sont aussi différentiables en a, et $D(f+g)_{(a)} = Df_{(a)} + Dg_{(a)}$, $D(\lambda.f)_{(a)} = \lambda.Df_{(a)}$.*

On en conclut que l'ensemble des applications différentiables en un point de E est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications continues en a, on le note $\mathcal{D}_{(a)}$. De plus, l'application $\mathcal{D}_a : \mathcal{D}_{(a)} \to \mathcal{L}(E; F)$ qui à f associe $Df_{(a)}$ est une application linéaire.

Même énoncé pour les applications différentiables sur un ouvert donné de E.

Preuve. La preuve se fait soit directement en écrivant la définition de la différentiabilité, soit en utilisant le Théorème des applications composées et les résultats du paragraphe suivant sur les applications à valeurs dans un espace produit. (cf les Exercices 23 et 24). $\square$

2.3. Applications à valeurs dans un produit, matrice jacobienne.

On se pose le problème du calcul explicite de la différentielle d'une application $f = (f_1, \ldots, f_m)$ à valeurs dans un produit en fonction des différentielles de ses composantes $f_1, \ldots, f_m$.

Theorème 2.3. — *Soient $F_1, \ldots, F_m, E$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, $a \in E$ et $f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to F = F_1 \times \ldots \times F_m$. Alors f est différentiable en a ssi ses m composantes $f_1, \ldots, f_m$ le sont. De plus, on a : $Df_{(a)} = (Df_{1(a)}, \ldots, Df_{m(a)})$.*

✓

Preuve. (cf Exercice 23). Si f est différentiable en a, $f_j = \pi_j \circ f$ l'est aussi, où $\pi_j : F \to F_j$ est la projection canonique, et de plus $Df_{j(a)} = \pi_j \circ Df_{(a)}$, d'où la formule. Réciproquement notons $q_j : F_j \to F$, l'application linéaire (continue) définie par $q_j(y_j) = (0, \ldots, 0, y_j, 0, \ldots, 0)$, on a : $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} q_j \circ f_j$, donc si chaque f_j est différentiable en a, il en est de même de f. □

Posons maintenant en exercice un résultat utile dans le cas où l'application que l'on différencie est à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

Exercice 18. *Soit $f : \Omega \to F$ une application, où E et F sont deux espaces vectoriels normés, F étant de dimension finie, et où Ω est un ouvert de E. Soient , $a \in \Omega$ et $\mathcal{E}_F = (\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_m)$ une base de F. Si on écrit $f(x) = f_1(x).\vec{\epsilon}_1 + \ldots + f_m(x).\vec{\epsilon}_m$ (les composantes de $f(x)$ dans la base $\mathcal{E}_F$), cette écriture définit les composantes $(f_j)_{j \in \{1,\ldots,m\}}$ de f dans la base $\mathcal{E}_F$, ie : $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} f_j.\vec{\epsilon}_j$. Montrer que f est différentiable en a ssi toutes ses composantes f_j le sont et montrer qu'alors $Df_{(a)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} Df_{j(a)}.\vec{\epsilon}_j$.*

Considérons maintenant le cas où E et F sont de dimensions respectives n et m, et choisissons un couple de bases $\mathcal{E}_E$, $\mathcal{E}_F$, pour respectivement E et F.

Soient alors Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a. Sa différentielle $Df_{(a)} : E \to F$ étant une application linéaire de E dans F, on peut lui associer une unique matrice $n \times m$ qui la représente, dans les bases $\mathcal{E}_E$ et $\mathcal{E}_F$. Notons-la $J(f)_{(a)(\mathcal{E}_E, \mathcal{E}_F)}$ ou plus simplement $J(f)_{(a)}$, sans ambiguité. Si $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ est un vecteur de E écrit dans $\mathcal{E}_E$, on a :

$$[Df_{(a)}(\vec{h})]_{\mathcal{E}_F} = J(f)_{(a)}.\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Par l'Exercice 18 :

$$[Df_{(a)}(\vec{h})]_{\mathcal{E}_F} = [\sum_{j=1}^{m} Df_{j(a)}(\vec{h}).\vec{\epsilon}_j]_{\mathcal{E}_F} = \begin{pmatrix} Df_{1(a)}(\vec{h}) \\ \vdots \\ Df_{m(a)}(\vec{h}) \end{pmatrix} = J(f)_{(a)}.\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

de sorte que l'élément de $J(f)_{(a)}$ qui se trouve à la j^{eme} ligne et la k^{eme} colonne est : $Df_{j(a)}(\vec{e}_k) = D_{\vec{e}_k} f_{j(a)} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$.

Théorème 2.4. — Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension respectivement n et m, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a. Si on fixe deux bases $\mathcal{E}_E$ et $\mathcal{E}_F$ respectivement dans E et F, la matrice associée à $Df_{(a)} : E \to F$ dans ces bases est notée $Jac(f)_{(a)}$. On l'appelle la matice jacobienne de f en a. Ces coefficients sont donnés par :

$$Jac(f)_{(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

où f_j est la j^{eme} composante de f dans $\mathcal{E}_F$.

Le Théorème 2.1, donne alors immédiatement ($\dim(G) = p$) :

$$Jac(g \circ f)_{(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(f(a)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m}(f(a)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Remarque (sur la norme de $Df_{(a)}$ en dimension finie). Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \Omega$ et si f est différentiable en a, $Df_{(a)}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, qui est de dimension finie. Deux bases étant choisies respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^m$ (par exemple les bases canoniques), une application linéaire est représentée de façon unique par une matrice $n \times m$. Une norme $\| \ \|_1$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est alors donné par :

✓

$$\|\mathrm{L}\|_1 = \max_{i,j} |a_{ij}|,$$

où L est représentée par la matrice $(a_{ij})_{i \in \{1,\cdots,n\}, j \in \{1,\cdots,m\}}$ (ce qui revient à rendre isomorphe $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ et $\mathbb{R}^{n \times m}$ et à transporter la norme du max de $\mathbb{R}^{n \times m}$ via cet isomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$). Comme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ toutes les normes sont équivalentes, il existe deux réels $C, K > 0$ tel que :

$$C \cdot \|\mathrm{L}\|_1 \leq \|\mathrm{L}\| \leq K \cdot \|\mathrm{L}\|_1,$$

où $\| \ \|$ est la norme de l'opérateur L, définie dans le chapitre 0. En particulier $\|Df_{(a)}\|$ est proche de 0 ssi $\|Df_{(a)}\|_1$ est proche de 0, ie ssi toutes les dérivées partielles de f en a sont proche de 0.

2.4. Théorème de la moyenne

Dans le cas des fonctions réelles $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, on dispose du Théorème des **accroissements finis** : quels que soient $x < y$ dans $[a, b]$, il existe $\theta \in]a, b[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(\theta)(y - x)$. En particulier si $|f'(x)|$ est majoré par M sur $]a, b[$, $|f(y) - f(x)| \leq M.|y - x|$.

Dans le cas des applications ayant leurs variables dans un espace vectoriel normé E et leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, la formule $f(y) - f(x) = Df_{(\xi)}(y - x)$, où $\xi \in]x, y[$, a encore lieu, pourvu que le domaine de définition Ω de f soit convexe (ie si deux points sont dans Ω, le segment qui les relie est encore dans Ω). En effet, soient $x, y \in \Omega$, l'application $G(t) = f(x + t(y - x))$ est une application dérivable sur $]0, 1[$, puisque f est elle même différentiable sur Ω et que $]x, y[\subset \Omega$. De plus G est continue sur $[0, 1]$, car f est continue sur Ω. Le théorème des accroissements finis appliqué à G donne l'existence de $\theta \in]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)(y - x)$. Or $G(1) - G(0) = f(y) - f(x)$, $G'(\theta) = Df_{(x+\theta(y-x))}$ et $\xi = x + \theta(y - x)) \in]x, y[$, puisque $\theta \in]0, 1[$.

✓ En revanche dans le cas où l'application f n'est plus à valeurs dans $\mathbb{R}$, on ne peut espérer que la formule $f(y) - f(x) = Df_{(\xi)}(y - x)$, où $\xi \in]x, y[$, ait encore lieu, même si les variables de f sont dans $\mathbb{R}$, comme le montre l'exemple suivant. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (\sin(x), \cos(x))$. Soit $x \in \mathbb{R}$. S'il existait $\theta \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = Df_{(\theta)}(x) = x.f'(\theta)$, on aurait : $(\sin(x), \cos(x) - 1) = (x.\cos(\theta), -x.\sin(\theta))$, ce qui donne en prenant les normes euclidiennes des deux membres de l'égalité : $2 - 2.\cos(x) = x^2$. Or cette égalité ne peut pas être satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Cependant, dans le cas tout à fait général des applications de variables et valeurs vectorielles, l'inégalité : $\|f(y) - f(x)\| \leq M.\|y - x\|$, où M majore $\|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ sur le segment $[x, y] \subset \Omega$, a lieu. C'est ce substitut du theéorème des accroissements finis que l'on appelle le Théorème de la moyenne.

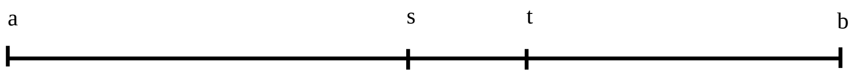
Lemme 2.5. — *Soient $[a; b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, F un espace vectoriel normé, et $f : [a; b] \to F$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$, telles que :*

$$\forall t \in]a; b[, \ \|\vec{f}'(t)\| \leq g'(t).$$

On a alors :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Preuve. Soient $s \in]a; b[$ et $t \in]a; b[$ tels que : $a < s < t < b$.



La dérivabilité de f et g en s donne :

$$f(t) - f(s) = f'(s)(t - s) + (t - s)p_s(t), \text{ avec} \lim_{t \to s} p_s(t) = 0,$$

$$g(t) - g(s) = g'(s)(t - s) + (t - s)q_s(t), \text{ avec} \lim_{t \to s} q_s(t) = 0,$$

d'où :

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \|\vec{f}'(s)\|(t - s) + (t - s)\|p_s(t)\|,$$
$$(g(t) - g(s)) = g'(s)(t - s) + (t - s)q_s(t),$$

et comme $\|\vec{f}'(s)\| \leq g'(s)$, on en déduit :

$$\|f(t) - f(s)\| - (t - s)\|p_s(t)\| \leq (g(t) - g(s)) - (t - s)\|q_s(t)\|,$$

et donc

$$g(t) - g(s) - \|f(t) - f(s)\| \geq (t - s)(q_s(t) - \|p_s(t)\|).$$

Si $\alpha > 0$, en posant :

$$\psi(s, t, \alpha) = g(t) - g(s) - \|f(t) - f(s)\| + \alpha(t - s) \geq (t - s)(\alpha + q_s(t) - \|p_s(t)\|),$$

et $A(s, \alpha) = \{t \in]s, b[; \psi(s, t, \alpha) \geq 0\}$, on voit que $A(s, \alpha) \neq \emptyset$. Notons $\sigma = \sup(A(s, \alpha))$ et supposons que $\sigma < b$.

Il existe alors $u \in]\sigma; b]$ tel que $\psi(\sigma, u, \alpha) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$g(u) - g(\sigma) - \|f(u) - f(\sigma)\| + \alpha(u - \sigma) \geq 0,$$

mais bien sûr, par passage à la limite (continuité de f et de g en $\sigma \in [s, b]$) :

$$g(\sigma) - g(s) - \|f(\sigma) - f(s)\| + \alpha(\sigma - s) \geq 0,$$

d'où par addition membre à membre :

$$g(u) - g(s) - (\|f(\sigma) - f(s)\| + \|f(u) - f(\sigma)\|) + \alpha(u - s) \geq 0,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire, on aboutit à la contradiction :

$$\psi(s, u, \alpha) \geq 0 \text{ et } u > \sigma,$$

de sorte que $\sigma = b$ et donc pour tout $s \in]a; b[$, pour tout $\alpha > 0$:

$$g(b) - g(s) - \|f(b) - f(s)\| + \alpha(b - s) \geq 0,$$

en faisant $s \to a$ et $\alpha \to 0$, on obtient le résultat (par continuité de f et de g en a). □

De ce lemme on déduit immédiatement le théorème de la moyenne annoncé dans l'introduction :

Théorème 2.6. (Théorème de la moyenne) — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, $[a; b] \subset \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application différentiable. On a l'inégalité suivante :*

✓

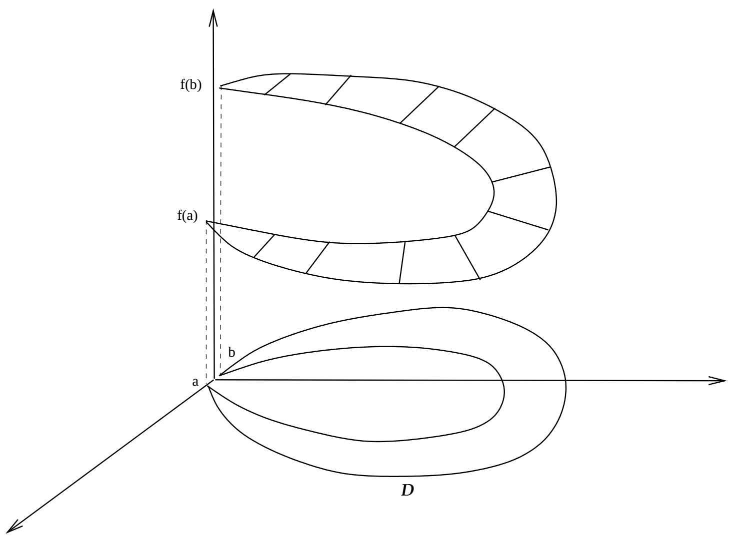
$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in [a;b]} \|Df_{(\xi)}(b - a)\| \leq \sup_{\xi \in [a;b]} \|Df_{(\xi)}\|.\|b - a\|.$$

Preuve. Posons $G(t) = f(a + t(b - a))$, pour $t \in [0; 1]$. Cette application est différentiable sur $]0, 1[$, et $G'(t) = DG_{(t)}(1) = Df_{(a+t(b-a))}([t \to a + t(b - a)]'(t)) = Df_{(a+t(b-a))}(b - a)$, on a donc $\|G'(t)\| \leq \sup_{\xi \in [a;b]} \|Df_{(\xi)}(b - a)\| = M$. On applique alors le lemme précédent à G et $g = M$, entre 0 et 1. □

Remarque. • Il se peut, dans l'énoncé du Théorème de la moyenne, que la quantité : $\sup_{\xi \in [a;b]} \|Df_{(\xi)}(b - a)\|$ soit $+\infty$. Auquel cas la majoration donnée par ce théorème est toujours vraie ($\|f(b) - f(a)\| \leq +\infty$) ! En revanche si $Df : \Omega \to \mathcal{L}(E; F)$ est continue, c'est-à-dire si f est $\mathcal{C}^1$, sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ la fonction continue $t \mapsto Df_{(a+t(b-a))}(b - a)$ est bornée, et la majoration fournie par le Théorème de la moyenne devient non triviale.

✓

• L'hypoyhèse de convexité est essentielle dans le théorème de la moyenne, comme le montre l'exemple qui suit : soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ l'application dont le graphe est donné par la figure ci-dessous.



Sur cette figure $\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}^2$, non convexe (un exercice serait de trouver une expression différentiable de f). De plus sur la figure on constate que les dérivées partielles de f en tous points de $\mathcal{D}$ sont "petites", car ces dérivées partielles sont les pentes des tangentes aux courbes données par l'intersection du graphe de f et des plans de coordonnées, et ces tangentes sont quasiment horizontales. En conséquence, d'après la remarque qui suit le Théorème 2.4, quel que soit $x \in \mathcal{D}$, $\|Df_{(x)}\|$ est "petit". Disons par exemple pour fixer les idées que $\forall x \in \mathcal{D}, \|Df_{(x)}\| \leq 1/2$. Mais en choisissant a et b dans $\mathcal{D}$ comme sur la figure, on peut avoir $|f(b) - f(a)| = 1$, et $|b - a|$ aussi proche de 0 que l'on veut. L'inégalité :

$$1 = |f(b) - f(a)| \leq \sup_{\xi \in \mathcal{D}} \|Df_{(x)}\| \cdot \|b - a\|$$

n'est ainsi pas vraie. On peut obtenir $\|Df_{(x)}\|$ aussi proche de 0 que l'on veut, tout en conservant $|f(b)-f(a)| = 1$, pourvu que le chemin qui relie a et b dans $\mathcal{D}$ soit suffisament long.

En réalité sur des domaines non convexes tels que $\mathcal{D}$, on peut majorer la différence $|f(b) - f(a)|$ par $\sup_{\xi \in \mathcal{D}} \|Df_{(x)}\| \cdot \gamma_{a,b}$, où $\gamma_{a,b}$ est la longueur minimale des chemins reliant a et b dans $\mathcal{D}$ (cf Exercice II du partiel du 21 novembre 2002).

Définition. Soit $f : \Omega \to F$ une application. On dit que f est *localement constante* sur Ω, ssi quel que soit $a \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert Ω_a de a dans Ω sur lequel f est constante.

Corollaire 2.7. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ est localement constante sur Ω ssi f différentiable sur Ω et $Df_{(x)} = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$, pour tout $x \in \Omega$.*

En particulier si Ω est connexe, f est constante sur Ω ssi f différentiable sur Ω et $Df_{(x)} = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$, pour tout $x \in \Omega$.

Preuve. Si f est localement constante, pour tout $x \in \Omega$, il existe $\rho > 0$, tel que f est constante sur $B_\rho \subset \Omega$, et donc f est bien différentiable sur B_ρ et $Df_{(x)} = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$. Réciproquement, si $Df_{(x)} = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$ sur Ω, soit

$B_\rho \subset \Omega$. Par le Théorème de la moyenne, quels que soient a et $b \in B_\rho$, $\|f(b) - f(a)\| \leq 0.\|b - a\| = 0$, et donc f est constante sur B_ρ.

Enfin si Ω est connexe, une fonction localement constante sur Ω est constante. $\square$

Remarque. Comme on l'a déja souligné dans la remarque ci-dessus, l'hypothèse de convexité pour le domaine de f est capitale dans le Théorème de la moyenne et pour le Corollaire 2.7, l'hypothèse de connexité qui en découle, l'est tout autant. Par exemple la fonction $f :]0,1[\cup]1,2[\to \mathbb{R}$ qui vaut 0 sur $]0,1[$ et 1 sur $]1,2[$ est différentiable sur $]0,1[\cup]1,2[$, de différentielle nulle sans pour autant être constante sur $]0,1[\cup]1,2[$!

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$. On dit que f est *lipschitzienne* sur Ω ssi il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\ x, y \in \Omega,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq C.\|y - x\|_E.$$

On dit que f est *localement lipschitzienne* sur Ω ssi quel que soit $a \in \Omega$, il existe Ω_a un voisinage ouvert de a sur lequel f est lipschitzienne. Autrement dit :

$$\forall a \in \Omega,\ \exists \Omega_a \subset \Omega \text{ un ouvert contenant } a,\ \exists C_a > 0 \text{ tels que :}$$

$$\forall\ x, y \in \Omega_a,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq C_a.\|y - x\|_E.$$

Corollaire 2.8. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, $f : \Omega \to F$ une application $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Si E est de dimension finie, f est localement lipschitzienne sur Ω.*

Preuve.

Soit $a \in \Omega$ et Ω_a une boule centrée en a de rayon suffisament petit pour que l'adhérence $\bar{\Omega}_a$ de Ω_a soit encore dans Ω. Soient x et y dans Ω_a. Comme Ω_a est convexe, le segment $[x, y] \subset \Omega_a \subset \Omega$. Le Théorème de la moyenne donne alors :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup_{\xi \in [x,y]} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)}.\|y - x\| \leq \sup_{\xi \in \bar{\omega}_a} \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)}.\|y - x\|.$$

Comme E est par hypothèse de dimension finie, la boule fermée $\bar{\Omega}_a$ est compacte, et comme $\bar{\Omega}_a \ni \xi \mapsto \|Df_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)} \in \mathbb{R}_+$ est une application continue (en tant que composée des deux applications continues $\| \ \|_{\mathcal{L}(E;F)}$ et Df), cette application est bornée sur $\bar{\Omega}_a$, disons par C_a. On a donc :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq C_a.\|y - x\|. \quad \square$$

2.5. Théorèmes $\mathcal{C}^k$.

Théorème 2.9. — *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $\Omega \subset E$ un ouvert de E, $\mathcal{U} \subset F$ un ouvert de F, et $f : \Omega \to \mathcal{U}$, $g : \mathcal{U} \to G$.*

Si f est $\mathcal{C}^k$ (resp. admet une différentielle d'ordre k en a) sur Ω et si g est $\mathcal{C}^k$ (resp. admet une différentielle d'ordre k en $f(a)$) sur $\mathcal{U}$, alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}^k$ (resp. admet une différentielle d'ordre k en a) sur Ω.

Preuve. Par récurrence sur $k \geq 1$. Par le Théorème des fonctions composées, f et g étant différentiables, on obtient la différentiabilité de $g \circ f$, et

$$D(g \circ f) = B \circ (Dg \circ f, Df),$$

où $B : \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;G)$ est définie par $B(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2) = \mathrm{L}_1 \circ \mathrm{L}_2$. B étant (bilinéaire) continue (puisque $\|B(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)\| = \|\mathrm{L}_1 \circ \mathrm{L}_2\| \leq \|\mathrm{L}_1\|.\|\mathrm{L}_2\|$), on en déduit que $D(g \circ f)$ est continue lorsque Df et Dg le sont.

Supposons maintenant le théorème prouvé, pour tout $k \leq n$, et montrons le pour $n+1$. On sait que Df et Dg sont n fois différentiables sur Ω et $\mathcal{U}$, et $D(g \circ f) = B \circ (Dg \circ f, Df)$, comme B est aussi $\mathcal{C}^n$, par hypothèse de récurrence, $D(g \circ f)$ est aussi $\mathcal{C}^n$, et donc $g \circ f$ est $\mathcal{C}^{n+1}$. $\square$

Théorème 2.10. — *Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$. Fixons une base de E, relativement à laquelle nous considèrerons les dérivées partielles de f.*

1.*i- Si f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω, f admet toutes ses dérivées partielles sur Ω et celles-ci sont continues sur Ω.*

1.*ii- Réciproquement, si f admet toutes ses dérivées partielles sur Ω et si celles-ci sont continues sur Ω, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.*

✓ *Donc f est $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues.*

1.*iii- Si f admet toutes ses dérivées partielles et que celles-ci sont continues en $a \in \Omega$, sauf éventuellement une qui n'existe qu'en a, alors f est différentiable en a.*

On a en realité le théorème général suivant :

2.*i- Si f admet en a une différentielle d'ordre $k \geq 1$, alors f admet en a toutes ses dérivées partielles d'ordre k:*

$$\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}})\ldots)(a) \ \ \textit{notée} \ \ \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\ldots\partial x_{j_1}}(a), \ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$$

en a. On a de plus :

$$\forall \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k, \quad D^k f_{(a)}(\vec{h}_k)\ldots(\vec{h}_1) =$$

$$D^k f_{(a)}(\vec{h}_k, \ldots, \vec{h}_1) = \sum_{1 \leq j_k, \ldots, j_1 \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\ldots\partial x_{j_1}}(a).h_k^{j_k}\ldots h_1^{j_1} \tag{3}$$

✓ 2.*ii- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω ssi f admet toutes ses dérivées partielles d'ordre k; $\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}(\ldots(\frac{\partial f}{\partial x_{j_1}})\ldots)$, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ sur Ω, et si celles-ci sont continues sur Ω.*

2.*iii- Si f admet toutes ses dérivées partielles d'ordre k sur Ω, continues en $a \in \Omega$, sauf éventuellement une qui n'existe qu'en $a \in \Omega$, alors f est k-fois différentiable en a.*

Preuve. Prouvons 1.*i*. Si f est différentiable en un point, on a vu que toutes ses dérivées partielles existent et que $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \Psi_j \circ Df$, où :

$$\begin{array}{rccl} \Psi_j : & \mathcal{L}(E;F) & \to & F \\ & \mathrm{L} & \to & \Psi_j(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(\vec{e}_j). \end{array}$$

Montrons que Ψ_j est continue (ce n'est pas parce que E est de dimension finie que $\mathcal{L}(E;F)$ est aussi de dimension finie, et donc la continuité de l'application linéaire Ψ_j n'est pas automatique). Ψ_j est linéaire et $\|\Psi_j(\mathrm{L})\|_F = \|\mathrm{L}(\vec{e}_j)\|_F \leq \|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;F)}\|\vec{e}_j\|_E$, il s'ensuit que $\Lambda = \|\vec{e}_j\|_E$ convient dans la caractérisation v du Théorème 0.1 de la continuité de Ψ_j. Si Df est continue, il en est alors de même de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Prouvons maintenant 1.*ii*. Si les dérivées partielles de f existent et sont continues, et si de plus Df existe, alors comme : $Df = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \psi_j \circ \frac{\partial f}{\partial x_j}$, où :

$$\begin{array}{rcccccl} \psi_j : & F & \to & \mathcal{L}(E;F) & & & \\ & \vec{y} & \to & \psi_j(\vec{y}) & : E & \to & F \\ & & & & \vec{h} & \to & \psi_j(\vec{y})(\vec{h}) = h_j.\vec{y} \end{array}$$

on obtient la continuité de Df, dès que celle de ψ_j est assurée. Montrons la continuité de ψ_j. $\|\psi_j(\vec{y})(\vec{h})\|_F = \|h_j.\vec{y}\|_F \leq \|\vec{h}\|_\infty.\|\vec{y}\|_F$. Or dans E de dimension finie, toutes les normes étant équivalentes, il existe $C > 0$ tel que $\| \ \|_\infty \leq C.\| \ \|_E$, et donc : $\|\psi_j(\vec{y})(\vec{h})\| \leq C.\|\vec{h}\|.\|\vec{y}\|_F$. On en déduit que $\|\psi_j(\vec{y})\|_{L(E;F)} \leq C.\|\vec{y}\|_F$,
ce qui est la continuité de ψ_j.

Montrons maintenant que l'existence et la continuité des dérivées partielles impliquent la différentiabilité de f. Pour cela il suffit de prouver 1.*iii*.

Supposons donc que toutes les dérivées partielles de f existent sur Ω et sont continues en $a \in \Omega$, sauf, par exemple la dernière qui n'est peut-être pas continue, et montrons que f est différentiable en a. On peut supposer pour cela que $n = 2$, sans perte de généralité et $\|(h_1, h_2)\| = \max\{|h_1|, |h_2|\}$.

Estimons pour cela :

$$g(\vec{h}) = f(a + \vec{h}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2.$$

On a $g(0) = f(a)$ et g est partiellement dérivable, puisque f l'est. On obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad i \ \in \ \{1, 2\},$$

$\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0) = \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0) = 0$. Soit $\epsilon > 0$, par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ en a, il existe $\rho > 0$, tel que $\|h\| \leq \rho \Longrightarrow \|\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(h)\| \leq \epsilon$.

On a alors :

$$\|g(\vec{h}) - g(0)\| \leq \|g(\vec{h}) - g(0, h_2)\| + \|g(0, h_2) - g(0)\|.$$

Maintenant on peut appliquer le Théorème de la moyenne à $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(t, h_2) \in F$ entre 0 et h_1, ce qui donne, puisque la différentielle en t de cette dernière application est $T \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(t, h_2) \cdot T$ et $[\vec{h}, (0, h_2)] \subset B_\rho$:

$$\|g(\vec{h}) - g(0, h_2)\| \leq \sup_{\xi \in [\vec{h}, (0, h_2)]} |\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi) h_1| \leq \epsilon.|h_1|.$$

D'autre part l'existence de $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0)$ donne la majoration :

$$\|g(0, h_2) - g(0)\| \leq 0.|h_2| + |h_2|.\|p_0(0, h_1)\|, \quad \text{où } p_0(x) \to 0 \ \text{ quand } x \to 0.$$

On en déduit :

$$\|g(\vec{h}) - g(0)\| \leq \epsilon.|h_1| + 0.|h_2| + |h_2|.\|p_0(0, h_1)\| \leq \|\vec{h}\|.(\epsilon + \|p_0(0, h_2)\|),$$

c'est-à-dire :

$$\|f(a+\vec{h})-f(a)-[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2]\| \leq \|\vec{h}\|.(\epsilon+\|p_0(0,h_2)\|),$$

qui est la définition de la différentiabilité de f en a.

Montrons maintenant $2.i$.

Par récurrence sur k. Si f est k-fois différentiable en a, alors Df est $(k-1)$-fois différentiable en a et admet par conséquent ses dérivées partielles d'ordre $k-1$ en a, et comme de plus $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\Psi_j\circ Df$, pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet ses dérivées partielles d'ordre $k-1$ en a.

En ce qui concerne la formule, montrons-la pour $k=2$ seulement.

On a : $Df=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\psi_j\circ\frac{\partial f}{\partial x_j}$, donc :

$$D^2f_{(a)}=\sum_{j=1}^{n}\psi_j\circ D\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j\circ\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j}(a)\circ\pi_k,$$

c'est-à-dire que :

$$D^2f_{(a)}(\vec{h}_2,\vec{h}_1)=[D^2f_{(a)}(\vec{h}_2)](\vec{h}_1)=$$

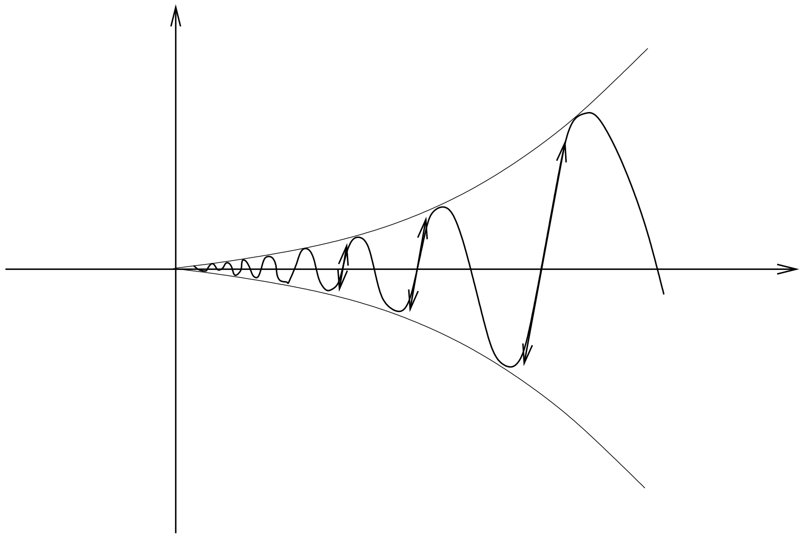
$$(\sum_{j=1}^{n}\psi_j[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j}(a)h_2^k])(\vec{h}_1)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j}(a)h_2^k h_1^j.$$

Montrons $2.ii$ aussi par récurrence sur k. Si f est $\mathcal{C}^k$, Df est $\mathcal{C}^{k-1}$, et par hypothèse de récurrence, ses dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont continues sur Ω. D'aprés la formule ci-dessus, les $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\ldots\partial x_{j_1}}$ sont continues sur Ω. Réciproquement, supposons que f admette toutes ses dérivées partielles continues en a, sauf éventuellement une qui n'existe qu'en a et montrons qu'alors $D^kf_{(a)}$ existe. La preuve se fait encore par récurrence sur k. Comme les dérivées partielles de f existent toutes et sont continues en a sur Ω, Df existe sur Ω, et on a : $Df=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\psi_j\circ\frac{\partial f}{\partial x_j}$. On déduit de cette formule que Df admet toutes ses dérivées partielles d'ordre $k-1$ continues en a, comme les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Par hypothèse de récurrence, Df est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ en a, i.e. f est $\mathcal{C}^k$ en a. $\square$

Remarque : Une fonction peut bien sûr être différentiable sur un ouvert sans que ses dérivées partielles soient continues. Autrement dit la réciproque du $1.iii$ dans le Théorème 2.10 n'a pas lieu. Par exemple, lorsque $E=F=\mathbb{R}$, dérivée et dérivée partielle coïncident. Considérons alors $f(t)=t^2\sin(\frac{1}{t})$, définie en 0 par $f(0)=0$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, de dérivée nulle en 0, comme on s'en assurera en calculant le taux d'accroissement de f en 0.

Mais $f'(t)$ ne tend pas vers $f'(0)=0$, lorsque t tend vers 0.

On peut "voir" cette propriété de la façon suivante : le graphe de f est compris entre l'axe Ox des abscisses et celui de $y=x^2$. Il "s'écrase" donc sur Ox en 0, c'est-à-dire que f est dérivable en 0. Cependant, le graphe de f oscille entre Ox et celui de $y=x^2$ de telle sorte que les pentes des tangentes au graphe de f ne tendent pas à être horizontales près de l'origine.



Théorème 2.11. (Théorème de Schwarz) — *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$, Ω un ouvert de E et $a \in \Omega$. On considère une application $f : \Omega \to F$, qui admet en a une différentielle d'ordre $k \geq 1$. Alors l'application $D^k f_{(a)} : E^k \to F$ est une application k-linéaire* **symétrique**; *c'est-à-dire que pour tout $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k \in E$, et pour toute permutation σ de k éléments :*

$$D^k f_{(a)}(\vec{h}_k, \ldots, \vec{h}_1) = D^k f_{(a)}(\vec{h}_{\sigma(k)}, \ldots, \vec{h}_{\sigma(1)}) \tag{4}$$

En particulier, losque E est de dimension finie n, pour tout $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$,

✓
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \partial x_{j_{\sigma(2)}} \ldots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}(a) \tag{5}$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur k. Pour $k = 1$, il n'y a rien à prouver. Pour $k = 2$ la preuve se fait de la façon suivante. On montre :

$$\lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t^2}[\delta_t(\vec{h}, \vec{k}) - D^2 f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h})] = 0,$$

où $\delta_t(\vec{h}, \vec{k}) = f(a + t\vec{h} + t\vec{k}) - f(a + t\vec{h}) - f(a + t\vec{k}) + f(a)$ est une quantité symétrique en $\vec{h}$ et $\vec{k}$. Pour cela on procède ainsi :

Posons $E \ni \vec{h} \to g_t(\vec{h}) = f(a + t\vec{h} + t\vec{k}) - f(a + t\vec{h}) - t^2 D^2 f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h}) \in F$. On a $g_t(\vec{h}) - g_t(0_E) = \delta(\vec{h}, \vec{k}) - t^2 D^2 f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h})$. On peut supposer, $\vec{h}$ et $\vec{k}$ étant fixés, que t est suffisamment petit pour que $a + t\vec{h} + \vec{k}$, $a + t\vec{k}$ et $a + t\vec{h}$ soient dans une même boule centrée en a et incluse dans Ω. On peut alors appliquer le Théorème de la moyenne sur cette boule :

$$\|\delta_t(\vec{h}, \vec{k}) - t^2 D^2 f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h})\| = \|g_t(\vec{h}) - g_t(0_E)\| \leq \sup_{\zeta \in [0_E]} \|Dg_{t(\zeta)}\|.\|\vec{h}\|.$$

Mais

$$Dg_{(\zeta)} = t(Df_{(a+t\vec{k}+t\zeta)} - Df_{(a+t\zeta)}) - t^2 D^2 f_{(a)}(\vec{k})$$

$$= t(Df_{(a+t\vec{k}+t\zeta)} - Df_{(a)} + Df_{(a)} - Df_{(a+t\zeta)}) - t^2D^2f_{(a)}(\vec{k})$$

$$= t[tD^2f_{(a)}(\vec{k}+\zeta) - tD^2f_{(a)}(\zeta) + |t|.\|\vec{k}+\zeta\|p_a(t\vec{k}+t\zeta) + |t|.\|\zeta\|q_a(t\zeta) - tD^2f_{(a)}(\vec{k})]$$

Donc

$$\|Dg_{t(\zeta)}\| = |t|^2.\| \ \|\vec{k}+\zeta\|p_a(t\vec{k}+t\zeta) + \|\zeta\|q_a(t\zeta)\ \|.$$

On en conclut que

$$\lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t^2}[\delta_t(\vec{h},\vec{k}) - D^2f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h})] = 0,$$

et donc par symétrie de $\delta_t(\vec{h},\vec{k})$ en $\vec{h}$ et $\vec{k}$, on a bien $D^2f_{(a)}(\vec{k})(\vec{h}) = D^2f_{(a)}(\vec{h})(\vec{k})$.

On prouve la symétrie des différentielles d'ordre supérieur par récurrence sur l'ordre, en utilisant le résultat que l'on vient de prouver et la décomposition des permutations en certaines permutations.

Enfin, on prouve (5) en imposant $\vec{h}_\ell = (h^1_\ell = 0,\dots,0,h^{j_\ell}_\ell = 1,0,\dots,0)$, pour tout $\ell\in\{1,\dots,k\}$ dans (4) et en utilisant (3). $\square$

Corollaire 2.12. — *Soient E un espace vectoriel normé réel de dimension finie n, F un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert de E et $f:\Omega\to F$ une application admettant une différentielle seconde en $a\in\Omega$. Une base $\mathcal{B}$ de E étant fixée, par la formule 3, quel que soit $\vec{h}$ et $\vec{k}$ dans E, on a, en écrivant $\vec{h}=(h^1,\dots,h^n)$ et $\vec{k}=(k^1,\dots,k^n)$, les coordonnées de $\vec{h}$ et $\vec{k}$ dans $\mathcal{B}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ les dérivées partielles relativement à cette base :*

$$(D^2f_{(a)}(\vec{k}))(\vec{h}) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\ k^jh^i =$$

$$(\,h^1\ \ \dots\ \ h^n\,)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k^1\\ \vdots\\ k^n\end{pmatrix}$$

La matrice carrée $n\times n$ ci-dessus est appellée le Hessien de f en a relativement à la base $\mathcal{B}$, on la note $\mathcal{H}(f)^{\mathcal{B}}_{(a)}$.

La formule (5) du théorème précédent montre que la matrice $\mathcal{H}(f)^{\mathcal{B}}_{(a)}$ est une matrice symétrique, et par conséquent $\mathcal{H}(f)^{\mathcal{B}}_{(a)}$ est orthogonalement diagonalisable : il existe $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle, d'inverse ${}^tP$ et une matrice diagonale $\Delta_{(a)}$ telles que $\mathcal{H}(f)^{\mathcal{B}}_{(a)} = {}^tP\Delta_{(a)}P$.

En notant $(H^1,\dots,H^n) = {}^t(P\begin{pmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix})$ et $\begin{pmatrix}K^1\\ \vdots\\ K^n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}k^1\\ \vdots\\ k^n\end{pmatrix}$, on obtient alors :

$$(D^2f_{(a)}(\vec{k}))(\vec{h}) = (H^1,\dots,H^n)\ \Delta_{(a)}\begin{pmatrix}K^1\\ \vdots\\ K^n\end{pmatrix}.$$

Si l'on note $\mathcal{B}'$ la base de E dont les éléments sont les images par P de ceux de $\mathcal{B}$, $\begin{pmatrix}H^1\\ \vdots\\ H^n\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}K^1\\ \vdots\\ K^n\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{h}$ et $\vec{k}$ dans $\mathcal{B}'$, et l'égalité précédente montre que $\mathcal{H}(f)^{\mathcal{B}'}_{(a)} = \Delta_{(a)}$. $\square$

Exercices du chapitre 2

Exercice 19. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie pour* $(x,y) \neq 0$ *par* $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ *et* $f(0,0) = 0$.

i- Etudier la continuité de f *en* $(0,0)$.

ii- Calculer les dérivées partielles de f *en* $(0,0)$, *et en un point* $(x,y) \neq (0,0)$. *sont-elles continues sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

iii- Etudier l'existence des dérivées directionnelles de f *en* (a,b), *suivant le vecteur* $\vec{h} = (h,k)$. *Si elle existe, l'application* $\vec{h} \longrightarrow D_{\vec{h}} f_{(a,b)}$ *est-elle linéaire ?*

iv- Mêmes questions avec $f(x,y) = \dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}$, *si* $x \neq 0$, *et* $f(0,y) = 0$.

Exercice 20. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par:* $f(x,y) = \dfrac{|y|(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2+y^2}$, *si* $(x,y) \neq (0,0)$, *et* $f(0,0) = 0$.

i- Montrer que f *est continue en* $(0,0)$.

ii- Montrer que toutes les dérivées directionnelles de f *en* $(0,0)$ *sont nulles.*

iii- Montrer cependant que f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

iv- Retrouver géométriquement que f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$, *en montrant qu'il existe une courbe tracée sur le graphe de* f *dans* $\mathbb{R}^3$ *qui ne s'aplatit pas à l'origine sur le plan* $xOy \subset \mathbb{R}^3$. *(ind. penser aux coordonées polaires).*

Exercice 21 (Suite de l'exercice 16). *Soit* $E = C_0$ *l'espace vectoriel des suites convergeant vers* 0, *muni de la norme* $\nu((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

i- Vérifier que ν *est bien une norme sur* E.

ii- Etudier la question de la différentiabilité de $\nu : E \to \mathbb{R}$. *Pour cela commencer par montrer que quelle que soit la suite* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\nu(a) = |a_{n_0}|$, *puis montrer que* ν *est différentiable en* a *si et seulement si* $\nu(a)$ *est atteint en un seul indice* n_0.

iii- Montrer que ν *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'ouvert* $\Omega = \{a \in E; \nu(a)$ *n'est atteint qu'en un seul indice*$\}$ *et que* $D^k\nu$ *est nulle sur* Ω, *pour tout* $k \geq 2$.

iv- Grâce au Théorème de la moyenne, montrer une inégalité triangulaire localement dans Ω *(i.e. pour* $x, y \in \Omega$ *suffisamment proches l'un de l'autre).*

v- Montrer que l'ouvert Ω *est dense dans* E.

Exercice 22. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés (sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*),* Ω *un ouvert de* E, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to F$ *et* $g : \Omega \to F$ *deux applications différentiables en* a.

i- Une application linéaire de E *dans* F *est-elle différentiable ? Si c'est le cas quelle est sa différentielle ?*
Etudier la différentiabilité de l'application $\varphi : (C_0([0;1];\mathbb{K}), \| \ \|_\infty) \ni f \mapsto \int_{[0;1]} f(t)dt \in \mathbb{K}$.

ii- Montrer que $f + g$ *est différentiable en* a *et calculer sa différentielle.*

iii- Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.f$ *est différentiable.*

iv- Conclusion ?

Exercice 23 (Applications à valeurs dans un produit). *Soient* $E, F_1, \ldots, F_m$, *des espaces vectoriels normés (sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*),* Ω *un ouvert de* E, $a \in \Omega$ *et soit pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$, $f_j : \Omega \to F_j$ *une application différentiable en* a. *On définit* $f : \Omega \to F = F_1 \times \ldots \times F_m$ *par :* $\forall x \in \Omega, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$.

i- Montrer que f *est différentiable en* a *et calculer sa différentielle.*

ii- Soit $g : \Omega \to F$ *une application et soient* $\pi_j : F \to F_j$ *la* j^e *projection canonique.*
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que g *soit différentiable.*

Exercice 24. Grâce au Théorème des applications composées, retrouver le résultat de 22.*iv*.

Exercice 25. *Soit* $(E, (\ |\ ))$ *un espace préhilbertien réel et* $\nu(x) = \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ *la norme de* E. *Montrer que* $\nu : E \setminus \{0_E\} \to \mathbb{R}$ *est une application* $\mathcal{C}^\infty$ *et calculer* $D^2\nu_{(x)}$ *pour tout* $x \in E \setminus \{0_E\}$. *À l'aide du Théorème* *de la moyenne, démontrer la seconde inégalité triangulaire.*

Exercice 26 (Suite de l'exercice 14). *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, et soit $f : E \times E \to E$ définie par $f(x,y) = (\sin(x_n \cdot y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D^2 f_{(x,y)}$.*

Exercice 27 (Différentielle du déterminant). *Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $Gl_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices inversibles.*

1.*i- Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isométrique à $\mathbb{R}^{n^2}$.*

1.*ii- Calculer les dérivées partielles de $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, montrer qu'elles sont continues.*

1.*iii- Calculer la différentielle de $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en $P \in Gl_n(\mathbb{K})$.*

1.*iv- Montrer que $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2- *On considère $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n$, qui à une matrice associe ses colonnes. En posant $\widetilde{\det} \circ \Phi = \det$, retrouver que $\det$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle.*

Exercice 27.a. (calcul de différentielle seconde à l'aide du théorème des applications composées. Calculer la différentielle seconde de $f(x,y) = 1 + x(y^2 + 2)$.

Exercice 27.b. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, $\mathcal{U}$ un ouvert de F et $f : \Omega \to \mathcal{U}$, $g : \mathcal{U} \to G$ deux applications deux fois différentiables.*

i- Soit $B : \mathcal{L}(F;G) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(E;G)$ définie par $B(V,U) = V \circ U$. Montrer que B est $\mathcal{C}^\infty$.

ii- Exprimer $D(g \circ f)$ en fonction de B, Df, Dg et f.

iii- Calculer $D^2(g \circ f)_{(x)}$ et retrouver l'expression de $(g \circ f)''(x)$, lorsque $E = F = G = \mathbb{R}$.

Exercice 27.c. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application admettant en un point $a \in \Omega$ une différentielle d'ordre 2. Soit $\vec{h} \in E$.*

i- Montrer que $D_{\vec{h}} f : \Omega \ni x \mapsto D_{\vec{h}} f_{(x)} \in F$ est différentiable en a.

ii- Calculer $D(D_{\vec{h}} f)_{(a)}$.

iii- En déduire $D^2 \mathrm{L}_{(x_1,\cdots,x_n)}$ lorsque $\mathrm{L} : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est n linéaire continue. En déduire également $D^2 f_{(a)}$, lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en a.

iv- Retrouver la différentielle seconde de l'application de l'exercice 27.a.

Exercice 27.d. (Ensembles négligeables et applications $\mathcal{C}^1$) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$,une application $\mathcal{C}^1$.*

1.*i- Montrer que l'image par f d'un ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$, de mesure de Lebesgue nulle, est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^p$.*

1.*ii- en déduire que si $p > n$, $f(\Omega)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$.*

On propose de retrouver le résultat de 1.ii. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

2.*i- Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, tel que pour tout $\epsilon > 0$, on puisse recouvrir $\Gamma_k = f([-k,k])$ par des boules $(B_j^\epsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^m$, telles que $\mathrm{diam}(B_j^\epsilon) \leq \epsilon$ et $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_j) \leq \lambda$.*

2.*ii- Montrer que $\sum_{j\in\mathbb{N}} [\mathrm{diam}(B_j^\epsilon)]^m \leq \epsilon^{m-1}. \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_j^\epsilon)$.*

2.*iii- En déduire qu'il existe une constante $c(m)$ ne dépendant que de m et un recouvrement de Γ_k par des pavés $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tels que $\sum_{j\in\mathbb{N}} mes(P_j) \leq c(m).\epsilon^{m-1}.\lambda$.*

2.*iv- En conclure que $f(\mathbb{R})$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

2.*v- Que dire du cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > n$, avec f de classe (au moins) 1 ?*

Corrigé des exercices du chapitre 2

Exercice 18. Notons $\Phi : F \to \mathbb{R}^m$ l'isomorphisme linéaire qui identifie F à $\mathbb{R}^m$ canoniquement grâce à la base $\mathcal{E}_F$, ie $\Phi(y = \sum_{j=1}^{m} y_j.\vec{\epsilon}_j) = (y_1, \dots, y_m)$. L'application Φ est l'application qui associe à un vecteur de F ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}_F$. Cette application est bien sûr **linéaire** et **bijective**. Comme F et $\mathbb{R}^m$ sont de **dimension finie** m, Φ et Φ^{-1} sont **continues**. On en conclut que Φ et Φ^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$ (Théorème 1.5). Remarquons que :

$$f = \Phi^{-1} \circ (f_1, \dots, f_m) \qquad (*)$$

$$\Phi \circ f = (f_1, \dots, f_m) \qquad (**)$$

Maintenant $(f_1, \dots, f_m)$ est différentiable en a (resp. $\mathcal{C}^k$) ssi chacune de ses composantes f_j est différentiable en a (resp. $\mathcal{C}^k$) (Théorème 2.3 et Exercice 23). Puisque Φ et Φ^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$, $(*)$ et $(**)$ montrent que f est différentiable en a (resp. $\mathcal{C}^k$) ssi $(f_1, \dots, f_m)$ est différentiable en a (resp. $\mathcal{C}^k$) ssi chaque f_j est différentiable en a (resp. $\mathcal{C}^k$).

Exercice 19. $i-$ Pour tout $(x, y) \neq 0$, on a : $|f(x, y)| \leq |x||y^2|/(|x^2| + |y|^2) \leq |x| \leq \|(x, y)\|_\infty$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)| = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, ce qui signifie que f est continue en $(0, 0)$.

$ii-$ On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0\,.$$

Pour tout $(x, y) \neq 0$, on a $x^2 + y^2 \neq 0$ et on peut utiliser les formules usuelles pour calculer les dérivées partielles de f en (x, y). On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$iii-$ Pour tout vecteur (h, k) de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = f(h,k).$$

Donc la fonction dérivée directionnelle en zéro $(h, k) \mapsto D_{\vec{h}} f_{(0,0)} = f(h, k)$ est bien définie et est clairement non-linéaire. Or si f était différentiable en $(0, 0)$, par la Proposition 1.2, l'application $\vec{h} \mapsto D_{\vec{h}} f_{(0,0)} = f(h, k)$ serait la différentielle $\vec{h} \mapsto Df_{(0,0)}(\vec{h})$, qui est linéaire. On en conclut que f n'est pas différentiable en a.

Par le **Théorème 2.10**, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, car ses dérivées partielles y sont définies et **continues**. Par suite, par la **proposition 1.2**, si $(a, b) \neq 0$, alors f admet des dérivées directionnelles suivant toutes les directions et pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a $Df_{(a,b)}(h, k) = D_{(h,k)} f_{(a,b)}$.

$iv-$ f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$. Par ailleurs, si $y \neq 0$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x, y) = 0 = f(0, y)$ et donc f est continue en $(0, y)$. Enfin, on a $\lim_{x\to 0}(x, e^{-1/x^2}) = (0, 0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x, e^{-1/x^2}) = 1/2 \neq f(0, 0)$, dont on déduit que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Les dérivées partielles de f sont définies sur la droite $\{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$. En effet, si y, h sont des réels non-nuls, alors

$$\left|\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h}\right| \leq \frac{1}{|y|} h e^{-1/h^2}$$

Dont on déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$. Comme $f(x, 0) = 0$ pour tout x, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Enfin, pour tout réel y, on a $f(0, y) = 0$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$.

Les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$ privé de $\{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}$. En effet, comme $(x,y) \mapsto y^2+e^{-1/x^2}$ **ne s'y annule pas**, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2ye^{-1/x^2}(y^2 - e^{-2/x^3})}{x^3(y^2+e^{-2/x^2})^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(e^{-2/x^2} - y^2)e^{-1/x^2}}{(y^2+e^{-2/x^3})^2}\,.$$

Les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En effet, pour $y \neq 0$, on a $\lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, ce qui signifie que les dérivées partielles sont continues en $(0,y)$. Les dérivées partielles ne sauraient être continues en $(0,0)$, car alors f serait **différentiable** en $(0,0)$ par le **Théorème 2.10**, ce qui n'est pas le cas puisque f n'est pas continue en $(0,0)$.

Comme dans *iii*, on peut en conclure que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et que par suite l'application dérivée directionnelle est bien définie en tout point $(a,b) \neq (0,0)$, et égale à $Df_{(a,b)}$. On calcule directement que l'application dérivée directionnelle à l'origine est nulle.

Exercice 20. *i*- On a pour tout $(x,y) \neq (0,0$ l'inégalité $(x^2+y^2)^2+y^2 \geq 2(x^2+y^2)|y|$, dont on déduit que

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y|(x^2+y^2)^{3/2}}{2(x^2+y^2)|y|} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

donc f est continue en $(0,0)$.

ii- Pour tout vecteur (h,k), on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{|h|(h^2+k^2)^{3/2}}{t^2(h^2+k^2)^2+k^2} = 0\,,$$

et la dérivée directionnelle selon (h,k) est nulle.

iii- On a

$$\frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|_2} = \frac{|y|(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2+y^2} = p(x,y)$$

Or, on a $\lim_{x\to 0} p(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2+x^4)}{(x^2+x^4)^2+x^4} = 1$, ce qui prouve que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

iv- Considérons l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t,t^2)$, elle est différentiable en 0 et définit une courbe sur le graphe de f. Si f était différentiable en 0, alors $f \circ \gamma$ serait aussi différentiable, c'est-à-dire dérivable, en 0. Or $f \circ \gamma(t) = \frac{t^2(t^2+t^4)^{3/2}}{(t^2+t^4)^2+t^4}$ pour tout $t \neq 0$ et f est équivalente à $t \mapsto |t|$ au voisinage de 0, qui n'est pas dérivable en 0.

Exercice 21. *i*- Vérifier que ν est bien une norme est sans difficulté.

ii- Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Si $\nu(a) = 0$, alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \nu(a) = 0$. Sinon, comme a est une suite de limite nulle, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq \nu(a)/2$. Nécessairement $\nu(a) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} = \max_{n\in\{1,\ldots,N-1\}}\{|a_n|\}$, et ce max est atteint en $n_0 \in \{1,\ldots,N-1\}$.

• Supposons que $\{j \in \mathbb{N}; \nu(a) = |a_j|\} = \{n_0\}$ et montrons qu'alors ν est différentiable en a.

Commençons par remarquer que $\delta = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|a_{n_0}| - |a_n|\} > 0$. En effet, si tel n'était pas le cas il existerait une suite $(a_{n_k})_{(k\in\mathbb{N})}$ telle que $|a_{n_k}| \to |a_{n_0}|$ quand $k \to \infty$. Or puisque pour $n \geq N$, $|a_n| \leq \nu(a)/2$, on aurait l'existence d'un entier K tel que $\forall k \geq K, a_{n_k} \in \{a_0,\ldots,a_{N-1}\}$. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n_0}| \neq |a_n|$, on obtiendrait une contradiction. Soit maintenant $\vec{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tel que $\nu(\vec{h}) \leq \delta/2$. On a :

$$\nu(a+\vec{h}) = |a_{n_0} + h_{n_0}|. \qquad (*)$$

En effet, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|a_n + h_n| \leq |a_n| + |h_n| \leq |a_n| + \nu(\vec{h}) \leq |a_n| + \delta/2$ et $|a_{n_0} + h_{n_0}| \geq |a_{n_0}| - |h_{n_0}| \geq |a_{n_0}| - \delta/2$. Or $|a_n| + \delta/2 \leq |a_{n_0}| - \delta/2$, puisque $\delta \leq |a_{n_0}| - |a_n|$, ce qui prouve $(*)$.

On obtient ainsi par $(*)$, $\forall \vec{h} \in E$ tel que $\nu(\vec{h}) \leq \delta/2$, $\nu(a+\vec{h}) - \nu(a) = |a_{n_0} + h_{n_0}| - |a_{n_0}|$. Mais, puisque par hypothèse $a \neq 0_E$ (sinon $\nu(a)$ n'est pas atteint qu'une seule fois), $a_{n_0} \neq 0$. La dérivabilité de la valeur absolue en $a_{n_0} \neq 0$ ($(t \to |t|)'(t = a_{n_0}) = 1$ si $a_{n_0} > 0$, et -1 si $a_{n_0} < 0$) montre qu'existe une application q de limite nulle en a_{n_0} telle que : $|a_{n_0} + h_{n_0}| - |a_{n_0}| = sg(a_{n_0}).h_{n_0} + |h_{n_0}|.q(h_{n_0})$. On a noté $sg(a_{n_0})$ le signe de a_{n_0}, c'est-à-dire 1 ou -1 selon que $a_{n_0} > 0$ ou $a_{n_0} < 0$. Observons que si l'on pose $\nu(\vec{h}).p_a(\vec{h}) = |h_{n_0}|.q(h_{n_0})$, ou encore $p_a(\vec{h}) = \dfrac{|h_{n_0}|}{\nu(\vec{h})}.q(h_{n_0})$, la fonction p_a est de limite nulle lorsque $\nu(\vec{h}) \to 0$, car le rapport $\dfrac{|h_{n_0}|}{\nu(\vec{h})}$ est majoré par 1 et $\nu(\vec{h}) \to 0$ implique $|h_{n_0}| \to 0$ qui implique à son tour $q(h_{n_0}) \to 0$. En conclusion : $\forall \vec{h} \in E$ tel que $\nu(\vec{h}) \leq \delta/2$, on a :

$$\nu(a + \vec{h}) - \nu(a) = sg(a_{n_0}).h_{n_0} + \nu(\vec{h}).p_a(\vec{h}),$$

avec $p_a(\vec{h}) \to 0$ quand $\vec{h} \to 0$. Si l'on montre que l'application linéaire $\mathrm{L} : E \ni \vec{h} \to \mathrm{L}(\vec{h}) = sg(a_{n_0}).h_{n_0} \in \mathbb{R}$ est continue on aura prouvé la différentiabilité de ν en a. $|\mathrm{L}(\vec{h})| = |h_{n_0}| \leq \nu(\vec{h})$, donc $\Lambda = 1$ convient dans la caractérisation de la continuité des applications linéaires du Théorème 0.1.v.

• Supposons maintenant que $\{j \in \mathbb{N}; \nu(a) = |a_j|\}$ n'est pas un singleton et montrons alors que ν n'est pas différentiable en a.

Il existe par hypothèse j et k, $j \neq k$ tels que $|a_j| = |a_k| = \nu(a)$. Soit $\vec{e}_k \in E$ la suite n'ayant pour termes que des 0 excepté au rang k où son terme est 1. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_k > 0$. On a alors $|a_k + t| > |a_k| = \nu(a_k)$ pour $t > 0$ et $|a_k + t| < |a_k| = |a_j| = \nu(a)$, pour $t < 0$ assez petit. On en déduit que : $\nu(a + t\vec{e}_k) - \nu(a) = 0$ si $t < 0$ et $\nu(a + t\vec{e}_k) - \nu(a) = |a_k + t| - |a_k|$ si $t > 0$. En conséquence, la dérivée directionnelle à gauche ($t < 0$) de ν en a selon la direction $\vec{e}_k$ est nulle, mais cette même dérivée directionnelle à droite ($t > 0$) vaut $sg(a_k) = +$ ou -1. La dérivée directionnelle de ν en a selon la direction $\vec{e}_k$ n'existe donc pas, et ν ne peut donc pas être différentiable en a.

iii- On a vu à la question précédente que l'ensemble des points $a \in E$ pour lesquels $\nu(a)$ n'est atteint qu'en un seul indice est un ouvert de E, car on a montré, avec les notations de la question précédente, que $a + \vec{h}$ est encore dans cet ensemble, dès que $\nu(\vec{h}) \leq \delta/2$. On note Ω cet ouvert, et on dispose alors de l'application différentielle : $D\nu : \Omega \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$, qui est définie par $D\nu_{(a)}(\vec{h}) = sg(a_{n_0}).h_{n_0}$, avec n_0 le seul indice en lequel $\nu(a)$ est atteint. Notons $\alpha : \Omega \to \mathbb{N}$ l'application

qui à a associe $\alpha(a) = n_0$. D'après la question précédente, cette application est localement constante sur Ω ($\nu(a + \vec{h}) = |a_{\alpha(a)} + h_{\alpha(a)}|$, dès que $\nu(\vec{h}) \leq \delta/2$). Donc $D\nu$ est l'application localement constante $\Omega \ni a \to sg(a_{\alpha(a)}).\pi_{\alpha(a)}$, où $\pi_j : E \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire qui à une suite associe son terme de rang j. Il s'ensuit que $D\nu$ est différentiable sur Ω et que sa différentielle est nulle. Ainsi ν est $\mathcal{C}^\infty$ et $D^k\nu = 0_{\mathcal{L}(E,\ldots,E;\mathbb{R})}$ dès que $k \geq 2$.

iv- Soient a, b tous les deux dans une même boule $B \subset \Omega$. On a quel que soit $\vec{h} \in E$, quel que soit $\xi \in [a, b]$, $|D\nu_{(\xi)}(\vec{h})| = |sg(\xi_{\alpha(\xi)}).h_{\alpha(\xi)}| \leq \nu(\vec{h})$. On en déduit que $\|D\nu_{(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq 1$. Par le Théorème de la moyenne : $|\nu(a) - \nu(b)| \leq \nu(a - b)$.

v- Soit $\vec{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Si $\vec{x} = 0_E$, on considère la suite $(\vec{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E définie par $\vec{X}_n = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \ldots)$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{X}_n \in \Omega$ et $\nu(\vec{X}_n) = 1/n \to 0$. Donc $\vec{X}_n \to 0_E$. Supposons maintenant que $\nu(x)$ soit atteint aux rangs $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. (en nombre nécessairement fini si $\vec{x} \neq 0_E$). Soit alors $\delta = \min_{j\in\{1,\ldots,n_k\}, j\neq n_1,\ldots,n_k} \nu(\vec{x}) - |x_j|$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $1/N < \delta/2$. On considère alors la suite $(\vec{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de Ω définie par : $\forall n > N$, $\vec{X}_n = \vec{x} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{sg(x_{n_j})}{n+j}\vec{e}_{n_j}$. On vérifie facilement que $\vec{X}_n$ est dans Ω et comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{sg(x_{n_j})}{n+j}\vec{e}_{n_j} = 0_E$, on en conclut que Ω est dense dans E.

Exercice 22. *i*- Une application **linéaire** L est **différentiable** ssi elle est **continue** (Proposition 1.5). Dans ce cas, quel que soit le point en lequel on calcule sa différentielle, celle-ci vaut L. Autrement dit $D\mathrm{L} : a \mapsto D\mathrm{L}_{(a)}$ est **constante**. L'application φ est linéaire ($\int(f + \lambda.g) = \int f + \lambda.\int g$). Regardons sa continuité. L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K})$ étant muni de la norme $\| \|_\infty$, on a : $|\displaystyle\int_{[0,1]} f(t)\,dt| \leq \int_{[0,1]} |f(t)|\,dt \leq \int_{[0,1]} \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty$. Ce qui donne la continuité de φ.

ii La différentiabilité de $f+g$. Notons qu'ici on somme deux applications, c'est-à-dire que l'on voit l'ensemble $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$ des applications de Ω à valeurs dans F comme un groupe (ou mieux un espace vectoriel) muni d'une loi $+_{\mathcal{E}_{\Omega\to F}}$. La somme $+_{\mathcal{E}_{\Omega\to F}}$ des deux applications f et g est une nouvelle application de $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$ défini par : $f +_{\mathcal{E}_{\Omega\to F}} g : \Omega \ni x \mapsto (f+g)(x) := f(x) +_F g(x) \in F$, où $+_F$ est la loi de groupe de F. Par commodité on note $f+g$, mais il faut garder en tête que $+_{\mathcal{E}_{\Omega\to F}}$ n'est pas $+_F$, même si la loi additive $+_{\mathcal{E}_{\Omega\to F}}$ sur $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$ est directement héritée de la loi additive $+_F$ de F ! Ces précisions étant faites,

$$(f+g)(x)-(f+g)(a) = f(x)+g(x)-(f(a)+g(a)) = [f(x)-f(a)]+[g(x)-g(a)]$$
$$= [Df_{(a)}(x-a)+\|x-a\|.p_a(x)]+[Dg_{(a)}(x-a)+\|x-a\|.q_a(x)]$$
$$= Df_{(a)}(x-a)+Dg_{(a)}(x-a)+\|x-a\|.p_a(x)+\|x-a\|.q_a(x)$$
$$= (Df_{(a)}+Dg_{(a)})(x-a)+\|x-a\|.(p_a+q_a)(x).$$

L'application $Df_{(a)}+Dg_{(a)}$ étant linéaire continue (en tant que somme d'applications linéaires continues) et l'application p_a+q_a tendant vers 0_F lorsque x tend vers a, on en conclut que $f+g$ est différentiable en a, de différentielle : $Df_{(a)}+Dg_{(a)}$.

iii- Même argumentation pour l'application $\lambda.f$, qui est différentiable en a, de différentielle $\lambda.Df_{(a)}$.

iv- On en conclut que l'ensemble des applications de $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$ qui sont différentiables en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$.

Exercice 23. *i*- Pour tout $j\in\{1,\dots,m\}$ soit $q_j : F_j \to F$ définie par pour tout $y\in F_j$, $q_j(y) = (0_{F_1},\dots,0_{F_{j-1}},y,0_{F_{j+1}},\dots,0_{F_m}) \in \{0_{F_1}\}\times\ldots\times\{0_{F_{j-1}}\}\times F_j\times\{0_{F_{j+1}}\}\times\ldots\times\{0_{F_m}\}\subset F$. q_j est trivialement **linéaire** et comme $\|q_j(y)\|_F = \max_{k\neq j}(\|0_{F_k}\|_{F_k},\|y\|_{F_j}) = \|y\|_{F_j}$, q_j est **continue**, donc $\mathcal{C}^\infty$. Le **Théorème des applications composées** assure alorsla

différentiabilité de $q_j\circ f_j$ en a, et comme $f=\sum_{j=1}^m q_j\circ f_j$ est différentiable en a, par la Proposition 2.2, f est bien différentiable en a, de différentielle $Df_{(a)} = \sum_{j=1}^m q_j\circ Df_{j(a)} = (Df_{1(a)},\dots,Df_{m(a)}) : E\to F$.

ii- L'application π_j est **linéaire** et **continue** ($\|q_j(y_1,\dots,y_m)\|_{F_j} = \|y_j\|_{F_j} \le \|y\|_F = \max_{k=1,\dots,m}\|y_k\|_{F_k}$.) On en conclut que π_j est différentiable quel que soit $j\in\{1,\dots,m\}$. Il en est alors de même de $q_j\circ g = g_j$, la $j$eme composante de g, en a, dès que g est différentiable en a. *i* et *ii* ensemble donnent le Théorème 2.3.

Exercice 24. Montrons que l'ensemble des applications de $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$ qui sont différentiables en a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_{\Omega\to F}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et soient
$$\sigma : \begin{array}{ccc} F\times F & \to & F \\ (y,z) & \mapsto & y+z \end{array} \quad \text{et } \Lambda : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ z & \mapsto & \lambda.z \end{array}$$

Ces deux applications sont trivialement **linéaires** et :

$$\|\sigma(y,z)\|_F = \|y+z\|_F \le \|y\|_F+\|z\|_F \le 2\|(y,z)\|_{F\times F} = \max(\|y\|_F,\|z\|_F),$$

puis $\|\Lambda(z)\|_F = |\lambda|.\|z\|_F$, donc σ et Λ sont **continues** et donc $\mathcal{C}^\infty$ (Proposition 1.5). Par le Théorème 2.3 (cf l'Exercice 23) l'application (f,g) est différentiable en a. Comme $f+g=\sigma\circ(f,g)$ et $\lambda.f=\Lambda\circ f$, le **Théorème des applications composées** donne la différentiabilité de $f+g$ et de $\lambda.g$ en a.

Exercice 25. Le **Théorème des fonctions composées**, appliqué aux fonctions : $r:\mathbb{R}_+^*\ni t\to r(t)=\sqrt{t}\in\mathbb{R}$, $B : E\times E\ni(x,y)\to B(x,y)=(x|y)\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{L} : E\ni x\to \mathrm{L}(x)=(x,x)\in E\times E$ assure que ν est différentiable sur $E\setminus\{0_E\}$. En effet : L'application $\mathrm{L}=(Id_E,Id_E)$ est **linéaire continue**, donc $\mathcal{C}^\infty$, l'application B est par hypothèse bilinéaire. Sa continuité résulte de **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|B(x,y)|\le\|x\|.\|y\|$. On en conclut que B est $\mathcal{C}^\infty$. Enfin r est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$).

Comme $x \neq 0_E \Longrightarrow B(x,x) \neq 0$ (puisque B est définie positive), on en conclut que ν est $\mathcal{C}^\infty$ sur $E \setminus \{0_E\}$ (Théorème 2.9) et que de plus :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ D\nu_{(x)}(\vec{h}) = [Dr_{[B(L(x))]} \circ DB_{[L(x)]} \circ D\mathrm{L}_{(x)}](\vec{h}),$$

soit : $D\nu_{(x)}(\vec{h}) = Dr_{[B(L(x))]}(DB_{[L(x)]}(\mathrm{L}(\vec{h}))) = Dr_{[B(L(x))]}(DB_{[L(x)]}(\vec{h},\vec{h})) = Dr_{[B(L(x))]}(B(x,\vec{h}) + B(\vec{h},x))$, et donc : $D\nu_{(x)}(\vec{h}) = Dr_{([\nu(x)]^2)}(2(x|\vec{h})) = 2(x|\vec{h}).r'([\nu(x)]^2) = \dfrac{2(x|\vec{h})}{2\sqrt{[\nu(x)]^2}} = \dfrac{(x|\vec{h})}{\nu(x)}$.

On déduit du calcul de $D\nu_{(x)}(h)$ et de **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**, que :

$$\|D\nu_{(x)}(h)\| \leq \frac{|(x|h)|}{\nu(x)} \leq \nu(x).\nu(h)/\nu(x) = \nu(h),$$

et donc que $\|D\nu(x)\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq 1$, quel que soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Soient alors $x, y \in E$ tels que $0_E \notin [x,y]$ (dans le cas où $0_E \in [x,y]$, l'inégalité triangulaire est immédiate). Par le Théorème de la moyenne, $|\nu(x) - \nu(y)| \leq 1.\nu(x-y)$. En remplaçant y par $-y$ dans cette inégalité, on obtient la seconde inégalité triangulaire : $|\nu(x) - \nu(y)| \leq \nu(x+y)$.

Calculons $D^2\nu_{(x)} \in \mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})$. Soit $\phi : E \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ l'application définie par $\phi(x) : E \ni \vec{h} \to [\phi(x)](\vec{h}) = (x|\vec{h}) \in \mathbb{R}$, $\pi : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \ni (\lambda, \mathrm{L}) \to \pi(\lambda,\mathrm{L}) = \lambda.\mathrm{L} \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$, et $i : \mathbb{R}^* \ni t \to i(t) = 1/t \in \mathbb{R}$. On a : $D\nu = \pi \circ (i \circ \nu, \phi)$.

• Différentiabilité de ϕ: ϕ est une application **linéaire**. De plus $|[\phi(x)](h)| = |(x|h)| \leq \|x\|.\|h\|$, par **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**. On en déduit que $\phi(x)$ est continue et de norme $\|\phi(x)\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq \|x\|_E$. Mais cette dernière inégalité assure la continuité de ϕ et même $\|\phi\| \leq 1$. ϕ est donc $\mathcal{C}^\infty$ et $D\phi_{(x)} = \phi$.

• Différentiabilité de π. π est bilinéaire et $\|\pi(\lambda,\mathrm{L})\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \|\lambda.\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}$. Or on a la majoration : $|\lambda.\mathrm{L}(h)| \leq |\lambda|.\|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}.\|h\|$, donc $\|\lambda.\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq |\lambda|.\|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})}$. On en déduit que $\|\pi(\lambda,\mathrm{L})\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq |\lambda|.\|\mathrm{L}\|$ et ainsi que π est différentiable, de différentielle : $D\pi_{(\lambda,\mathcal{L})}(\mu, A) = \mu.\mathrm{L} + \lambda.A$.

• Différentiabilité de i. i est différentiable sur $\mathbb{R}^*$ et $Di_{(t)}(h) = -h/t^2$.

Le Théorème des applications composées et le Théorème sur les applications à valeurs dans un produit donnent : $D^2\nu_{(x)} = D(D\nu)_{(x)} = D\pi_{(i(\nu(x)),\phi(x))} \circ (Di_{(\nu(x))} \circ D\nu_{(x)}, D\phi_{(x)})$. Donc $D^2\nu_{(x)}(h) = D\pi_{(i(\nu(x)),\phi(x))}(Di_{(\nu(x))}(D\nu_{(x)}(h)), D\phi_{(x)}(h)) = D\pi_{(i(\nu(x)),\phi(x))}[-(x|h)/\nu^3(x), \phi(h)]$.

Soit enfin $k \in E$, $[D^2\nu_{(x)}(h)](k) = \dfrac{(h|k)}{\nu(x)} - \dfrac{(x|h)(x|k)}{\nu^3(x)}$. En considérant $D^2\nu_{(x)}$ comme une application bilinéaire, on écrit : $D^2\nu_{(x)}(h,k) = \dfrac{(h|k)}{\nu(x)} - \dfrac{(x|h)(x|k)}{\nu^3(x)}$.

Exercice 26. Soient $\Phi : E \to E$ l'application de l'exercice 14 et $\Psi : E \to E$ définie par $\Psi(x) = (\cos(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu que Φ était différentiable et que $D\Phi_{(x)}(\vec{h}) = (h_n \cdot \cos(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. De même Ψ est différentiable et $D\Psi_{(x)}(\vec{h}) = (-h_n.\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\mathrm{L} : E \to \mathcal{L}(E;E)$ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{L}(x): & E & \to & E \\ & \vec{h} & \to & [\mathrm{L}(x)](\vec{h}) = (x_n.h_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

L est **linéaire** et arrive bien dans $\mathcal{L}(E;E)$. En effet, $\|[\mathrm{L}(x)](\vec{h})\|_\infty \leq \|x\|_\infty.\|\vec{h}\|_\infty$, ce qui prouve que $\mathrm{L}(x)$ est **continue** et que $\|\mathrm{L}(x)\| \leq \|x\|_\infty$. Mais cette dernière inégalité prouve que L est continue. On en conclut que L est $\mathcal{C}^\infty$.

On a : $D\Phi = \mathrm{L} \circ \Psi$ et comme Ψ est différentiable, Φ est deux fois différentiable. On montre de même Ψ est deux fois différentiable, puisque $D\Psi = -\mathrm{L} \circ \Phi$, et ainsi de suite, on prouve que Φ et Ψ sont $\mathcal{C}^\infty$.

Notons $B : E \times E \to E$ l'application $B(x.y) = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. B est bilinéaire. De plus B est continue, car : $\|B(x,y)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n.y_n| \leq \|x\|_\infty.\|y\|_\infty$. (Remarquons que B et L se correspondent dans l'isomorphisme $\mathcal{L}(E,E;E) \simeq \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;E)))$ de l'Exercice 10. Ainsi B est $\mathcal{C}^\infty$. On a $f = \Phi \circ B$, ce qui prouve que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Calculons $Df_{(x,y)}$. Le Théorème des applications composées donne : $Df_{(x,y)} = D\Phi_{(B(x,y))} \circ DB_{(x,y)}$. Soit alors $A : \mathcal{L}(E;E) \times \mathcal{L}(E \times E;E) \to \mathcal{L}(E \times E;E)$ l'application $A(\ell, b) = \ell \circ b$. A est une application bilinéaire. Montrons que A est continue : $\|A(\ell,b)(\vec{h},\vec{k})\|_E = \|\ell(b(\vec{h},\vec{k}))\| \le \|\ell\|.\|b(\vec{h},\vec{k})\| \le \|\ell\|.\|b\|.\|(\vec{h},\vec{k})\|$, donne $\|A(\ell,b)\| \le \|\ell\|.\|b\|$, ce qui est la continuité de A. On a alors :

$$Df = A \circ (D\phi \circ B, DB) = A \circ (\mathrm{L} \circ \Psi \circ B, DB).$$

le Théorème des applications composées et le Théorème 2.3 donnent alors :

$$D^2 f_{(x,y)} = DA_{(L[\Psi(B(x,y))],DB_{(x,y)})} \circ (D\mathrm{L}_{[\Psi(B(x,y))]} \circ D\Psi_{[B(x,y)]} \circ DB_{(x,y)}, D^2B_{(x,y)}).$$

Mais DB est une application linéaire continue de $E \times E$ dans $\mathcal{L}(E \times E; E)$, donc $D^2B_{(x,y)} = DB$. Soit alors $\vec{U} = (\vec{h},\vec{k}) \in E \times E$, on a, en notant $B(a,b)$ par $a.b$, $\Psi(x) = (\cos(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ par $\cos(x)$ et $\Phi(x) = (\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ par $\sin(x)$:

$$D^2 f_{(x,y)}(\vec{U}) = DA_{(L[\Psi(B(x,y))],DB_{(x,y)})}\big[\mathrm{L}\big(-\sin(x.y)(x.k+y.h)\big), DB_{(h,k)}\big] =$$
$$\mathrm{L}[\cos(x.y)] \circ DB_{(h,k)} - \mathrm{L}[\sin(x.y)(x.k+y.h)] \circ DB_{(x,y)}.$$

Soit enfin $\vec{V} = (a,b) \in E \times E$:

$$[D^2 f_{(x,y)}(\vec{U})](\vec{V}) = \cos(x.y).[h.b + a.k] - \sin(x.y)[(x.k+y.h)(x.b+y.a)].$$

Remarque. En identifiant $\mathcal{L}(E \times E; \mathcal{L}(E \times E; E))$ et $\mathcal{L}(E \times E, E \times E; E)$, on vérifie facilement que

$$(E \times E) \times (E \times E) \ni (\vec{U},\vec{V}) \to D^2 f_{(x,y)}(\vec{U},\vec{V}) \in E$$

est une application bilinéaire continue.

Exercice 27. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $Gl_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices inversibles. Pour fixer les idées on va supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais tout ce que l'on fait vaut encore pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.*i*- Soit l'application $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ qui à la matrice $A = (a_i^j)_{1\le i,j\le n}$ (a_i^j étant sur la i^{eme} colonne et la j^{eme} ligne) associe $\Psi(A) = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, a_2^1 \dots, a_2^n, \dots, a_n^1, \dots a_n^n)$, ce qui revient à écrire A en une seule ligne, en juxtaposant les lignes qui composent A. Cette application Ψ est linéaire.

On norme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\nu_\infty(A) = \sup_{1\le i,j\le n} |a_i^j|$ (par exemple, mais on pourrait choisir n'importe quelle autre norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui définirait la **même topologie**, puisque cet espace est de **dimension finie** et égale à n^2). En munissant $\mathbb{R}^{n^2}$ de la norme $\| \ \|_\infty$, on a bien, trivialement : $\|\Psi(A)\|_\infty = \nu_\infty(A)$, c'est-à-dire que relativement aux normes ν_∞ et $\| \ \|_\infty$, Ψ est une isométrie.

1.*ii* et 1.*iii*- Pour calculer les n^2 dérivées partielles de det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, il nous faut fixer une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On choisit classiquement $E_i^j = \Psi^{-1}(\vec{e}_{(i-1)n+j})$ ($\vec{e}_k$ désignant le k^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$). E_i^j est la matrice dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i^{eme} ligne et de j^{eme} colonne qui vaut 1.

$$\begin{array}{cc} & j^{eme} colonne \\ & | \\ i^{eme} ligne \ \text{——} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculons alors $\displaystyle\lim_{0\ne t\to 0} \frac{1}{t}[\det(A + t.E_i^j) - \det(A)]$.

Remarquons que $\det(A + t.E_i^j) = \det(A) + t.A_i^j$, où A_i^j est le cofacteur de A correspondant à a_i^j (il suffit de développer $\det(A + t.E_i^j)$ suivant la i^{eme} ligne ou la j^{eme} colonne).

On en conclut que les dérivées partielles de det en A, relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont $\dfrac{\partial \det}{\partial x_{n(i-1)+j}}(A) = D_{\vec{E}_i^j}(\det)_{(A)} = A_i^j$.

Pour prouver que det est différentiable en A, on peut procéder au moins de deux façons différentes (cf aussi la question 1.*iv*) :

- Soit on estime $\det(A+\vec{H})-\det(A)-\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i^j A_i^j$, et on montre facilement que cette quantité est une somme de produits de coefficients de H et de A, avec au moins deux coefficients de H dans chacun de ces produits, et donc $\det(A+\vec{H})-\det(A)-\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i^j A_i^j$ est majoré par $[\nu(H)]^2.Q(A)$, lorsque $\nu(H)\leq 1$, avec $Q(A)$ une quantité qui ne dépend que de A. (en retranchant $\det(A)$ et $\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i^j A_i^j$ à $\det(A+\vec{H})$, on retranche les quantités dans le développement de $\det(A+\vec{H})$ où n'apparaissent que les termes de degré 0 (les termes constants) et de degré 1 (les termes linéaires) en h_i^j).

- Soit on observe que les dérivées partielles de det en A, les A_i^j, sont des polynômes en les a_i^j, et donc $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\nu_\infty)\ni A\rightarrow \dfrac{\partial \det}{\partial x_{n(i-1)+j}}=A_i^j\in\mathbb{R}$ est continue (resp. $\mathcal{C}^\infty$). Par le “Théorème $\mathcal{C}^1$” (resp. $\mathcal{C}^\infty$), det est alors une fonction $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$), de différentielle : $D(\det)_{(A)}(\vec{H})=\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i^j.A_i^j$.

Soit maintenant $P\in Gl_n(\mathbb{R})$. Calculons plus précisément $D(\det)_{(P)}$.

On remarque que $D(\det)_{(P)}(\vec{H})=\sum_{1\leq i,j\leq n} h_i^j.P_i^j=\mathrm{Tr}({}^tC\vec{H})$, la trace de ${}^tCH$, avec C la matrice des cofacteurs de P. Or ${}^tCP=P^tC=\det(P)Id$, donc $D(\det)_{(P)}(\vec{H})=\det(P).Tr(P^{-1}\vec{H})$.

1.*iv*- L'application det étant continue (ce que l'on justifie soit directement, soit en disant que det est différentiable), $Gl_n(\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$.

1.*v*- On considère maintenant $\Phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R}^n\times\ldots\times\mathbb{R}^n$, qui à une matrice $n\times n$ associe ses n colonnes. Φ est trivialement un isomorphisme linéaire et continue (puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie), donc $\mathcal{C}^\infty$. On considère alors : $\widetilde{\det}=\det\circ\Phi^{-1}$, c'est-à-dire que $\widetilde{\det}(A)$ est le déterminant des n colonnes de A. $\widetilde{\det}$ est une application n-linéaire (alternée) des colonnes de A, donc est $\mathcal{C}^\infty$. Or $\det=\widetilde{\det}\circ\Phi$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 27.a. On a $f=s\circ p\circ(\pi_1,r\circ\pi_2)$, où π_1 (resp. π_2) est la projection de $\mathbb{R}^2$ sur le premier (resp. deuxième) facteur, $r:z\mapsto z^2+2$ et $s:w\mapsto w+1$ sont des fonctions sur $\mathbb{R}$ et $p:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ est la fonction produit. π_1 et π_2 sont C^∞ car **linéaires entre espaces de dimension finie**. De plus, pour tout (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, on a $D\pi_{1(a,b)}=\pi_1$ et $D\pi_{2(a,b)}=\pi_2$. p est C^∞ car **bilinéaire entre espaces de dimension finie** et pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a $Dp_{(a,b)}:(h,k)\mapsto p(a,k)+p(h,b)$. Les fonctions r et s étant C^∞ sur $\mathbb{R}$ au sens de la dérivation, elles le sont au sens de la différentiation par l'Exercice qui précède, et pour tout $z\in\mathbb{R}$, $Dr_z:h\mapsto 2zh$ et $Ds_z:h\mapsto h$. Le **Théorème** 2.9 assure alors que f est $\mathcal{C}^\infty$.

Par le **Théorème 2.1**, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $Df_{(a,b)}=Ds_{ar(b)}\circ Dp_{(a,r(b))}\circ(\pi_1,Dr_b\circ\pi_2)$ Par conséquent, on a

$$\begin{array}{rccccc} Df: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) & & \\ & (a,b) & \mapsto & Df_{(a,b)}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & & & (h,k) & \mapsto hr(b)+kar'(b) \end{array}$$

Soient

$$\begin{array}{rccc} \phi_1: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & ((h,k)\mapsto xh) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \phi_2: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & ((h,k)\mapsto xk), \end{array}$$

on a $Df_{(a,b)}=\phi_1(r(b))+\phi_2(ar'(b))$, c'est-à dire $Df=\phi_1\circ r\circ\pi_2+\phi_2\circ p\circ(\pi_1,r'\circ\pi_2)$. Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont **linéaires et continues**, on obtient en appliquant de nouveau le **Théorème 2.1**, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$: $D(D_f)_{(a,b)}=\phi_1\circ Dr_b\circ\pi_2+\phi_2\circ Dp_{(a,r'(b))}\circ(\pi_1,Dr'_b\circ\pi_2)$, ou encore

$$\begin{array}{rccccc} D^2f_{(a,b)}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) & & \\ & (m,n) & \mapsto & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & & (h,k) & \mapsto & r'(b)nh+(ar''(b)n+r'(b)m)k \end{array}$$

ce qui s'exprime aussi par

$$\begin{array}{rccc} D^2f_{(a,b)}: & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & ((m,n),(h,k)) & \mapsto & r'(b)nh+(ar''(b)n+r'(b)m)k \end{array}$$

Remarque: On peut aussi dire que les dérivées partielles de f par rapport à ses deux variables et à tous les ordres existent, ce qui par le **Théorème 2.10.(2.iii)** donne le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f. On retrouve aussi la formule (3) du Théorème 2.10, qui donne $D^2f_{(a,b)}$ en fonction des dérivées partielles à l'ordre 2 et la symétrie de celles-ci **Théorème de Schwarz 2.11**.

Exercice 27.b. **1-** L'application B est **bilinéaire** et sa continuité résulte de l'inégalité fondamentale (cf Exercice 6) : $\|B(U,V)\|_{\mathcal{L}(E;G)} = \|V \circ U\|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \|V\|_{\mathcal{L}(F;G)} \cdot \|U\|_{\mathcal{L}(E;F)}$. On en conclut que B est $\mathcal{C}^\infty$ (**Proposition 1.5**).

2- Le Théorème des applications composées donne immédiatement :

$$\forall a \in \Omega, \forall h \in E,\ D(g \circ f)_{(a)} = Dg_{(f(a))} \circ Df_{(a)} \ \ ie\ \ D(g \circ f) = B \circ (Dg \circ f, Df) \qquad (**)$$

3- L'application $(Dg \circ f, Df) : \Omega \ni a \mapsto (Dg_{f(a)}, Df_{(a)}) \in G$ est différentiable sur Ω par le Théorème des applications composées et le **Théorème 2.3**. Le Théorème des applications composées appliqué à $(**)$ donne alors :

$$D^2(g \circ f)_{(a)} = DB_{(Dg_{(f(a))}, Df_{(a)})} \circ (D^2g_{f(a)} \circ Df_{(a)}, D^2f_{(a)}) \qquad (***)$$

Soit alors $h \in E$, on a $D^2(g \circ f)_{(a)}(h) \in \mathcal{L}(E;G)$ qui est par $(***)$:

$$D^2(g \circ f)_{(a)}(h) = B[Dg_{(f(a))}, D^2f_{(a)}(h)] + B[D^2g_{f(a)}(Df_{(a)}(h)), Df_{(a)}]$$

$$D^2(g \circ f)_{(a)}(h) = Dg_{(f(a))} \circ D^2f_{(a)}(h) + D^2g_{f(a)}(Df_{(a)}(h)) \circ Df_{(a)}$$

Soit enfin $k \in E$:

$$D^2(g \circ f)_{(a)}(h)(k) = Dg_{(f(a))}[D^2f_{(a)}(h)(k)] + \Big[D^2g_{f(a)}(Df_{(a)}(h))\Big][Df_{(a)}(k)].$$

En identifiant $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;G))$ et $\mathcal{L}(E,E;G)$, on obtient :

$$D^2(g \circ f)_{(a)}(h,k) = Dg_{(f(a))}[D^2f_{(a)}(h,k)] + D^2g_{f(a)}[Df_{(a)}(h), Df_{(a)}(k)]. \qquad (****)$$

Si maintenant $E = F = G = \mathbb{R}$, comme $Df_{(a)}(h) = h \cdot f'(a)$ et $D^2f_{(a)}(h,k) = h \cdot k \cdot f''(a)$ (cf la formule (3) du poly), l'égalité $(****)$ devient :

$$h \cdot k \cdot (g \circ f)''(a) = h \cdot k \cdot g'(f(a)) \cdot f''(a) + h \cdot k \cdot g''(f(a))(f'(a))^2,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve la formule bien connue :

$$(g \circ f)''(a) = g'(f(a)) \cdot f''(a) + g''(f(a))(f'(a))^2.$$

Exercice 27.c. **1** et **2-** La formule fondamentale (1) de la **Proposition 1.2** montre, f étant par hypothèse différentiable sur tout un voisinage de a (disons sur tout Ω pour ne pas multiplier les notations), que quel que soit $x \in \Omega$, quel que soit $\vec{h} \in E$,

$$Df_{(x)}(\vec{h}) = D_{\vec{h}}f_{(x)} \qquad (*)$$

Fixons maintenant $\vec{h} \in E$ et notons alors $\Phi_{\vec{h}} : \mathcal{L}(E;F) \to F$ l'application définie par $\Phi(\mathrm{L}) = \mathrm{L}(\vec{h})$. L'égalité $(*)$ donne :

$$D_{\vec{h}}f = \Phi_{\vec{h}} \circ Df \qquad (**)$$

L'application $\Phi_{\vec{h}}$ est bien sûr **linéaire**, puisque si $\mathrm{L}, \ell \in \mathcal{L}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi_{\vec{h}}(\mathrm{L} + \lambda \cdot \ell) = \mathrm{L}(\vec{h}) + \lambda \cdot \ell(\vec{h}) = \Phi_{\vec{h}}(\mathrm{L}) + \lambda \cdot \Phi_{\vec{h}}(\ell)$. Montrons que Φ est **continue**. On a :

$$\|\Phi_{\vec{h}}(\mathrm{L})\|_F = \|\mathrm{L}(\vec{h})\|_F \leq \|\mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;F)}\|\vec{h}\|_E$$

ce qui donne la continuité de $\Phi_{\vec{h}}$ et même $\|\Phi_{\vec{h}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E;F);F)} \leq \|\vec{h}\|_E$. L'application $\Phi_{\vec{h}}$ est ainsi $\mathcal{C}^\infty$. Par le Théorème des applications composées, on déduit de $(**)$ que $\Omega \ni x \mapsto D_{\vec{h}}f_{(x)} \in F$ est différentiable en a et que :

$$\forall \vec{h} \in E, \quad D(D_{\vec{h}}f)_{(a)} = \Phi_{\vec{h}} \circ D^2 f_{(a)} = D^2 f_{(a)}(\vec{h})$$

En particulier, quel que soient $\vec{h}, \vec{k} \in E$:

$$D^2 f_{(a)}(\vec{h}, \vec{k}) = D(D_{\vec{h}}f)_{(a)}(\vec{k}) \tag{$***$}$$

Remarque. La formule $(***)$ présente l'intérêt partique suivant : Pour calculer $D^2 f_{(a)}(\vec{h}, \vec{k})$ on peut différentier $x \mapsto Df_{(x)}(\vec{h})$, en considérant $\vec{h}$ comme constante, puis appliquer $\vec{k}$. Nous allons voir des applications pratiques de cette remarque.

Si $\mathrm{L} : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est n-linéaire continue, on sait que L est $\mathcal{C}^\infty$ et que quels que soient $x = (x_1, \cdots, x_n), \vec{h} = (\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_n) \in E$,

$$D\mathrm{L}_{(x)}(\vec{h}) = \mathrm{L}(\vec{h}_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \mathrm{L}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \vec{h}_n) \tag{$\dagger$}.$$

En considérant $\vec{h}$ fixé dans $\dagger$, l'application $x \mapsto D\mathrm{L}_{(x)}(\vec{h})$ est somme de n applications $(n-1)$ linéaires continues $\mathrm{L}_1 = x \mapsto \mathrm{L}(\vec{h}_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \mathrm{L}_n = x \mapsto \mathrm{L}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \vec{h}_n)$. On en déduit que :

$$D[x \mapsto D\mathrm{L}_{(x)}(\vec{h})]_{(a)}(\vec{k}) = \sum_{j=1}^{n} D\mathrm{L}_{j(a)}(\vec{k})$$

$$= \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j} \mathrm{L}(a_1, \cdots, a_{i-1}, \vec{k}_i, a_{i+1}, a_{j-1}, \cdots, \vec{h}_j, a_{j+1}, \cdots, a_n),$$

mais cette expression est aussi $D^2\mathrm{L}_{(a)}(\vec{h}, \vec{k})$ par $(***)$.

Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}$ et $f : E \to F$ est deux fois différentiable en a. On a :

$$Df_{(x)}(h) = h \cdot f'(x) \tag{$\ddagger$}$$

En considérant h fixé dans $\ddagger$ et en différentiant $x \mapsto h \cdot f'(x)$, on obtient :

$$D[x \mapsto h \cdot f'(x)]_{(a)}(k) = k \cdot [h \cdot (f')'(a)] = h \cdot k \cdot f''(a),$$

mais par $(***)$ cette dernière expression est $D^2 f_{(a)}(h, k)$.

4- Retrouvons la différentielle seconde de l'application de l'Exercice 27.a. On a obtenu :

$$Df_{(a,b)}(h, k) = hr(b) + kar'(b) \tag{$\sharp$}$$

Considérons $\vec{h} = (h, k)$ comme fixé dans $(\sharp)$, et différentions $(\sharp)$. On obtient grâce aux règles de calcul classiques :

$$D[g : (x, y) \mapsto hr(y) + kxr'(y)]_{(a,b)}(u, v) = u \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + v \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)$$

$$= u \cdot k \cdot (r'(b)) + v \cdot (h \cdot r'(b) + k \cdot a \cdot r''(b))$$

Exercice 27.d. 1.i- Résulte directement du **Corollaire 2.8**

1.ii- Rappel: Par définition la mesure de Lebesgue μ_n de $\mathbb{R}^n$ est, quel que soit $N \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mu_n(N) = \inf_{(P_j)_{j \in \mathbb{N}}} \sum_{j \in \mathbb{N}} mes(P_j),$$

où l'inf est pris sur toutes les suites $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^n$ telles que $N \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j$ et où $mes(P_j)$ est le produit des longueurs des n côtés de P_j. Remarquons que $mes(P) = \mu_n(P)$, pour tout pavé P, et que l'on peut prendre l'inf sur toutes les suites de cubes dont la réunion contient N (ces deux remarques constituent deux exercices intéressants de mesure géométrique élémentaire, que l'on conseille).

En conséquence, dire que N vérifie $\mu_n(N) = 0$, signifie que :

$$\forall\epsilon > 0, \exists (C_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ une suite de cubes de } \mathbb{R}^n \text{ telle que } N \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j \text{ et } \sum_{j\in\mathbb{N}} mes(C_j) \leq \epsilon.$$

On peut bien sûr supposer, quitte à subdiviser chaque C_j en un nombre fini de cubes de côtés ayant une longueur ≤ 1, que chaque C_j à ses côtés de longueur $\ell_j \leq 1$.

- Commençons par supposer que f est globalement lipschitzienne sur Ω, avec une constante de Lipschitz K. Chacun des cubes C_j est contenu dans une boule de diamètre $\sqrt{n}\ell_j$. Cette boule est transformée par f en un ensemble de $\mathbb{R}^p$ dont deux points sont à distance au plus $K.\sqrt{n}\ell_j$, donc $f(C_j) \subset C'_j$, avec C'_j un cube de $\mathbb{R}^p$ de côté $K.\sqrt{n}\ell_j$. On a $f(N) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C'_j$ et

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} mes(C'_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (K.\sqrt{n}\ell_j)^p \leq K^p(n)^{p/2} \sum_{j\in\mathbb{N}} \ell_j^p \leq K^p(n)^{p/2} \sum_{j\in\mathbb{N}} \ell_j^n \leq K^p(n)^{p/2} \cdot \epsilon.$$

L'avant dernière majoration résulte de $n \leq p$ et $\ell_j \leq 1$. On en conclut que $f(N)$ est bien de mesure nulle.

- Cas général. On sait qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle. Si on écrit en conséquence que $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (N \cap B_n)$, avec B_n un ensemble sur lequel f est globalement lipschitzienne, comme $N \cap B_n \subset N$ est de mesure nulle, $f(N \cap B_n)$ sera de mesure nulle par ce qui précède, et donc $f(N)$ sera contenu dans l'ensemble de mesure nulle $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(N \cap B_n)$, donc sera de mesure nulle.

Soit alors $\Omega \cap \mathbb{Q}^n$. Cet ensemble est dénombrable, puisque $\mathbb{Q}^n$ est lui-même dénombrable, notons-le $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $B(a_n, r)$ la boule ouverte de centre a_n et de rayon r de $\mathbb{R}^n$, et $\bar{B}(a_n, r)$ la boule fermée de centre a_n et de rayon r de $\mathbb{R}^n$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les boules $B(a_n, q)$, $q \in \mathbb{Q}_+^*$, telles que $\bar{B}(a_n, q) \subset \Omega$, sont en quantité dénombrable. Notons les $(B_{n,q})_{n,q\in\mathbb{N}}$ et soit r_q le rayon de $B_{n,q}$. On a bien sûr : $\bigcup_{n,q\in\mathbb{N}} B_{n,q} \subset \Omega$ et f lipschitzienne sur $B_{n,q}$ par le **Corollaire 2.8**, puisque $\bar{B}_{n,q} \subset \Omega$. Montrons que $\Omega = \bigcup_{n,q\in\mathbb{N}} B_{n,q}$. Si $a \in \Omega$, soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Il existe alors par densité de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega$ tel que $\|a - a_j\| < r/2$, et $r_q \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que : $\|a - a_j\| < r_q < r/2$. On en déduit que : $a \in \bar{B}(a_j, r_q) \subset \Omega$, donc $a \in \bigcup_{n,q\in\mathbb{N}} B_{n,q}$. Il suffit maintenant décrire $N = \bigcup_{n,q\in\mathbb{N}} (B_{n,q} \cap N)$.

1.iii- Soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^{p-n} \to \mathbb{R}^p$ définie par $F(x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_n)$. F est $\mathcal{C}^1$ comme f. Soit $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \{0\}^{p-n} \subset \mathbb{R}^p$. Comme $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}^{p-n}$ et comme $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{p-n}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$, par 1.ii, $F(\widetilde{\Omega}) = f(\Omega)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$.

2.1- f est C lipschitzienne sur $[-k, k]$ par le **Corollaire** 2.8. Quel que soit l'intervalle $I \subset [-k, k]$, $f(I)$ est contenu dans une boule de diamètre $C \cdot |I|$ (où $|I|$ est la longueur de I). Subdivisons alors $[-k, k]$ en intervalles réguliers I_j, $j \in \{1, \cdots, N_\epsilon\}$ de longueur $\leq \epsilon/C$. On a alors $f(I_j) \subset B_j$, avec B_j une boule de diamètre ϵ et $\sum_{j=1}^{N_\epsilon} \text{diam}(B_j) \leq C \sum_{j=1}^{N_\epsilon} |I_j| \leq C \sum_{j=1}^{N_\epsilon} |[-k, k]| = C \cdot 2.k.$

2.ii- Comme $m \geq 2$, $\sum_{j=1}^{N_\epsilon} \text{diam}^m(B_j) \leq \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \text{diam}^{m-1}(B_j)\text{diam}(B_j) \leq \epsilon^{m-1} \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \text{diam}(B_j).$

2.iii- Chaque B_j est contenu dans un cube P_j de côté $\text{diam}(B_j)$, donc $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j$ recouvre $f(\Gamma_k)$ et $\sum_{j=1}^{N_\epsilon} mes(P_j) \leq \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \text{diam}^m(B_j) \leq \epsilon^{m-1}.C.2k$.

2.iv- La question précédente montre que $f(\Gamma_k)$ est de mesure nulle ($m-1>0$); il en est alors de même de $f(\mathbb{R}) \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f(\Gamma_k)$.

Ce résultat se généralise facilement à $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > n$.

Chapitre 3- Isomorphismes topologiques et difféomorphismes.

3.1. Isomorphismes topologiques d'espaces vectoriels normés.

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On rappelle qu'un *isomorphisme linéaire* entre E et F est une application linéaire $\mathrm{L} : E \to F$ bijective. L'application $\mathrm{L}^{-1} : F \to E$ est alors automatiquement linéaire (facile à vérifier). On dit qu'une application $\mathrm{L} : E \to F$ est un *isomorphisme topologique* entre E et F ssi L est un isomorphisme linéaire et si de plus L et L^{-1} sont deux applications continues. On note $\mathrm{Isom}(E; F)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires entre E et F et $\mathcal{I}\mathrm{som}(E; F)$ l'ensemble des isomorphismes topologiques entre E et F. Par définition, on a toujours $\mathcal{I}\mathrm{som}(E; F) \subset \mathrm{Isom}(E; F)$.

Remarques. Un isomorphisme topologique est $\mathcal{C}^\infty$, puisque linéaire et continu.

$\mathcal{I}\mathrm{som}\ (E; E)$ n'est jamais vide puisque l'identité est un isomorphisme topologique.

Si E ou F est de dimension finie, $\mathrm{Isom}(E; F)$ n'est pas vide ssi $\dim(E) = \dim(F)$ (dans ce cas il existe $u \in \mathrm{Isom}(E; \mathbb{K}^{\dim(E)})$ et $v \in \mathrm{Isom}(F; \mathbb{K}^{\dim(F)})$. On en déduit $v^{-1} \circ u \in \mathrm{Isom}(E; F)$). De plus comme lorsque la dimension de l'espace de départ est finie, une application linéaire est automatiquement continue, on a :

$$\Big(\dim(E) = \dim(F) < \infty\Big) \Longrightarrow \Big(\mathrm{Isom}(E; F) = \mathcal{I}\mathrm{som}(E; F) \neq \emptyset\Big).$$

Lorsque les espaces E et F ne sont pas de dimensions finies, une application linéaire $\mathrm{L} : E \to F$ n'est bien sûr pas nécessairement continue (cf Chapitre 0), et si L est bijective et continue, l'application $\mathrm{L}^{-1} : E \to F$ n'est pas nécessairement continue, comme le montre l'exercice suivant. Cependant de tels exemples d'applications linéaires continues bijectives d'inverses non continus ne se produisent que lorsque E et F ne sont pas des espaces vectoriels complets; dans le cas où E et F sont complets une application linéaire continue bijective est nécessairement d'inverse continu (**Théorème de l'isomorphisme de Banach**).

Exercice 28. *Soit $\mathcal{C}_{00}$ l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme* $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

i- On note $\mathcal{C}_0$ l'espace des suites de limite nulle, muni de la norme $\|\ \|_1$. Montrer que $\mathcal{C}_{00} \subset \mathcal{C}_0$.

ii- Pour tout $p \geq 1$, soit $\vec{u}_p \in \mathcal{C}_{00}$ défini par : $\vec{u}_p = (1, 1/2^2 \cdots, 1/p^2, 0, \cdots)$. Montrer que $(\vec{u}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}_0$ vers $\vec{u} = (1, 1/2^2, 1/3^2, \cdots, 1/n^2, \cdots)$. En déduire que $\mathcal{C}_{00}$ n'est pas un espace vectoriel normé complet.

iii- Soit $\mathrm{L} : \mathcal{C}_{00} \to \mathcal{C}_{00}$ l'application définie par $\mathrm{L}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{u_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que L est une application linéaire bijective et continue.

iv- Montrer que L^{-1} n'est pas continue.

Proposition 3.1. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés tels que $\mathcal{I}som(E; F)$ne soit pas vide. Alors $\mathcal{I}som\ (\mathcal{L}(E; F); \mathcal{L}(E; E))$ n'est pas vide. C'est-à-dire que $\mathcal{L}(E; E)$ et $\mathcal{L}(E; F)$ sont topologiquement isomorphes.*

Preuve. Soit $a \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E; F)$. On définit $\mathcal{G}_a : \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(E; E)$ par : $\mathcal{G}_a(\mathrm{L}) = a^{-1} \circ \mathrm{L}$. L'application $\mathcal{G}_a$ est trivialement linéaire, bijective d'inverse $\mathcal{G}_a^{-1} : \mathcal{L}(E; E) \to \mathcal{L}(E; F)$ défini par $\mathcal{G}_a^{-1}(\ell) = a \circ \ell$. La continuité de $\mathcal{G}_a$ et de $\mathcal{G}_a^{-1}$ résulte respectivement de : $\|a^{-1} \circ \mathrm{L} \leq \|a^{-1}\|.\|\mathrm{L}\|$ et $\|a \circ \ell \leq \|a\|.\|\ell\|$. $\square$

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés tels que $\mathcal{I}\mathrm{som}(E; F) \neq \emptyset$. on note :

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E) & \to & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E) \\ & u & \mapsto & i(u) = u^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{I}: & \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F) & \to & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (F;E) \\ & v & \mapsto & \mathcal{I}(v) = v^{-1} \end{array}$$

Remarque. Soit $a \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E; F)$. Notons comme dans la preuve de la Proposition 3.1 :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}_a: & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;F) & \to & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E) \\ & u & \mapsto & \mathcal{G}_a(u) = a^{-1} \circ u \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{D}_a: & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E) & \to & \mathcal{I}\mathrm{som}\ (F;E) \\ & v & \mapsto & \mathcal{D}_a(v) = v \circ a^{-1} \end{array}$$

On a alors l'égalité :

$$\mathcal{I} = \mathcal{D}_a \circ i \circ \mathcal{G}_a \tag{$*$}$$

Cette égalité permet de ramener l'étude de $\mathcal{I}$ à celle de i, puisque $\mathcal{G}_a$ et $\mathcal{D}_a$ sont des isomorphismes topologiques d'espaces vectoriels. De même l'application $\mathcal{G}_a$ ramène l'étude de $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ à celle de $\mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E)$.

3.2. Étude de $\mathcal{I}\mathbf{som}(E;E)$ au voisinage de Id_E.

Commençons par rappeler que si G est une espace vectoriel normé complet, une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ absolument convergente dans E est convergente dans E. En effet, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, la suite $(T_n = \sum_{n=0}^{n} \|u_p\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, k \geq 0, \mid T_{n+k} - T_n \mid \leq \epsilon.$$

Mais comme $\| \sum_{p=n+1}^{n+k} u_p\| \leq \sum_{p=n+1}^{n+k} \|u_p\| = \mid T_{n+k} - T_n \mid$, on en conclut que la suite $(S_n = \sum_{n=0}^{n} u_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. L'espace E étant par hypothèse complet $(S_n = \sum_{n=0}^{n} u_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien.

Rappelons enfin que :

Exercice 29. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Supposons que F est complet. Montrer que $\mathcal{L}(E;F)$ est un espace complet.*

Soient maintenant E un espace vectoriel normé complet et $\ell \in \mathcal{L}(E;E)$. La série

$$S(\ell) = Id_E - \ell + \ell^2 + \cdots + (-1)^n \ell^n + \cdots,$$

où ℓ^n est la composée de ℓ avec lui-même n fois est une série absolument convergente dès que $\|\ell\| < 1$, puisque $\|\ell^n\| \leq \|\ell\|^n$ et donc :

$$\|Id_E\| + \|-\ell\| + \|\ell^2\| + \cdots + \|(-1)^n\ell^n\| \leq \|Id_E\| + \|\ell\| + \|\ell\|^2 + \cdots + \|\ell\|^n = \frac{1-\|\ell\|^{n+1}}{1-\|\ell\|} \to \frac{1}{1-\|\ell\|}.$$

Par l'Exercice 29, on en conclut que la série $S(\ell)$ est convergente dans l'espace complet $\mathcal{L}(E;E)$, ie $S(\ell) \in \mathcal{L}(E;E)$. D'autre part

$$(Id_E + \ell) \circ (Id_E - \ell + \ell^2 + \cdots + (-1)^n \ell^n) = Id_E + (-1)^n \ell^{n+1} \quad \text{et}$$

$$(Id_E - \ell + \ell^2 + \cdots + (-1)^n \ell^n) \circ (Id_E + \ell) = Id_E + (-1)^n \ell^{n+1} \quad \text{et}$$

en passant à la limite, on obtient :

$$(Id_E + \ell) \circ S(\ell) = Id_E \quad \text{et} \quad S(\ell) \circ (Id_E + \ell) = Id_E.$$

L'application $S(\ell)$ est donc linéaire continue bijective. Son inverse est $Id_E + \ell$ qui est aussi continu.

- En conclusion, $\|\ell\|_{\mathcal{L}(E;E)} < 1 \Longrightarrow Id_E + \ell \in \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;E)$, ou encore : la boule ouverte de centre Id_E et de rayon 1 de $\mathcal{L}(E;E)$ est contenue dans $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;E)$.
- On a aussi obtenu :

$$i(Id_E + \ell) - i(Id_E) - [-\ell] = S(\ell) - Id_E - [-\ell] = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \ell^n,$$

donc :

$$\|i(Id_E + \ell) - i(Id_E) - [-\ell]\| \leq \sum_{n\geq 2} \|(-1)^n \ell^n\| \leq \sum_{n\geq 2} \|\ell\|^n \leq \frac{\|\ell\|^2}{1 - \|\ell\|}.$$

On reconnait là la définition de la différentiabilité de i en Id_E, puisque $-\ell = -Id_{\mathcal{L}(E;E)}(\ell)$ et que $-Id_{\mathcal{L}(E;E)}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(E;E)$ dans $\mathcal{L}(E;E)$. En résumé :

Proposition 3.2. — *Soit E un espace vectoriel complet. La boule ouverte $B^{\mathcal{L}(E;E)}(Id_E, 1)$de centre Id_E et de rayon 1 de $\mathcal{L}(E;E)$ est contenue dans $\mathcal{I}som$ $(E;E)$ et $i : B^{\mathcal{L}(E;E)}(Id_E, 1) \to \mathcal{L}(E;E)$ est différentiable en Id_E, de différentielle :*

$$Di_{(Id_E)} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E;E) & \to & \mathcal{L}(E;E) \\ \ell & \mapsto & -\ell \end{array} \qquad \square$$

Nous allons voir comment cette étude permet l'étude de $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$.

3.3. Étude de $\mathcal{I}$som$(E;F)$.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets. Supposons que $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ ne soit pas vide et soit $a \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$. Comme par la Proposition 3.2, Id_E est un point de intérieur de $\mathcal{I}\mathrm{som}$ $(E;E)$ dans $\mathcal{L}(E;E)$, et comme $\mathcal{G}_a : \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F) \to \mathcal{I}\mathrm{som}(E;E)$ est un isomorphisme topologique tel que $\mathcal{G}_a(a) = Id_E$, on en déduit que a est un point intérieur de $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ dans $\mathcal{L}(E;F)$, quel que soit $a \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$. En conclusion $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$est un ouvert de $\mathcal{L}(E;E)$.

Exercice 30. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés de même dimension. Montrer facilement que $\mathcal{I}som(E;F)$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(E;F)$ (ind. identifier $\mathcal{L}(E;F)$ et l'espace $\mathcal{M}at(\dim(E)\times\dim(F))$ des matrices carrées $\dim(E) \times \dim(F)$ et utiliser $\det : \mathcal{M}at(\dim(E) \times \dim(F)) \to \mathbb{K}$).*

L'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ étant un ouvert de $\mathcal{L}(E;F)$, on peut maintenant se poser la question de la différentiabilité de $\mathcal{I} : \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F) \to \mathcal{I}\mathrm{som}$ $(F;E)$. $\mathcal{G}_a$ et $\mathcal{D}_a$ étant des isomorphismes topologiques, $\mathcal{G}_a$ et $\mathcal{D}_a$ sont $\mathcal{C}^\infty$, de $(*)$ et du Théorème des applications composées,

on conclut que $\mathcal{I}$ est différentiable en tout point a de $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$, de différentielle :

$$D\mathcal{I}_{(a)} = D\mathcal{D}_{a(i(\mathcal{G}_a)(a))} \circ Di_{(\mathcal{G}_a(a))} \circ D\mathcal{G}_{a(a)} = \mathcal{D}_a \circ Di_{(Id_E)} \circ \mathcal{G}_a \qquad (**)$$

On a donc :

$$\forall a \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F), \forall \mathrm{L} \in \mathcal{L}(E;F), \quad D\mathcal{I}_{(a)}(\mathrm{L}) = -[a^{-1} \circ \mathrm{L} \circ a^{-1}].$$

Étudions la classe de $\mathcal{I}$. Pour cela on note $T : \mathcal{L}(F;E) \times \mathcal{L}(F;E) \times \mathcal{L}(E;F) \to \mathcal{L}(F;E)$, l'application définie par $T(\alpha, \beta, \Lambda) = -[\alpha \circ \Lambda \circ \beta]$.

L'application T est facilement trilinéaire continue. Par une isométrie canonique du type de celle mise en évidence au Chapitre 2, il correspond à T une application $\widetilde{T}$ bilinéaire continue de $\mathcal{L}(F;E) \times \mathcal{L}(F;E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E;F);\mathcal{L}(F;E))$, définie par :

$$\widetilde{T}(\alpha, \beta)(\Lambda) = T(\alpha, \Lambda, \beta).$$

L'égalité $(**)$ donne : $D\mathcal{I}_{(a)}(\mathrm{L}) = \widetilde{T}(\mathcal{I}(a), \mathcal{I}(a))(\mathrm{L})$, c'est-à-dire que :

$$D\mathcal{I} = \widetilde{T} \circ \begin{pmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{I} \end{pmatrix} \qquad (***)$$

La différentiabilité de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\widetilde{T}$ donnent par récurence le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$. En effet faisons l'hypothèse de récurrence suivante : $\mathcal{I}$ est n fois différentiable sur $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$.

L'égalité $(***)$ et le Théorème des applications composées montrent alors que $D\mathcal{I}$ est n fois différentiable sur $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ ou encore que $\mathcal{I}$ est $n+1$ fois différentiable sur $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$. En résumé :

Théorème 3.3. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets. Si $\mathcal{I}som(E;F)$ n'est pas vide, $\mathcal{I}som(E;F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E;F)$ et $\mathcal{I} : \mathcal{I}som(E;F) \ni v \mapsto v^{-1} \in \mathcal{I}som(F;E)$ est $\mathcal{C}^\infty$, de différentielle :* $\forall a \in \mathcal{I}som(E;F), \forall \mathrm{L} \in \mathcal{L}(E;F), \quad D\mathcal{I}_{(a)}(\mathrm{L}) = -[a^{-1} \circ \mathrm{L} \circ a^{-1}].$ □

3.4. Difféomorphismes.

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\mathcal{V}$ un ouvert de F. On appelle *difféomorphisme* (resp. $\mathcal{C}^n$ *difféomorphisme*) de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ toute application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijective telle que f et f^{-1} soient différentiables (resp. $\mathcal{C}^n$). On dit que les ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont *difféomorphes* (resp. $\mathcal{C}^n$ *difféomorphes.*)

Remarques. Un isomorphisme topologique est nécessairement un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme, puisqu'une application linéaire et continue est $\mathcal{C}^\infty$.

Lorsque E et F sont complets et $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ non vide, l'application $\mathcal{I} : \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F) \ni v \mapsto v^{-1} \in \mathcal{I}\mathrm{som}$ $(F;E)$ est $\mathcal{C}^\infty$, par le Théorème 3.3, et d'inverse $\mathcal{J} : \mathcal{I}\mathrm{som}\ (F;E) \ni w \mapsto w^{-1} \in \mathcal{I}\mathrm{som}\ (E;F)$, tout aussi $\mathcal{C}^\infty$, par le Théorème 3.3. Donc $\mathcal{I}$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.

Théorème 3.4. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $\mathcal{V}$ un ouvert de F et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme. On a :*

$$\forall a \in \mathcal{U}, \quad Df_{(a)} \in \mathcal{I}som(E;F) \quad et \quad [Df_{(a)}]^{-1} = D[f^{-1}]_{(f(a))}.$$

Preuve. Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est différentiable en $b = f(a) \in \mathcal{V}$, le théorème des fonctions composées donne à partir de :

$$f \circ f^{-1} = Id_{\mathcal{V}} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_{\mathcal{U}}$$

les égalités :

$$Df_{(a)} \circ D[f]^{-1}_{(b)} = Id_F \quad \text{et} \quad D[f]^{-1}_{(b)} \circ Df_{(a)} = Id_E.$$

On en conclut que $Df_{(a)}$ est inversible, d'inverse $D[f]^{-1}_{(b)}$. Comme cette dernière application est par hypothèse continue, $Df_{(a)} \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$. □

Remarque importante. Il n'est pas vrai que si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et tel que $\forall a \in \mathcal{U}, Df_{(a)} \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$, f soit un difféomorphisme. Par exemple l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est différentiable sur $\mathbb{C}^*$, de différentielle $Df_{(a)}(h) = 2a.h$. Cette différentielle est inversible, d'inverse $[Df_{(a)}]^{-1}(h) = h/2a$, mais f n'est pas injective sur $\mathbb{C}^*$ $(f(1) = f(-1))$!

3.5. Classe de différentiabilité d'un difféomorphisme.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{U}$ un ouvert de E, $\mathcal{V}$ un ouvert de F et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme. Le Théorème 3.4 donne l'expression de la différentielle de f^{-1} en fonction de f^{-1}, de la différentielle de f et de $\mathcal{I} : \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F) \to \mathcal{I}\mathrm{som}(F;E)$. En effet, comme $\forall b \in \mathcal{V}, \quad D[f]^{-1}_{(b)} = [Df_{(a)}]^{-1}$, on a :

$$D[f^{-1}] = \mathcal{I} \circ Df \circ f^{-1}.$$

Soit n un entier $n \geq 1$. Supposons f de classe n, ie que Df est $\mathcal{C}^{n-1}$. Dans ces conditions, la différentiabilité de f^{-1}, le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{I}$ (lorsque E et F sont supposés complets) impliquent que $D[f^{-1}]$ est $\mathcal{C}^{n-1}$, ie que f^{-1} est comme f de classe n. Par récurrence, on a prouvé le théorème suivant :

✓ **Théorème 3.5.** — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts respectivement de E et de F et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme. Si f est $\mathcal{C}^n$, ($n \in \mathbb{N} \cup \infty$), f est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme.* □

Exercices du chapitre 3

Exercice 30.a. *Soit F un espace vectoriel normé, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$ une application.*

On dit que f est k fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^k_d$, $\mathcal{C}^\infty_d$) ssi f est dérivable k fois (resp. k fois dérivable et f^k est continue, dérivable k fois, quel que soit l'entier k).

Montrer que f est k fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^k_d$, $\mathcal{C}^\infty_d$) ssi f est k fois différentiable (resp. $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$). Pour cela, exprimer Df à l'aide de f' et d'une application $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 30.b. (Coordonnées polaires) *On considère $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$.*

i- Montrer que ϕ n'est pas un difféomorphisme. Trouver un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\phi_{|\mathcal{U}}$ induise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme dont on déterminera l'image.

ii- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathcal{C}^k$ et $\widetilde{f} : (\rho,\theta) \mapsto f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Montrer que $\widetilde{f}$ est $\mathcal{C}^k$ et calculer sa différentielle.

Corrigé des exercices du chapitre 3

Exercice 28. *i-* Une suite nulle à partir d'un certain rang converge bien sûr vers 0, d'où l'inclusion : $\mathcal{C}_{00} \subset \mathcal{C}_0$.

ii- La série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge et $\|\vec{u}_p - \vec{u}\|_1 = \sum_{n=p+1}^{\infty} 1/n^2$ est son reste d'ordre $p+1$, donc $\|\vec{u}_p - \vec{u}\|_1$ converge vers 0, ie $\vec{u}_p$ converge vers $\vec{u}$ dans $\mathcal{C}_0$. La suite $(\vec{u}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est ainsi une suite de Cauchy de $\mathcal{C}_{00}$ qui ne converge pas dans $\mathcal{C}_{00}$, puisque $\vec{u} \notin \mathcal{C}_{00}$. $\mathcal{C}_{00}$ n'est donc pas complet.

iii- Soient $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{00}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathrm{L}(\vec{u} + \lambda.\vec{v}) = (\frac{u_n + \lambda.v_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{u_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + \lambda.(\frac{v_n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{L}(\vec{u}) + \lambda.\mathrm{L}(\vec{v})$. L'application L est facilement bijective, d'inverse $\mathrm{L}^{-1}((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((n+1).u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part $\|\mathrm{L}((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_n|}{n+1} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1$. D'où la continuité de L (et même $\|\mathrm{L}\| \leq 1$).

iv- Soit $\vec{u}_p$ la suite de $\mathcal{C}_{00}$ dont les p premiers termes sont des 1 et les autres termes des 0. On a : $\|\mathrm{L}^{-1}(\vec{u}_p)\|_1 = \sum_{n=0}^{p-1} n+1 = \frac{p(p+1)}{2}$, et $\|\vec{u}_p\|_1 = p$. Le rapport $\frac{\|\mathrm{L}^{-1}(\vec{u}_p)\|_1}{\|\vec{u}_p\|_1}$ n'est donc pas borné indépendamment de p : L^{-1} n'est pas continue.

Exercice 29. Soit $(\mathrm{L}_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E;F)$.

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, \quad \|\mathrm{L}_{n+k} - \mathrm{L}_n\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \epsilon.$$

Donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, \forall x \in E \quad \|\mathrm{L}_{n+k}(x) - \mathrm{L}_n(x)\|_F \leq \epsilon \|x\|_E \tag{1}$$

Soit alors $x \in E$. La suite $(\mathrm{L}_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F par (1). Comme par hypothèse F est complet, cette suite converge dans F. On peut alors définir une application $\mathrm{L} : E \to F$ par $\mathrm{L}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{L}_n(x)$. L est linéaire car l'égalité $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{L}_n(x + \lambda.y) = \mathrm{L}_n(x) + \lambda.\mathrm{L}_n(y)$ est conservée par passage à la limite. Montrons que L est continue en montrant que L est bornée sur la sphère unité. De (1) il vient, en faisant $\epsilon = 1$, $k \to \infty$ et en utilisant la continuité de $\| \ \|_F$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in E \quad | \ \|\mathrm{L}(x)\|_F - \|\mathrm{L}_n(x)\|_F \ | \leq \|\mathrm{L}(x) - \mathrm{L}_n(x)\|_F \leq 1.\|x\|.$$

En particulier pour $n = N$ et $\|x\| = 1$:

$$|\|\mathrm{L}(x)\|_F - \|\mathrm{L}_N(x)\|_F \ | \leq 1 \Longrightarrow \|\mathrm{L}(x)\|_F \leq \|\mathrm{L}_N(x)\| + 1 \leq \|\mathrm{L}_N\|_{\mathcal{L}(E;F)} + 1.$$

Exercice 30. Notons n la dimension commune à E et à F et $\widetilde{E}$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles (ou complexes si le corps de base est $\mathbb{C}$) $n \times n$. Une base étant choisie dans E, une base étant choisie dans F, $\mathcal{L}(E;F)$ est isomorphe à $\widetilde{E}$ par l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E;F)$ associe sa matrice représentative dans les bases choisies. Notons $\Phi : \mathcal{L}(E;F) \to \widetilde{E}$ cet isomorphisme linéaire. $f \in \mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ ssi $\Phi(f)$ est une matrice inversible, autrement dit Φ envoie $\mathcal{I}\mathrm{som}(E;F)$ sur Gl_n, le groupe des matrices inversibles de $\widetilde{E}$. Il suffit alors de prouver que Gl_n est un ouvert de $\widetilde{E}$. Notons que $\widetilde{E}$ étant de dimension finie, on peut le munir de la norme $\| \ \|_2$ (par exemple) qui à une matrice (a_{ij}) associe $\sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2}$. $\widetilde{E}$ n'est alors rien d'autre que $\mathbb{R}^{n^2}$, muni de la norme euclidienne. Maintenant $\det : \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ est une application continue, puisque le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients. Comme $Gl_n = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, GL_n est bien un ouvert de $\widetilde{E}$.

Exercice 30.a. Si l'application $f : I \to F$ est différentiable, on sait que f est aussi dérivable (et réciproquement), et dans ce cas :

$$\forall a \in I, \forall h \in \mathbb{R} \quad Df_{(a)}(h) = h \cdot f'(a).$$

Considérons alors l'application $\Phi : F \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ définie par :

$$\Phi(\vec{y}) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & F \\ h & \mapsto & h \cdot \vec{y} \end{array}$$

L'application Φ est **linéaire**, puisque $\forall y, z \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(y + \lambda z)(h) = h \cdot (y + \lambda z) = h \cdot y + (\lambda h) \cdot z = \Phi(y)(h) + \lambda \Phi(z)(h)$, c'est-à-dire que : $\Phi(y + \lambda z) = \Phi(y) + \lambda \Phi(z)$.
L'application Φ est **bijective**. $y \in \ker(\Phi)$ ssi $\Phi(y) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R};F)}$ ssi $\forall h \in \mathbb{R}$, $\Phi(y)(h) = h \cdot y = 0_F$. Cette dernière égalité pour $h = 1_{\mathbb{R}}$ donne $y = 0_F$. On en conclut que Φ est **injective**. Si $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R};F)$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\phi(h) = h \cdot \phi(1_{\mathbb{R}}) = \Phi(\phi(1_{\mathbb{R}}))(h)$, ie $\phi = \Phi(\phi(1_{\mathbb{R}}))$, et donc Φ est **surjective**.

Notons qu'au passage nous avons montré que $\Phi^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{R};F) \to F$ est $\Phi^{-1}(\phi) = \phi(1_{\mathbb{R}})$.
Montrons que Φ est **continue**. On a :

$$\forall y \in F \ \forall h \in \mathbb{R}, \ \|\Phi(y)(h)\|_F = |h| \cdot \|y\|_F, \quad \text{ie} \quad \|\Phi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};F)} = \|y\|_F,$$

on en conclut que Φ est non seulement continue, mais est une **isométrie**, ce qui donne aussi la continuité de Φ^{-1}, car Φ^{-1} est une isométrie.

Conclusion : Φ est un $\mathcal{C}^\infty$ **difféomorphisme** vérifiant

$$Df = \Phi \circ f' \quad \text{ou } f' = \Phi^{-1} \circ Df \tag{$*$}$$

Notons que la deuxième égalité de $(*)$ est la relation bien connue : $f'(a) = Df_{(a)}(1_{\mathbb{R}})$.

Montrons $\mathcal{H}(k)$: f est k fois dérivable en a ssi f est k fois différentiable en a.

- Pour $k = 1$, on sait que la dérivabilité en a équivaut à la différentiabilité en a.
- Supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie pour un certain $k \geq 1$, et montrons que $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie. Pour cela supposons que f est $k+1$ fois dérivable en a ce qui équivaut à f' est k fois dérivable en a ce qui par hypothèse de récurrence équivaut encore à dire que f' est k fois différentiable en a. Par $(*)$ et par le **Théorème 2.9**, du fait que Φ et Φ^{-1} sont $\mathcal{C}^\infty$, on en conclut que f est $k+1$ fois dérivable en a équivaut à Df est k fois différentiable en a, ie f est $k+1$ fois différentiable en a. Ce qui prouve $\mathcal{H}(k+1)$.

$\mathcal{C}^\infty$ signifie différentiable k fois quel que soit $k \in \mathbb{N}$, et donc par ce qui précède signifie dérivable k fois quel que soit $k \in \mathbb{N}$, ie signifie $\mathcal{C}_d^\infty$. On prouve de la même façon l'équivalence de $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}_d^k$.

Exercice 30.b. 1- Comme pour tout ρ et tout θ, $\varphi(\rho, \theta + 2\pi) = \varphi(\rho, \theta)$, φ ne peut être un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$, car elle n'y est pas **injective**. On a $V = \varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times 0)$, $\psi = \varphi_{|U}$ est une **bijection** de U sur V. Bien sûr, par le **Théorème 2.10**, ψ est $\mathcal{C}^\infty$. On calcule explicitement

$$\begin{array}{llll} \psi^{-1}: & V & \to & U \\ & (x,y) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x) = \arcsin(y/\sqrt{x^2+y^2})) \quad \text{si } x > 0 \\ & & & (\sqrt{x^2+y^2}, \arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})) \quad \text{si } y > 0 \\ & & & (\sqrt{x^2+y^2}, -\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})) \quad \text{si } y < 0 \end{array}$$

Notons $V_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $V_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $V_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$. on a $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, et sur chacun des ouverts V_1, V_2, V_3, ψ^{-1} est une composée de fonctions différentiable. Elle est donc différentiable. Ceci prouve que ψ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféormorphisme par le **Théorème 3.5**.

Calculons la différentielle de φ. La matrice jacobienne de φ dans la base canonique est

$$J(\varphi)_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(\rho,\theta) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}(\rho,\theta) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2- On a par définition $\widetilde{f} = f \circ \varphi$. Comme φ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféormorphisme, si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ par le **Théorème 2.9**. De plus, le **Théorème 2.1** implique que pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $D\widetilde{f}_{(\rho,\theta)} = Df_{\varphi(\rho,\theta)} \circ D\varphi_{(\rho,\theta)}$. La différentielle de $\widetilde{f}$ en (ρ, θ) n'est donc autre que

$$(h,k) \mapsto Df_{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}(h\cos\theta - k\rho\sin\theta, h\sin\theta + k\rho\cos\theta).$$

En notant

$$J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne de f dans la base canonique, le **Théorème 2.4** donne :

$$J(\widetilde{f})_{(\rho,\theta)} = J(f)_{(\varphi(\rho,\theta))} \times J(\varphi)_{(\rho,\theta)}.$$

Le calcul $J(f)_{\varphi(\rho,\theta)} \times J(\varphi)_{(\rho,\theta)}$ donne ensuite les dérivées partielles des deux composantes de $\widetilde{f}$, qui sont les coefficients de la matrice $J(\widetilde{f})_{(\rho,\theta)}$.

Chapitre 4- Théorèmes limites. Points singuliers et extrema.

Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse aux suites (et aux séries) d'applications. On se demande sous quelles conditions il existe une application limite, et si les termes de la suite sont différentiables, si l'application limite (lorsqu'elle existe) est différentiable. Dans cette étude on se préoccupe donc d'approcher *globalement* une application définie sur un ouvert par une suite d'applications.

Dans une deuxième partie, on approche la valeur en un point particulier d'une application k-fois différentiable par la valeur en ce même point d'une application plus simple (polynômiale en les coordonnées de la variable dans le cas où l'espace départ est $\mathbb{R}^n$, une somme finie d'applications $1, 2, \cdots, k$-linéaires symmétriques dans le cas général). Il s'agit de ce que l'on appelle les formules de Taylor. Elles sont de nature *locales*.

Pour ces deux parties, l'outil essentiel et un peu caché, est la formule de la moyenne, comme on le verra dans les preuves.

Enfin dans une troisième partie, on tire les conséquences des formules de Taylor pour l'étude locale des points singuliers.

4.1. Rappels sur la convergence uniforme d'une suite d'applications.

Soient $\mathcal{E}$ un ensemble, F un espace vectoriel normé et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \mathcal{E} \to F$.

Définition (convergence simple). On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $\mathcal{E}$ vers une fonction $f : \mathcal{E} \to F$ ssi :

$$\forall x \in \mathcal{E}, \text{ la suite de } F, \ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } F,$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathcal{E},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N_{x,\epsilon} \in \mathbb{N},\ n \geq N_{x,\epsilon} \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon.$$

Remarque. Par unicité de la limite (lorsqu'elle existe) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, cette dernière est unique.

Comme le montre l'Exercice qui suit, la convergence simple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues ou même différentiables, vers la fonction f, ne garantit pas que la fonction f est continue.

Exercice 31. *Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définie par : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = (1-x)^n$. Montrer que cette suite converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction non continue sur $[0,1]$.*

✓ **Définition (convergence uniforme) .**
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $\mathcal{E}$ vers une fonction $f : \mathcal{E} \to F$ ssi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon \Longrightarrow\ \forall x \in \mathcal{E}, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon.$$

Remarque. La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathcal{E}$ implique la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathcal{E}$ (observer la place du quantificateur $\forall x$ dans les deux définitions).

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathcal{E}$, la fonction $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur $\mathcal{E}$ (par 1 pour $n \geq N_1$ par exemple). On peut donc parler de $\sup_{x\in\mathcal{E}} \|f_n(x) - f(x)\|_F$. La condition "$\forall x \in \mathcal{E}, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon$" équivaut alors à "$\sup\limits_{x\in\mathcal{E}} \|f_n(x) - f(x)\|_F = \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon$". On en déduit :

Proposition 4.1. — *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{E}$ vers la fonction $f : \mathcal{E} \to F$ ssi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{E}$ dans F, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.*

Proposition 4.2. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de E et $a \in \mathcal{E}$. Si une suite $(f_n : \mathcal{E} \to F)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues en a converge uniformément sur $\mathcal{E}$ vers la fonction $f : \mathcal{E} \to F$, la fonction f est continue en a.*

Preuve. Soient $\epsilon > 0$, $x \in \mathcal{E}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f(a) - f(x)\|_F \leq \|f(a) - f_n(a)\|_F + \|f_n(a) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F \qquad (*).$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f(y) - f_n(y)\|_F \leq \epsilon/3$ pour tout $y \in \mathcal{E}$. L'existence d'un tel n est assuré par la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathcal{E}$. La continuité de f_n en a donne l'existence de $\eta > 0$, tel que $\|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f_n(a) - f(x)\|_F \leq \epsilon/3$. On conclut de $(*)$ que :

$$\|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(a) - f(x)\|_F \leq \epsilon. \qquad \square$$

Remarque. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, en posant $f_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ on peut transférer ces théorèmes sur les séries.

✓ On dispose d'un critère commode pour assurer la convergence uniforme d'une série de fonctions à valeurs dans un espace complet, la **converge normale** (voir l'Exercice 34).

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, implique :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon, p \geq N_\epsilon \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{E},\ \ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon/2 \ \text{ et } \ \|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \epsilon/2,$$

donc :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon, p \geq N_\epsilon \implies \forall x \in \mathcal{E},\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \epsilon, \qquad (**).$$

Mais réciproquement, si $(**)$ a lieu, quel que soit $x \in \mathcal{E}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons maintenant que F soit un espace vectoriel normé complet. L'espace F étant complet, cette suite convergealors vers $\ell_x \in F$. Ce qui définit une fonction $\mathcal{E} \ni x \mapsto \ell_x \in F$. La norme $\| \ \|_F : F \to \mathbb{R}$ étant continue, comme toute norme d'un espace vectoriel, en faisant $p \to \infty$ dans $(**)$, on obtient :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon \implies \|f_n(x) - \ell_x\|_F \leq \epsilon,\ \forall x \in \mathcal{E},$$

c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \ell_x$ sur $\mathcal{E}$. On a prouvé :

Proposition 4.3. (Critère de Cauchy uniforme et convergence uniforme) —
Sous l'hypothèse que F est complet, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E vers F converge uniformément sur $\mathcal{E}$ ssi le critère suivant, dit critère de Cauchy uniforme, est vérifié :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon, p \geq N_\epsilon \Longrightarrow \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \epsilon,\ \forall x \in \mathcal{E},$$

ou encore :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon, p \geq N_\epsilon \Longrightarrow \|f_n - f_p\|_\infty \leq \epsilon.$$

Remarque. Ce critère présente le grand avantage de ne pas faire intervenir la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il ne porte que sur la suite elle-même.

4.2. Suites de fonctions différentiables.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. F étant supposé complet, Ω un ouvert convexe et borné de E, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \Omega \to F$ toutes différentiables sur Ω. Soient n et p deux entiers, a et x deux points de Ω.

De la différentiabilité de f_n et f_p en a, et de la convexité de Ω, on tire par le Théorème de la moyenne appliqué à $f_n - f_p$ sur $[x, a]$:

$$\|f_n(x) - f_p(x) - f_n(a) + f_p(a)\|_F \leq \|x - a\|_E \cdot \sup_{\xi \in [a,x]} \|Df_{n(\xi)} - Df_{p(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)} \qquad (***).$$

Mais comme $\|f_n(x) - f_p(x)\|_F - \|f_n(a) - f_p(a)\|_F \leq \|f_n(x) - f_p(x) - f_n(a) + f_p(a)\|_F$, on a :

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n(a) - f_p(a)\|_F + \|x - a\|_E \cdot \sup_{\xi \in [a,x]} \|Df_{n(\xi)} - Df_{p(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)}.$$

Puisque par hypothèse Ω est borné, il existe $M > 0$ tel que Ω soit contenu dans une boule de diamètre M, soit : $x, a \in \Omega \Longrightarrow \|x - a\| \leq M$. On en déduit :

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n(a) - f_p(a)\|_F + M \cdot \sup_{\xi \in [a,x]} \|Df_{n(\xi)} - Df_{p(\xi)}\|_{\mathcal{L}(E;F)} \qquad (****).$$

Maintenant si la suite de fonctions $\Omega \ni \xi \mapsto Df_{n(\xi)} \in \mathcal{L}(E;F)$ converge uniformément sur Ω vers $\mathrm{L} : \Omega \to \mathcal{L}(E;F)$, cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme sur Ω. Si de plus la suite de vecteurs $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge dans F, par $(****)$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi le critère de Cauchy uniforme sur Ω. Et donc $(****)$ et la Proposition 4.3 donnent la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω vers une fonction $f : \Omega \to F$. Notons que par la Proposition 4.2, f est continue, puisque chaque f_n est continue (f_n étant différentiable).

Étudions la différentiabilité de f.

En faisant $p \to \infty$ dans $(***)$, par continuité de $\| \ \|_F$ et de $\| \ \|_{\mathcal{L}(E;F)}$, on obtient :

$$\|f_n(x) - f(x) - f_n(a) + f(a)\|_F \leq \|x - a\|_E \cdot \sup_{\xi \in [a,x]} \|Df_{n(\xi)} - \mathrm{L}\|_{\mathcal{L}(E;F)}.$$

Soit $p_n : \Omega \to F$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \Omega,\ p_n(x) = \frac{1}{\|x - a\|}[f_n(x) - f_n(a) - Df_{n(a)}(x - a)] \ \text{ si } x \neq a \ \text{ et } \ p_n(a) = 0_F.$$

La différentiabilité de f_n en a équivaut à la continuité de p_n en a. Si on définit de même :

$$\forall x \in \Omega,\ p(x) = \frac{1}{\|x - a\|}[f(x) - f(a) - \mathrm{L}_{(a)}(x - a)] \ \text{ si } x \neq a \ \text{ et } \ p(a) = 0_F,$$

prouver la continuité de p en a équivaut à prouver la différentiabilité de f en a. Par la Proposition 4.2, la continuité de p en a pourrait être assurée par la convergence uniforme de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers p, puisque chaque p_n est continue. Montrons en effet que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers p sur Ω.

On a, pour tout $x \neq a$:

$$\|p(x) - p_n(x)\|_F \leq \frac{1}{\|x - a\|}[\|f(x) - f_n(x) + f(a) - f_n(a)\|_F + \|x - a\|_E \cdot \|\mathrm{L}_{(a)} - Df_{n(a)}\|].$$

Par $(***)$, on obtient, pour tout $x \neq a$, en notant $\| \ \|_\infty = \sup_{\xi \in \Omega} \| \|_{\mathcal{L}(E;F)}$:

$$\|p(x) - p_n(x)\|_F \leq \|\mathrm{L} - Df_n\|_\infty + \|\mathrm{L}_{(a)} - Df_{n(a)}\|.$$

Remarquons que cette dernière inégalité est encore vraie pour $x = a$, car elle devient : $0 \leq \|\mathrm{L} - Df_n\|_\infty + \|\mathrm{L}_{(a)} - Df_{n(a)}\|$.

On a enfin, pour tout $x \subset \Omega$:

$$\|p(x) - p_n(x)\|_F \leq 2 \cdot \|\mathrm{L} - Df_n\|_\infty.$$

La convergence uniforme de $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L sur Ω implique bien celle de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers r, d'où la continuité de r, ie la différentiabilité de f.

Remarquons que dans ce qui précède, le point a en lequel on prouve la différentiabilité de f est un point de Ω tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comme les hypothèses impliquent ensuite la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ quel que soit $x \in \Omega$, f est différentiable en réalité en tout point x de Ω.

On peut énoncer :

Proposition 4.4. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F étant supposé complet. Soit Ω un ouvert convexe et borné de E, $a \in \Omega$ et soit $(f_n : \Omega \to F)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables sur Ω telle que :*

- *la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F,*
- *la suite $(Df_n : \Omega \to \mathcal{L}(E;F))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(E;F)$.*

Il existe alors une fonction $f : \Omega \to F$ différentiable sur Ω, telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω vers f et $Df = \mathrm{L}$, ie $D(\lim\limits_{n\to\infty} f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} Df_n$. $\square$

Dans la preuve de la Proposition 4.4, on prouve l'existence de la limite f et sa différentiabilité en supposant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur un convexe borné Ω, que la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur Ω et qu'il existe $a \in \Omega$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si on note Ω_1 le sous-ensemble de Ω des points a tels que $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et Ω_2 le sous-ensemble de Ω des points b tels que $(f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on obtient une partition de Ω : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Soit alors $a \in \Omega_1$, et $\eta_a > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, \eta_a)$ de centre a et de rayon η_a est contenue dans Ω (un tel η_a existe puisque Ω est un ouvert). Si on suppose que la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $B(a, \eta_a)$, la Proposition 4.4 assure la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $B(a, \eta_a)$, et donc en particulier la convergence de $(f_n(a'))_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $a' \in B(a, \eta_a)$. En conclusion $B(a, \eta_a) \subset \Omega_1$, c'est-à-dire que Ω_1 est un ouvert de Ω.

D'autre part, si $b \in \Omega_2$ et s'il existe une boule $B(b, \eta_b) \subset \Omega$ sur laquelle la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, $B(b, \eta_b)$ est contenue dans Ω_2, puisque si $B(b, \eta_b)$ contient un point a de Ω_1, la Proposition 4.4 assure que la suite $(f_n(b'))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $b' \in B(b, \eta_b)$, et donc en particulier

la suite $(f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui contredit $b \in \Omega_2$. La convergence uniforme de la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur une boule centrée en a, quel que soit $x \in \Omega$ implique donc que Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts.

Définition (convergence uniforme locale). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F étant supposé complet, Ω un ouvert de E, et une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de Ω vers F. On dit que cette suite *converge uniformément localement sur Ω vers $g : \Omega \to F$* ssi quel que soit $x \in \Omega$ il existe une boule ouverte centrée en x sur laquelle $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.

Avec cette définition, la discussion qui précède montre le théorème suivant :

✓ **Théorème 4.5.** — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F étant supposé complet, Ω un ouvert de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω vers F, toutes différentiables sur Ω et telle que la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de Ω vers $\mathcal{L}(E;F)$ converge localement uniformément sur Ω vers $\mathrm{L} : \Omega \to \mathcal{L}(E;F)$. Les ensembles :*

- $\Omega_1 = \{a \in \Omega; (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\}$,
- $\Omega_2 = \{b \in \Omega; (f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas* $\}$,

sont deux ouverts de Ω tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Et si Ω_1 est non vide, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur Ω_1 vers une fonction différentiable $f : \Omega_1 \to F$, telle que : pour tout $x \in \Omega_1$, $Df_{(x)} = \mathrm{L}_{(x)}$, ie $D(\lim\limits_{n\to\infty} f_n) = \lim\limits_{n\to\infty} Df_n$. $\square$

On peut transposer ce théorème immédiatement sur les séries de fonctions :

Théorème 4.6. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F étant supposé complet, Ω un ouvert de E, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de Ω vers F, toutes différentiables sur Ω et telle que la série $(\sum\limits_{j=1}^{n} Df_j)_{n\in\mathbb{N}}$*

de fonctions de Ω *vers* $\mathcal{L}(E;F)$ *converge localement uniformément sur* Ω *vers* $\mathrm{L} : \Omega \to \mathcal{L}(E;F)$*. Les ensembles :*

- $\Omega_1 = \{a \in \Omega; (\sum_{j=1}^{n} f_j(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\}$,
- $\Omega_2 = \{b \in \Omega; (\sum_{j=1}^{n} f_j(b))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas* $\}$,

sont deux ouverts de Ω *tels que* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*. Et si* Ω_1 *est non vide, la série* $(\sum_{j=1}^{n} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément localement sur* Ω_1 *vers une fonction différentiable* $f : \Omega_1 \to F$*, telle que : pour tout* $x \in \Omega_1$*,* $Df_{(x)} = \mathrm{L}_{(x)}$*,* $D(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Df_j$*.* $\square$

Les Théorèmes 4.4 et 4.5 ont une version $\mathcal{C}^k$, nous donnons cette version sans preuve (elle est immédiate) dans l'énoncé suivant :

Théorème 4.7. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* F *étant supposé complet,* Ω *un ouvert de* E*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* Ω *vers* F*, toutes* k *fois différentiables ou* $\mathcal{C}^k$ *sur* Ω *et telle que la suite (resp. la série associée à la suite)* $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de* Ω *vers* $\mathcal{L}(E,\cdots,E;F)$ *converge localement uniformément sur* Ω *vers* $\mathrm{L}_k : \Omega \to \mathcal{L}(E,\cdots,E;F)$*. Les ensembles :*

- $\Omega_1 = \{a \in \Omega; (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\}$,
- $\Omega_2 = \{b \in \Omega; (f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas* $\}$,

sont deux ouverts de Ω *tels que* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*. Et si* Ω_1 *est non vide, la suite (resp. la série associée à la suite)* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément localement sur* Ω_1 *vers une fonction k-fois différentiable ou* $\mathcal{C}^k$*,* $f : \Omega_1 \to F$*, telle que : pour tout* $x \in \Omega$*,* $D^k f_{(x)} = \mathrm{L}_{k(x)}$*, ie* $D^k(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} D^k f_n$ *(resp.* $D^k(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} D^k f_j$*).*

$\square$

Remarque (cas où E **et** F **sont de dimensions finies).** Dans ce cas interprétons la convergence uniforme de $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'application $Df_n : \Omega \to \mathcal{L}(E;F)$ est à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(E;F)$ qui est de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$. Cet espace peut être identifié à $\mathcal{M}at(\dim(E) \times \dim(F))$ (l'espace des matrices $\dim(E) \times \dim(F)$), ce qui revient à identifier $Df_{n(a)}$ et sa matrice jacobienne $Jf_{(a)}$. Sur l'espace $\mathcal{L}(E;F)$, toutes les normes sont équivalentes, et si la suite $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est localement uniformément convergente sur Ω pour un choix de norme sur $\mathcal{L}(E;F)$, elle est encore localement uniformément convergente sur Ω pour tout autre choix de norme sur $\mathcal{L}(E;F)$. Considérons alors sur $\mathcal{M}at(\dim(E) \times \dim(F))$ la norme : $\|(\alpha_{ij})_{1\le i\le \dim(E), 1\le j\le \dim(F)}\|_\infty = \max_{i,j}|\alpha_{ij}|$. Si on identifie $\mathcal{M}at(\dim(E) \times \dim(F))$ à $\mathbb{R}^{\dim(E)\times\dim(F)}$, cette norme est la norme $\|\ \|_\infty$ classique sur $\mathbb{R}^{\dim(E)\times\dim(F)}$!

Maintenant la convergence uniforme de $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L sur une boule $\mathcal{B}$ de E signifie :

$$\forall \epsilon \in E,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n \ge N_\epsilon \Longrightarrow \|Jf_{n(x)} - \mathrm{L}_{(x)}\|_\infty \le \epsilon,\ \forall x \in \mathcal{B}, \tag{6}$$

ou encore en écrivant le critère de Cauchy ($\mathcal{L}(E;F)$ étant de dimension finie, cet espace est complet) :

$$\forall \epsilon \in E,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ n, p \ge N_\epsilon \Longrightarrow \|Jf_{n(x)} - Jf_{p(x)}\|_\infty \le \epsilon,\ \forall x \in \mathcal{B}.$$

En notant $(\ell_{ij}(x))_{i\in\{1,\cdots,\dim(E)\}, j\in\{1,\cdots,\dim(F)\}}$ la matrice représentative de L, et f_n^i, $1 \le i \le \dim(F)$, la i^{eme} composante de f_n, la convergence uniforme de $(Df_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L sur la boule $\mathcal{B}$ équivaut par (6) à celle des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_n^i}{\partial x_j}$ vers ℓ_{ij}. On peut dans ce cas énoncer :

Théorème 4.8. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés de dimension finies respectivement* m *et* p*,* Ω *un ouvert de* E*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* Ω *vers* F*, toutes différentiables sur* Ω*, telle que quel*

✓

que soit $i \in \{1, \cdots, p\}$*, quel que soit* $j \in \{1, \cdots, m\}$*, la* j^{eme} *dérivée partielle* $\dfrac{\partial f_n^i}{\partial x_j}$ *de la* i^{eme} *composante de* f_n *converge uniformément localement sur* Ω *vers une fonction* $\ell_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$*. Les ensembles :*

- $\Omega_1 = \{a \in \Omega; (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\}$,
- $\Omega_2 = \{b \in \Omega; (f_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas* $\}$,

sont deux ouverts de Ω *tels que* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$*. Et si* Ω_1 *est non vide, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément localement sur* Ω_1 *vers une fonction différentiable* $f : \Omega_1 \to F$*, telle que : pour tout* $x \in \Omega_1$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \ell_{ij}(x)$*,*

ie $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)^i = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial f_n^i}{\partial x_j}$. □

4.3. Formules de Taylor.

4.3.1. Formules de Taylor-Young.

Rappelons la formule de Taylor-Young pour $f : I \to \mathbb{R}$ une application k fois dérivable en un point a de l'intervalle I de $\mathbb{R}$. On a $\forall h \in \mathbb{R}, a + h \in I$:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{1}{j!}h^j f^{(j)}(a) + \cdots + \frac{1}{k!}h^k f^{(k)}(a) + h^k \cdot p_a(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} p_a(h) = 0$$

En considérant que $h^j f^{(j)}(a) = D^j f_{(a)}(h, \cdots, h)$ (cf Théorème 2.10, formule (3)), la généralisation suivante n'est pas surprenante :

✓ **Théorème 4.9. (Formule de Taylor-Young)** — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* Ω *un ouvert de* E*,* a *un point de* Ω*, et* $f : \Omega \to F$ *une application qui admet en* a *une différentielle d'ordre* $k \geq 1$*. Il existe alors* $p_a : \Omega \to F$ *telle que :*

$$\forall \vec{h}; a + \vec{h} \in \Omega, \quad f(a+\vec{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f_{(a)}(\vec{h})^j + ||\vec{h}||^k p_a(\vec{h}) \text{ et } \lim_{\vec{h}\to 0} p_a(\vec{h}) = 0,$$

où par convention : $D^0 f_{(a)}(\vec{h})^0 = f(a)$ *et* $D^j f_{(a)}(\vec{h})^j = D^j f_{(a)}[(\vec{h}), \ldots, (\vec{h})]$*.*

Preuve. On fait la preuve par récurrence sur k. Si $k = 1$, le théorème à prouver est l'exacte transcription de la définition de la différentiabilité de f en a. Supposons le théorème vrai pour l'entier $k - 1$ et montrons alors qu'il est vrai pour k. Pour cela supposons que f admet a une différentielle d'ordre k.

Soit $r_k(\vec{h}) = f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{k} \dfrac{1}{j!} D^j f_{(a)}(\vec{h})^j$. On a $r_k(0_E) = 0_F$. On sait par la Proposition 1.5 et le Théorème de Schwarz que $D(\vec{h} \to D^j f_{(a)}(\vec{h})^j)_{(\vec{h})}$ est l'application linéaire :

$$E \ni \vec{k} \to j.D^j f_{(a)}(\vec{h})^{j-1}(\vec{k}).$$

On peut le vérifier en exercice, dont la solution est donnée dans la suite immédiate de la preuve :

Exercice 32. *Avec les notations ci-dessus, vérifier que :*

$$D[\vec{h} \to D^j f_{(a)}(\vec{h})^j]_{(\vec{h})}(\vec{k}) = j.D^j f_{(a)}(\vec{h})^{j-1}(\vec{k}).$$

En effet soit $\Phi : E \ni \vec{h} \to (\vec{h})^j \in E^j$. Φ est trivialement linéaire continue. On a $\vec{h} \to D^j f_{(a)}(\vec{h})^j = [D^j f_{(a)} \circ \Phi](\vec{h})$ et donc $D(\vec{h} \to D^j f_{(a)}(\vec{h})^j)_{(\vec{h})}(\vec{k}) = D(D^j f_{(a)} \circ \Phi)_{(\vec{h})}(\vec{k}) = [D(D^j f_{(a)})_{\Phi(\vec{h})}](\Phi(\vec{k})) = D^j f_{(a)}(\vec{k}, \vec{h}, \ldots, \vec{h}) +$

$\ldots + D^j f_{(a)}(\vec{h}, \vec{h}, \ldots, \vec{k})$, par le Théorème 1.5. Or par le Théorème de Schwarz, les termes de cette somme sont égaux entre-eux.

On obtient donc :

$$Dr_{k(\vec{h})} = Df_{(a+\vec{h})} - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(j-1)!} D^j f_{(a)}(\vec{h})^{j-1} = Df_{(a+\vec{h})} - Df_{(a)} - D^2 f_{(a)}(\vec{h}) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{(k-1)!} D^k f_{(a)}(\vec{h})^{k-1},$$

et par hypothèse de récurrence, cette quantité étant le reste de rang $k-1$ de $\Omega \ni x \to Df_{(x)} \in \mathcal{L}(E; F)$ en a, on a :

$$Dr_{k(\vec{h})} = ||(\vec{h})^{k-1}|| p_a(\vec{h}) \text{ avec } \lim_{\vec{h} \to 0} p_a(\vec{h}) = 0.$$

On en déduit, par le théorème de la moyenne, que :

$$||r_k(\vec{h}) - r_k(0)|| = ||f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j f_{(a)}(\vec{h})^j|| \leq ||\vec{h}||.||\vec{h}||^{k-1} \sup_{\zeta \in B(0, ||\vec{h}||)} ||p_a(\zeta)||.$$

Soit, finalement :

$$||f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j f_{(a)}(\vec{h})^j|| \leq ||\vec{h}||^k q_a(\vec{h}) \text{ avec } q_a(\vec{h}) = \sup_{\zeta \in B(0, ||\vec{h}||)} ||p_a(\zeta)|| \underset{\vec{h} \to 0}{\to} 0 . \qquad \square$$

Remarque. Bien sûr lorsque $E = \mathbb{R}$, on retrouve la formule de Taylor-Young que l'on connait bien pour les fonctions réelles, en écrivant, grâce à la formule du théorème 2.10, $h^k.f^{(k)}(a) = D^k f_{(a)}(h)^k$.

Exemple. Écrivons la formule de Taylor-Young pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x \sin(y)$, à l'ordre 3, en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- On a $Df_{(a,b)}(h, k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)k = \sin(b)h + a\cos(b)k$.
- $D^2 f_{(a,b)}[(h, k), (h, k)] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a, b)h^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)kh + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a, b)k^2$

$= \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a, b)h^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a, b)k^2 = 0.h^2 + 2\cos(b)hk - a\sin(b)k^2$.

finalement :

$$(a+h)\sin(b+k) - a\sin(b) = \sin(b)h + a\cos(b)k + \frac{1}{2}[2\cos(b)hk - a\sin(b)k^2] + ||(h, k)||^2.p_{(a,b)}(h, k),$$

avec $p_{(a,b)}(h, k) \to 0$ lorsque $(h, k) \to (0, 0)$.

4.3.2. Formules de Taylor avec reste intégral.

Commençons par des considérations sur l'intégration des applications de variables réelles et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet F.

Si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to F$ est une application bornée sur I (ce sera automatiquement le cas si f est continue, puisque I est compact), on peut considérer les sommes supérieures :

$$S(f, \mathcal{S}) = \sum_{j=1}^{p-1} \sup_{t \in [\sigma_j, \sigma_{j+1}]} (f(t)) \cdot (\sigma_{j+1} - \sigma_j)$$

et inférieures :

$$s(f,\mathcal{S}) = \sum_{j=1}^{p-1} \inf_{t\in[\sigma_j,\sigma_{j+1}]} (f(t)) \cdot (\sigma_{j+1} - \sigma_j)$$

de Darboux de f assoiciées à des subdivisions finies $\mathcal{S} = \{a = \sigma_1 < \cdots < \sigma_p = b\}$ de I.

On dit qu'une subdivision $\mathcal{S}'$ de I est plus fine que la subdivision $\mathcal{S}$ de I, si les points de $\mathcal{S}$ sont des points de $\mathcal{S}'$. On montre alors facilement que :

$$s(f,\mathcal{S}) \leq S(f,\mathcal{S}), \quad S(f,\mathcal{S}') \leq S(f,\mathcal{S}) \quad \text{et} \quad s(f,\mathcal{S}) \leq s(f,\mathcal{S}').$$

En particulier si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux subdivisions finies de I, on peut considérer la troisième subdivision finie de I, $\mathcal{S}$, ayant pour points de subdivision tous les points de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. $\mathcal{S}$ est alors par construction plus fine que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On en déduit que l'on a toujours :

$$s(f,\mathcal{S}_1) \leq S(f,\mathcal{S}_2).$$

De cette majoration on déduit l'existence de :

$$\bar{S}(f,\mathcal{S}) = \inf_{subdivisions\ de\ I} S(f,\mathcal{S})$$

et de $\bar{s}(f,\mathcal{S}) = \sup\limits_{subdivisions\ de\ I} s(f,\mathcal{S})$. Lorsque $\bar{S}(f,\mathcal{S}) = \bar{s}(f,\mathcal{S})$, on note cette quantité $\int_I f$, on l'appelle l'intégrale (de Riemmann) de f sur I. On dit encore que f est intégrable sur I.

On peut prouver que toute application continue sur I est intégrable sur I, et dans la suite les applications dont on considèrera les intégrales seront toutes continues.

On peut, tout comme dans le cas où $F = \mathbb{R}$, montrer que lorsque f est intégrable sur I, $\|f\|$ l'est aussi et que :

$$\|\int_I f\| \leq \int_I \|f\|$$

et si f est continue sur I, l'application $F : [a,b] \ni t \mapsto \displaystyle\int_{[a,t]} f \in F$ est dérivable, et vérifie le *Théorème fondamental de l'analyse* :

$$F'(u) = f(u).$$

Ce Théorème assure en particulier qu'une fonction continue $f : I \to F$ admet une primitive sur I(par exemple $I \ni t \mapsto \displaystyle\int_{[a,t]} f \in F$). Notons qu'alors, si f est $\mathcal{C}^1$:

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a) \tag{7}$$

En effet f et $g : [a,b] \ni t \mapsto \displaystyle\int_{[a,t]} f' \in F$ ont même dérivée sur le connexe I, et donc par le Corollaire 2.7, $g - f$ est constante sur I. La détermination de la constante conduit alors immédiatement à (7).

Notons pour finir que si F est de dimension finie m, intégrer f revient à intégrer les composantes de f dans une base (pour la preuve, procéder comme pour la différentiation des applications à valeurs dans un produit, Theéorème 2.3 et Exercice 23). Autrement dit, si $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ est une base de F, il existe des fonctions $f_1, \cdots, f_m : I \to \mathbb{R}$ telles que quels que soit $t \in I$, $f(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} f_j(t) \cdot \vec{e}_j$ et si f intégrable sur I, les f_j le sont et de plus :

$$\int_I f = \sum_{j=1}^{m} (\int_I f_j(t)) \cdot \vec{e}_j.$$

Ou encore, écrivant f en coordonnées dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$:

$$(\int_I f)_{\mathcal{B}} = (\int_I f_1, \cdots, \int_I f_1).$$

De la formule (7) on obtient directement la formule de Taylor suivante :

Théorème 4.10. (Formule de Taylor avec reste intégral) — *Soit E un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de E, F un espace vectoriel normé complet, $k \geq 1$ un entier et $f : \Omega \to F$ une application $\mathcal{C}^k$. Soit $a, h \in \Omega$ tels que $[a, a+h] = \{\xi \in E; \exists t \in [0,1]; \xi = a + t \cdot h\} \subset \Omega$ (ce qui est le cas dès que h est suffisament petit). On a :*

✓

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} D^j f_{(a)}(h)^j + \frac{1}{(k-1)!} \int_{[0,1]} (1-t)^{k-1} D^k f_{(a+t\cdot h)}(h)^k.$$

Remarque. Les hypothèses du Théorème 4.10 sont un peu plus fortes que celles du Théorème 4.9 (formule de Taylor-Young) : on réclame ici le caractère $\mathcal{C}^k$ de f et non plus la k-différentiabilité, d'autre part dans la construction de l'intégrale, on a recours à la complétude de F. Cependant la formule de Taylor avec reste intégral est plus précise que la formule de Taylor-Young, car elle donne précisément la valeur du reste. Par exemple on pourra, à l'aide de cette formule obtenir des minorations, et non plus seulement des majorations.

On verra dans la preuve du Théorème d'inversion locale en dimension finie, à quel point ceci est utile.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on retrouve la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions réelles que l'on connait :

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}^j f^j_{(a)} \cdot h^j + \frac{h^k}{(k-1)!} \int_{[0,1]} (1-t)^{k-1} f^k(a + t \cdot h).$$

Preuve. Par hypothèse f est $\mathcal{C}^k$ sur Ω et quel que soit $t \in [0,1]$, $[a + t \cdot h] \in \Omega$, l'application $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)^{k-1} D^k f_{(a+t\cdot h)}(h)^k \in F$ est donc continue et ainsi intégrable sur $[0,1]$. Soit $g : [0,1] \to F$ l'application définie par :

$$g(t) = f(a + t\cdot h) + (1-t) D f_{(a+t\cdot h)}(h) + \frac{1}{2!}(1-t)^2 D^2 f_{(a+t\cdot h)}(h)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(k-1)!}(1-t)^{k-1} D^{k-1} f_{(a+t\cdot h)}(h)^{k-1}.$$

g est $\mathcal{C}^1$, puisque f est $\mathcal{C}^k$. Calculons $g'(t)$. Si $j \in 1, \cdots, k-1$, on a :

$$\frac{d}{du}\Big[u \mapsto \frac{1}{(j)!}(1-u)^j D^j f_{(a+u\cdot h)}(h)^j\Big](t) = \frac{1}{(j)!}\frac{d}{du}\Big[u \mapsto (1-u)^j\Big](t) \cdot D^j f_{(a+t\cdot h)}(h)^j +$$

$$\frac{1}{(j)!}(1-t)^j \frac{d}{du}\Big[u \mapsto D^j f_{(a+u\cdot h)}(h)^j\Big](t)$$

$$= -\frac{1}{(j-1)!}(1-t)^{j-1} \cdot D^j f_{(a+t\cdot h)}(h)^j + \frac{1}{(j)!}(1-t)^j \cdot D^{j+1} f_{(a+t\cdot h)}(h)^{j+1}.$$

On en conclut que :

$$g'(t) = \frac{1}{(k-1)!}(1-t)^j \cdot D^k f_{(a+t\cdot h)}(h)^k.$$

Or par (7) :

$$g(1) - g(0) = \int_{[0,1]} g',$$

Ce qui donne exactement la formule annoncée. $\square$

4.4. Points singuliers et extrema.

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en $a \in \Omega$. On dit que a est un **point critique** de f ssi $Df_{(a)}$ n'est pas une application surjective ie $Df_{(a)}(E) \neq F$. On dit que a est un **point singulier** de f ssi $Df_{(a)} = 0_{\mathcal{L}(E;F)}$. $f(a)$ est appelée une **valeur singulière** de f lorsque a est un point singulier et une **valeur critique** de f lorsque a est un point critique. Supposons maintenant que $F = \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en a ssi il existe $\rho > 0$, tel que $||x - a|| < \rho$ implique $|f(x)| \leq |f(a)|$ (resp. $|f(x)| \geq |f(a)|$). On suppose bien sûr que ρ est suffisamment petit pour que $||x - a|| < \rho$ implique $x \in \Omega$. Un maximum ou un minimum local est appelé un **extremum**.

Rappelons qu'une fonction d'une variable réelle dérivable en un point et qui admet en ce point un extremum est de dérivée nulle en ce point (considérer les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement, qui sont de signes opposés).

Exercice 33. *Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$, qui admet en a un maximum ou un minimum local est de dérivée nulle en a.*

Proposition 4.11. — *Soient E un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in \Omega$. Si a est un extremum de f, a est un point singulier de f.*

Preuve. Si a est un extremum de f, 0 est aussi un extremum de la fonction réelle $f_{\vec{h}}(t) = f(a + t\vec{h})$, quel que soit $\vec{h} \in E$. Or cette fonction est différentiable en $0_{\mathbb{R}}$, puisque f est différentiable en a. On sait alors que $f'_{\vec{h}}(0) = 0$ (Exercice 33). Mais on sait aussi que $f'_{\vec{h}}(0) = D_{\vec{h}}f_{(a)} = Df_{(a)}(\vec{h})$. $\square$

✓ **Remarque importante.** Bien sûr cette proposition n'admet pas de réciproque, c'est-à-dire que si f est différentiable en a et admet en a un point singulier, a n'est pas nécessairement un extremum de f. Par exemple : $t \to t^3$ n'admet pas d'extremum en 0, mais 0 est cependant un point singulier de f.

Supposons maintenant que a soit un point singulier de f et que $D^2f_{(a)}$ existe (donc $Df_{(x)}$ existe sur un voisinage de a). La formule de Taylor-Young montre que :

$$\forall a + \vec{h} \in \Omega, \quad f(a + \vec{h}) = f(a) + D^2f_{(a)}(h)^2 + ||\vec{h}||^2 p_a(\vec{h}) \;\text{ avec } \lim_{\vec{h} \to 0} p_a(\vec{h}) = 0.$$

Nous allons étudier le signe de $f(a + \vec{h}) - f(a)$ grâce à celui de $D^2f_{(a)}(\vec{h})^2 = D^2f_{(a)}(\vec{h}, \vec{h})$.

• S'il existe $c > 0$ tel que pour tout $\vec{h} \in S(0,1) = \{\vec{h} \in E; ||\vec{h}|| = 1\}$, $D^2f_{(a)}(\vec{h}, \vec{h}) \geq c > 0$, on a quel que soit $\vec{k} \in E \setminus \{0_E\}$:

$$D^2f_{(a)}\left(\frac{\vec{k}}{||\vec{k}||}, \frac{\vec{k}}{||\vec{k}||}\right) = \frac{1}{||\vec{k}||^2} D^2f_{(a)}(\vec{k}, \vec{k}) \geq c > 0, \quad \text{soit } D^2f_{(a)}(\vec{k}, \vec{k}) \geq c||\vec{k}||^2.$$

On en déduit :

$$\forall a + \vec{h} \in \Omega, \quad f(a + \vec{h}) - f(a) \geq ||\vec{h}||^2(c + p_a(\vec{h})) \;\text{ avec } \lim_{\vec{h} \to 0} p_a(\vec{h}) = 0,$$

et donc dès que $\vec{h}$ est suffisamment proche de a pour que $|p_a(\vec{h})| \leq c/2$, $f(a + h) > f(a)$, i.e. a est minimum local strict de f.

• De même, s'il existe $c < 0$ tel que pour tout $\vec{h} \in S(0,1)$, $D^2f_{(a)}(\vec{h},\vec{h}) \leq c < 0$, par la formule de Taylor-Young, f admet en a un maximum local strict.

Théorème 4.12. — *Soient E un espace vectoriel normé réel, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $D^2f_{(a)}$ existe et a soit un point singulier de f.*

i- S'il existe $c > 0$ tel que $\forall \vec{h} \in S(0,1)$, $D^2f_{(a)}(\vec{h},\vec{h}) \geq c > 0$, f admet en a un minimum local strict.

ii- S'il existe $c < 0$ tel que $\forall \vec{h} \in S(0,1)$, $D^2f_{(a)}(\vec{h},\vec{h}) \leq c < 0$, f admet en a un maximum local strict.

En particulier lorsque E est de dimension finie, $S(0,1)$ est compact, et si la forme quadratique $D^2f_{(a)}$ est définie positive, comme elle atteint son inf sur $S(0,1)$, celui-ci est nécessairement > 0, et on est dans le cas i : f admet en a un minimum local strict.

Si la forme quadratique $D^2f_{(a)}$ est définie négative, pour les mêmes raisons, on est dans le cas ii : f admet en a un maximum local strict.

Étude pratique en dimension finie. Déterminer si la forme $D^2f_{(a)}$ est définie négative ou positive revient à déterminer les valeurs propres du Hessien $\mathcal{H}(f)_{(a)}$, c'est-à-dire regarder les valeurs des coefficients diagonaux de $\Delta_{(a)}$ (les notations sont celles du Chapitre précédent).

- Si toutes les valeurs propres de $\mathcal{H}(f)_{(a)}$ sont strictement positives, on est dans le cas i.

- Si toutes les valeurs propres de $\mathcal{H}(f)_{(a)}$ sont strictement négatives, on est dans le cas ii.

- Si les valeurs propres de $\mathcal{H}(f)_{(a)}$ sont non nulles mais de signes distincts, le long des droites affines passant par a et dirigées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres > 0 de $\mathcal{H}(f)_{(a)}$, f admet en a un minimum local strict et le long des droites affines passant par a et dirigées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres < 0 de $\mathcal{H}(f)_{(a)}$, f admet en a un maximum local strict. On parle de point "col".

- Si $\mathcal{H}(f)_{(a)}$ possède une valeur propre nulle, on ne peut rien dire en examinant seulement $D^2f_{(a)}$. Il faut pousser plus loin l'étude du comportement de f le long des droites affines passant par a et dirigées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles, grâce à la formule de Taylor à un ordre > 2.

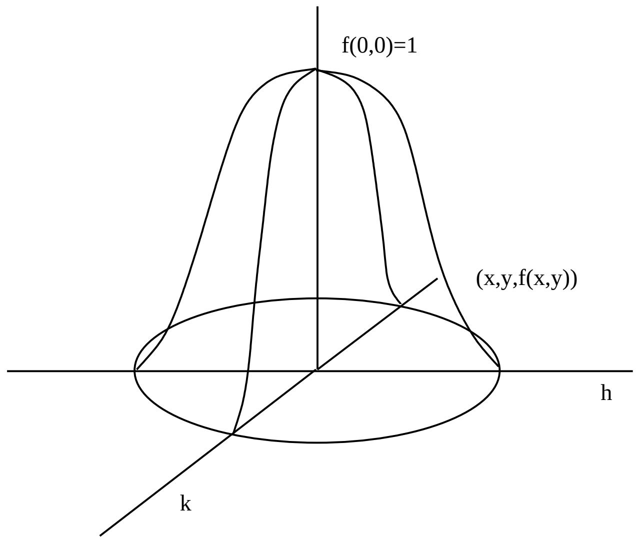
Exemple. Étudions le comportement de f au voisinage de ses points singuliers.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (1-x^2)(1-y^2) \end{array}$$

Les points singuliers a de f sont déterminés par $Df_{(a)} = 0$ ce qui équivaut à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. On obtient quatre points singuliers : $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1)$. Le Hessien de f en (x,y) (dans la base canonique) est :

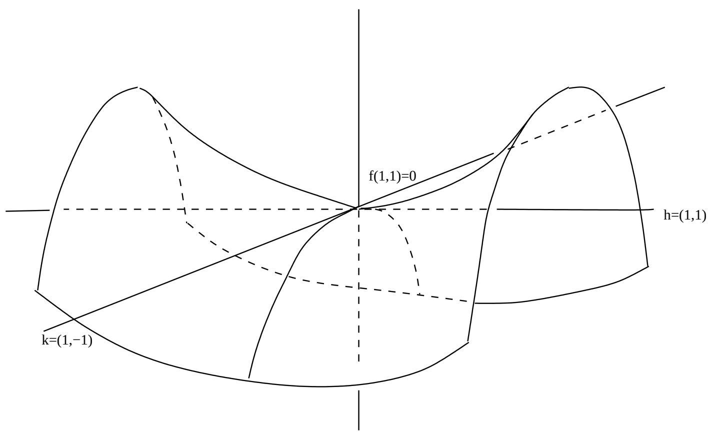
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2y^2 & 4xy \\ 4xy & -2+2x^2 \end{pmatrix}$$

• en $(x,y) = (0,0)$, le Hessien dans la base canonique est diagonal, de valeurs propres -2 et -2, donc f admet en $(0,0)$ un maximum local strict.



• en $(x, y) = (1, 1)$, les valeurs propres du Hessien sont -4 et 4. Une base de l'espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 est $\vec{h} = (1, 1)$ et une base de l'espace propre E_{-4} associé à la valeur propre -4 est $\vec{k} = (1, -1)$. Le long de la droite $\{(1, 1) + t\vec{h}\}$, f admet donc un minimum local strict en $(1, 1)$, et le long de la droite $\{(1, 1) + t\vec{k}\}$, f admet un maximum local strict en $(1, 1)$. Il s'agit d'un point col. Il en est de même des deux derniers points singuliers.

Au voisinage de ces points, le graphe de f a donc l'aspect suivant (point col) :



✓ **Remarque importante.** L'étude des points singuliers de f menée ci-dessus **n'est valable que lorsque le point en question est dans un ouvert sur lequel f est différentiable**. Lorsque l'on veut étudier les **extrema de f sur un ensemble qui n'est pas ouvert, on restreint successivement f à des domaines ouverts, non plus de E mais d'espace de dimension** $\leq \dim(E)$**.**

Exemple. Étudions les extrema de $\widetilde{f} = f_{|\bar{B}}$ (où f est donnée ci-dessus), la restriction de f à la boule unité *fermée* $\bar{B}$ de E.

• Sur la boule unité ouverte, le seul point singulier de f (et donc le seul candidat à être un extremum local de f) est $(0,0)$. L'étude précédente montre qu'en ce point f (et donc $\widetilde{f}$) admet un maximum local sur la boule ouverte.

• Étudions maintenant le comportement de f sur S, la sphère unité de E, qui est le bord de $\bar{B}$. Pour cela on paramètre S, et on considère $F(\theta) = \widetilde{f}(cos(\theta), \sin(\theta)) = \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)$, pour $\theta \in]0, 2\pi + \epsilon[$, $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. On a $F'(\theta) = \sin(2\theta)\cos(2\theta)$, et les points singuliers de F sont $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = 3\pi/4$, $\theta_4 = \pi$, $\theta_5 = 5\pi/4$, $\theta_6 = 3\pi/2$, $\theta_7 = 7\pi/4$, $\theta_8 = 2\pi$.

On fait alors en chacun d'eux une étude locale grâce à $F''(\theta_j) = 2\cos(4\theta_j)$. $F''(\theta_1) = -2$ (maximum local strict), $F''(\theta_2) = 2$ (minimum local strict), $F''(\theta_3) = -2$ (maximum local strict), $F''(\theta_4) = 2$ (minimum local strict), $F''(\theta_5) = -2$ (maximum local strict), $F''(\theta_6) = 2$ (minimum local strict), $F''(\theta_7) = -2$ (maximum local strict), $F''(\theta_8) = 2$ (minimum local strict).

• Remarquons que $\widetilde{f}$ étant continue sur $\bar{B}$, elle atteint son inf et son sup. Si l'$\inf_{\bar{B}} \widetilde{f}$ ou le $\sup_{\bar{B}} \widetilde{f}$ est atteint sur la boule ouverte, le point où il est atteint est un point singulier de f, ce ne peut être que $(0,0)$. Mais ce point étant un maximum local de f, en $(0,0)$, $\widetilde{f}$ ne peut atteindre que son $\sup_{\bar{B}}$ en $(0,0)$.

Si l'$\inf_{\bar{B}} \widetilde{f}$ ou le $\sup_{\bar{B}} \widetilde{f}$ est atteint sur S, alors le point où il est atteint est un point singulier de F, et même l'$\inf_S F$ ou le $\sup_S F$. Il faut alors comparer les valeurs de f en chaque θ_j, pour trouver ce sup ou cet inf.

En conclusion on a :

$$\inf_{\bar{B}} \widetilde{f} = \min\{F(\theta_{2j}); 1 \leq j \leq 4\} \text{ et } \sup_{\bar{B}} \widetilde{f} = \max\{F(\theta_{2j+1}); 0 \leq j \leq 3; f(0,0)\}.$$

Exercices du chapitre 4

Exercice 34 (Séries normalement convergentes). *Soient $\mathcal{E}$ un ensemble, F un espace vectoriel normé complet et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathcal{E} \to F$. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est normalement convergente sur $\mathcal{E}$, ssi il existe une série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (ie $u_n \in \mathbb{R}$) convergente telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\|f_n(x)\| \leq u_n$. Montrer alors que la série $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$ est uniformément convergente sur $\mathcal{E}$.*

Exercice 35. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé complet et soit $f \in \mathcal{L}(E;E)$ un endomorphisme continu de E, tel que $\|f\|_{\mathcal{L}(E;E)} < R$. On note classiquement $f^n = f \circ \cdots \circ f$ la composée de f avec lui-même n fois ($f^0 =\mathrm{Id}_E$).*

i - Montrer que la série $S = S_f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f^n : E \to E$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$.

ii - On considère $\phi : B^R \ni f \mapsto S_f \in \mathcal{L}(E;E)$, où B^R est la boule ouverte de $\mathcal{L}(E;E)$ de rayon R. Montrer que ϕ est différentiable.

Exercice 36. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série réelle absolument convergente (ie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$) et soit $\varphi :]0, +\infty[\to F$ une fonction $\mathcal{C}^1$, F étant un espace vectoriel normé complet. Soit enfin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E = \mathbb{R}^p$ contenue dans une boule fermée B de E, centrée en 0_E. On définit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \varphi(\|x - x_n\|)$ (la norme $\| \ \|$ de E est la norme euclidienne issue du produit scalaire usuel) pour tout $x \in \Omega = E \setminus B$.*

Montrer que f est bien définie, puis que f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exercice 37 (Théorème de Borel). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose qu'existe une fonction φ (et il en existe en effet) telle que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$, telle qu'il existe α, β tels que $-2 < \alpha < -1 < 1 < \beta < 2$, φ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$, et $\varphi_{|[-1,1]=1}$.*

i- Montrer qu'il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, en posant $f_n(x) = \frac{a_n}{n!}x^n\varphi(\lambda_n x)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \le \frac{1}{2^n}$, pour $0 \le k \le n-1$.

ii- En déduire l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$, telle quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 38.

Dans cet exercice on considère le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$, muni de la norme $|\ |$ (le module). Noter que via l'isomorphisme isométrique $\Phi : (\mathbb{C}, |\ |) \to (\mathbb{R}^2, \|\ \|_2)$ cet espace est $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme d'espace euclidien. Sur $\mathbb{C}$ on dispose bien sûr, en plus de la structure d'espace vectoriel, du produit de deux nombres complexes qui confère à $\mathbb{C}$ une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^n}{n!}, \end{array}$$

et $f = \sum_{n\in\mathbb{N} f_n}$ la série associée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1 - Montrer que la série f converge sur $\mathbb{C}$.

2 - Montrer que f_n est différentiable sur $\mathbb{C}$, et quel que soit $z \in \mathbb{C}$, calculer $\|Df_{n(z)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C};\mathbb{C})}$.

3 - Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{C}$ puis que $Df_{(z)} : \mathbb{C} \ni h \mapsto f(z).h \in \mathbb{R}^2$.

4 - Déduire de la question précédente que f est $\mathcal{C}^\infty$.

5 - Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $f(z+w) = f(z)f(w)$. (Ind. On pourra montrer que l'application $z \mapsto f(z+w)f(-z)$ est constante)

Exercice 38bis. *Soit pour tout $n \ge 0$ la fonction*

$$f_n : (x,y) \mapsto \frac{x + 1/n}{n^y}$$

Quel est le domaine de définition U de $f = \sum_{n\ge 0} f_n$? Montrer que f est différentiable sur U.

Exercice 39 (Unicité de la formule de Taylor). *Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme à n indéterminées. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout multi-indice $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, on note x^j le monôme $x_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}$, de sorte que si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et si $|j| = j_1 + \ldots + j_n$, il existe $k \in \mathbb{N}$ (le degré de P) et des constantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{K}$ tels que $P(X) = \sum_{0\le|j|\le k} \gamma_j X^j$.*

i- Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre k pour une fonction $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ qui admet une différentielle d'ordre k en un point a et montrer que s'il existe des applications j-linéaires $L^j : \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, avec $1 \le j \le k$, telles que pour tout $h \in \mathbb{K}^n$, $f(a+\vec{h}) - f(a) = \sum_{1\le j\le k} L^j(\vec{h}, \ldots, \vec{h}) + o(||\vec{h}||^k)$, alors les quantités $L^j(\vec{h}, \ldots, \vec{h})$ sont uniques.

ii- Montrer que pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ uniques telles que $P(X) = \sum_{0\le|j|\le k} \alpha_j(X-a)^j$. Calculer ces constantes α_j grâce aux dérivées partielles de f en a. En déduire les dérivées partielles de f en a en fonction des dérivées partielles de f en 0 et de a.

Exercice 40. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^3+1)(y^2-1)$. Étudier les extrema de f sur le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.*

Corrigés des exercices du chapitre 4

Exercice 31. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, définie par $f(x)=0$, pour $x\in]0,1]$ et $f(0)=1$. En effet, si $x\in]0,1]$, $f_n(x)=(1-x)^n\to 0$, et comme $f_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(0)$ converge bien vers 1. La fonction f n'est pas continue en 1, comme toutes les fonctions f_n sont continues, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$ (cf Proposition 4.2).

Exercice 33. Soit $f:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ une application dérivable qui admet en $a\in]\alpha,\beta[$ un maximum local. Le rapport $f(x)-f(a)/(x-a)$ est alors ≥ 0 pour $x<a$ proche de a et ≤ 0 pour $x>a$ proche de a (puisque $f(x)\leq f(a)$ pour x proche de a). Par hypothèse la limite de ces rapports lorsque $x\to a$ existe et vaut $f'(a)$ et cette limite est à la fois ≥ 0 et ≤ 0, donc nulle.

Exercice 34. On a : pour tout $x\in\mathcal{E}$:

$$\|S_n(x)-S_{n+k}(x)\|_F=\|\sum_{j=n+1}^{n+k}f_j(x)\|_F\leq\sum_{j=n+1}^{n+k}\|f_j(x)\|\leq\sum_{j=n+1}^{n+k}u_j,$$

or puisque $u_j\geq 0$, $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+k}u_j\leq\sum_{j=n+1}^{\infty}u_j$. Mais puisque $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge, son reste à l'ordre n, $r_n=\displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+k}u_j$ converge vers 0 lorsque $n\to\infty$. Quel que soit $\epsilon>0$, il existe donc $N\in\mathbb{N}$, tel que $n\geq N, k\in\mathbb{N}$ implique : pour tout $x\in\mathcal{E}$, $\|S_n(x)-S_{n+k}(x)\|_F\leq\epsilon$. Le critère de Cauchy uniforme est vérifié, par la Proposition 4.3 la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente.

Exercice 35. i - Soient $f\in B^R$ $S_n=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_nf^n:E\to E$. En tant que combinaison linéaire d'endomorphismes continus de E, S_n est une application linéaire continue de E dans E. De plus, $\|a_nf^n\|_{\mathcal{L}(E;E)}\leq|a_n|.\|f\|^n_{\mathcal{L}(E;E)}$ (Exercice 6). Le terme général de la série S_n étant majoré par le terme général d'une série numérique convergente, la série S_n est **normalement convergente** et donc **uniformément convergente** (cf Exercice 35). On en déduit que S existe et est continue (Proposition 4.2). Comme pour tout, $x,y\in E$, $\lambda\in E$, $S_n(x+\lambda.y)=S_n(x)+\lambda S_n(y)$, cette égalité par passage à la limite donne la linéarité de S. S est ainsi linéaire et continue, donc $\mathcal{C}^\infty$.

On peut aussi dire plus simplement que comme $\|a_nf^n\|_{\mathcal{L}(E;E)}\leq|a_n|.\|f\|^n_{\mathcal{L}(E;E)}$ et comme la série de terme général $|a_n|.\|f\|^n_{\mathcal{L}(E;E)}$ converge, la série S est absolument convergente, et comme $\mathcal{L}(E;E)$ est complet puisque E est complet (Exercice 29), la série S est convergente dans $\mathcal{L}(E;E)$, et donc en tant qu'élément de $\mathcal{L}(E;E)$, S est $\mathcal{C}^\infty$.

ii - Appliquons le Théorème 4.6. Soit $\phi_n:B^R\to\mathcal{L}(E;E)$ définie par : pour tout $f\in B^R$, $\phi_n(f)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_nf^n$. La suite $(\phi_n(0_{\mathcal{L}(E;E)})=(a_0Id_E)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente.

Montrons que $B^R\ni f\mapsto f^n\in\mathcal{L}(E;E)$ est différentiable. Si $\mathrm{L}:(\mathcal{L}(E;E))^n\to\mathcal{L}(E;E)$ est définie par $\mathrm{L}(f_1,\cdots,f_n)=f_1\circ\cdots\circ f_n$, L est n-linéaire et comme par l'Exercice 6) :

$$\|\mathrm{L}(f_1,\cdots,f_n)\|_{\mathcal{L}(E;E)}\leq\|f_1\|_{\mathcal{L}(E;E)}\cdots\|f_n\|_{\mathcal{L}(E;E)},$$

L est continue. Maintenant si note $\delta:\mathcal{L}(E;E)\ni f\mapsto(f,\cdots,f)\in(\mathcal{L}(E;E)^n$, δ est linéaire et continue (puisque $\delta=(Id_E,\cdots,Id_E)$) et $B^R\ni f\mapsto f^n\in\mathcal{L}(E;E)$ est l'application $\mathrm{L}\circ\delta$ restreinte à B^R. On en déduit que $f\mapsto f^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que composée d'applications $\mathcal{C}^\infty$ (Théorème 2.9) et que : $D(g\mapsto g^n)_{(f)}=D\mathrm{L}_{(f,\cdots,f)}\circ\delta$, ie pour tout $h\in\mathcal{L}(E;E)$, $D(g\mapsto g^n)_{(f)}(h)=\displaystyle\sum_{i+j=n-1}f^i\circ h\circ f^j$ (Proposition

1.5). On obtient alors $\|D(g \mapsto g^n)_{(f)}(h)\|_{\mathcal{L}(E;E)} \leq \sum_{i+j=n-1} \|f\|^i.\|h\|.\|f\|^j = n\|f\|^{n-1}.\|h\|$, ce qui donne : $\|D(g \mapsto g^n)_{(f)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E;E);\mathcal{L}(E;E))} \leq n\|f\|^{n-1}$.

En résumé : $g \mapsto a_n g^n$ est différentiable en f (et même $\mathcal{C}^\infty$) et de différentielle ayant une norme majorée par $n.|a_n|.\|f\|^{n-1}$. Or la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} n.a_n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. On en conclut que sur toute boule B^r centrée en $0_{\mathcal{L}(E;E)}$, de rayon $r < R$, la série des différentielles de $f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f^n$ est **normalement convergente**, donc **uniformément convergente** (Exercice 34). Par le Théorème 4.6, on en déduit que $f \mapsto S_f$ est différentiable sur toute boule B^r, $r < R$, donc sur B^R, et que pour tout $f \in B^R$, pour tout $h \in \mathcal{L}(E;E)$, $D(g \mapsto S_g)_{(f)}(h) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sum_{i+j=n-1} f^i \circ h \circ f^j$.

Remarque. On peut montrer que $g \mapsto S_g$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur B^R, de la même façon (en utilisant le Théorème 4.7).

Exercice 36. l'application f est bien définie car si B est de rayon R et si $x \in \Omega$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0 < \|x\| - R \leq \|x - x_n\| \leq \|x\| + R$. Or φ est continue sur le compact $[\|x\| - R, \|x\| + R]$, donc bornée, disons par $M = M_x$, et donc $\|u_n \varphi(\|x - x_n\|_E)\|_F \leq |u_n| M_x$, terme général d'une série convergente (puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge par hypothèse). Comme la norme $\|\|_E$ est issue d'un produit scalaire $(\ |\ )$, elle définit une application différentiable en dehors de 0_E (cf Exercice 25). L'application $\Phi_n : \Omega \ni x \mapsto \|x - x_n\|_E$ ne s'annule pas, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des applications composées, on en déduit que $\Omega \ni x \mapsto \varphi(\|x - x_n\|_E)$ est différentiable sur Ω et que (cf Exercice 25 pour l'expression de la différentielle de $\|\ \|_E$) :

$$D\Phi_{n(x)}(h) = \frac{(h|x - x_n)}{\|x - x_n\|_E}\varphi'(\|x - x_n\|_E).$$

Soit alors $a \in \Omega$ et $B(a,r)$ une boule fermée centrée en a et de rayon r, telle que $B(a,r) \subset \Omega$. Quel que soit $x \in B(a,r)$, quel que soit $h \in E$:

$$\|D\Phi_{n(x)}(h)\|_F \leq \frac{\|h\| \cdot \|x - x_n\|_E}{\|x - x_n\|_E} \cdot \|\varphi'(\|x - x_n\|_E)\|_F,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit que $\|D\Phi_{n(x)}\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \varphi'(\|x - x_n\|_E)|$. Or $r - R \leq \|x - x_n\|_E \leq r + R$ et φ est borné sur $[r - R, r + R]$ disons par M_r. On déduit que la norme du terme général de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \cdot D\Phi_{n(x)}$ est majorée par $|u_n| \cdot M_r$, qui est une série numérique convergente par hypothèse. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \cdot D\Phi_{n(x)}$ est ainsi normalement convergente sur $B(a,r)$, donc par l'Exercice 34 est uniformément convergente sur $B(a,r)$ ($\mathcal{L}(E;F)$ est complet, puisque F est complet, cf Exercice 29). Par suite $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \cdot D\Phi_{n(x)}$ est localement uniformément convergente sur Ω et le Théorème 4.6 assure que la série φ est différentiable sur Ω et que $D\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n D\Phi_n$. Comme chaque $x \mapsto D\Phi_{n(x)}$ est continue, et que la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n D\Phi_n$ est localement uniforme, par la Proposition 4.2, $x \mapsto Df_{(x)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n D\Phi_{n(x)}$ est également continue. On en conclut que f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exercice 37. La formule qui donne la dérivée k^{eme} d'un produit de deux fonctions k fois dérivable est : $(h.g)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_p^k h^{(p)} g^{(k-p)}$, ce qui donne ici pour f_n, en faisant $h(x) = \frac{a_n}{n!}x^n$ et $g(x) = \varphi(\lambda_n x)$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_p^k n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p}\lambda_n^{k-p}\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x).$$

On en déduit que :

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|a_n|}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_p^k \frac{n!}{(n-p)!}|x|^{n-p}.|\lambda_n^{k-p}|.|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)|.$$

Comme $\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x) = 0$ pour $|x| > 2/|\lambda_n|$, en posant $M_n = \max_{j\in\{0,\cdots,n-1\}} \sup\limits_{x\in[-2,2]} |\varphi^{(j)}(x)|$, on obtient :

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq |a_n|\sum_{p=0}^{k} C_p^k \frac{1}{(n-p)!}(2/|\lambda_n|)^{n-p}.|\lambda_n|^{k-p}.|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)|$$

$$\leq \frac{|a_n|}{|\lambda_n|^{n-k}}\sum_{p=0}^{k} C_p^k \frac{2^{n-p}}{(n-p)!}|\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x)| \leq \frac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|^{n-k}}\sum_{p=0}^{k} C_p^k \frac{2^{n-p}}{(n-p)!}.$$

Majorons grossièrement $C_p^k \dfrac{2^{n-p}}{(n-p)!}$ par $k!2^n \leq (n-1!)2^n$, on obtient alors la majoration suivante de $|f_n^{(k)}(x)|$ par la quantité $\dfrac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} n(n-1)!2^n = \dfrac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} n!2^n$, qui ne dépend que de n. Si $|\lambda_n| > 1$, on a encore $|\lambda_n|^{n-k} \leq |\lambda_n|$, ce qui implique :

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|a_n|M_n}{|\lambda_n|} n!2^n,$$

de sorte que si $|\lambda_n| \geq 1$ et $|\lambda_n| \geq |a_n| \cdot M_n \cdot n! \cdot 4^n$, on a la majoration voulue $|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in [0, n-1]$.

Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on obtient que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, puisque pour $n \geq k$, $|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}$ est convergente. Le Théorème 4.7 donne alors que la somme $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ existe et définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On sait de plus que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}(x)$. Calculons maintenant

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}(0) = \sum_{n\leq k} f_n^{(k)}(0) + \sum_{n>k} \frac{a_n}{n!}\sum_{p=0}^{k} C_p^k n(n-1)\cdots(n-p+1)0^{n-p}\lambda_n^{k-p}\varphi^{(k-p)}(\lambda_n 0)$$

$$= \sum_{n\leq k} f_n^{(k)}(0) = \sum_{n\leq k} \frac{a_n}{n!}[x^n\varphi(\lambda_n x)]^{(k)}(0) \qquad (*)$$

comme pour $n < k$, $[x^n\varphi(\lambda_n x)]^{(k)}$ est une somme de termes dans lesquels apparait x^j ou $\varphi^{(j)}(x)$ avec $j \neq 0$, les k premiers termes de la somme $(*)$ sont nuls puisque la constance de φ au voisinage de 0 implique la nullité de toutes ses dérivées successives en 0. Il ne reste donc dans $(*)$ que le terme :

$$\frac{a_k}{k!}[x^k\varphi(\lambda_k x)]^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}(k!\varphi^{(0)}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} C_j^k k\cdots(k-j+1)x^{k-j}\lambda_n^{k-j}\varphi(\lambda_n x)^{k-j})(x=0) = a_k + 0.$$

Exercice 38. 1- Remarquons que $\mathbb{C}$ est un espace complet, car de dimension réelle $2 < \infty$. On sait alors qu'une série à termes dans $\mathbb{C}$ absolument convergente est convergente. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \geq 0$, on a $|z^n/n!| = |z|^n/n!$. On en déduit que la série définissant $f(z)$ est **absolument convergente**, et donc **convergente** (puisque la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} r^n/n!$ converge quel que soit $r \in \mathbb{R}_+$).

2- f_0 est constante, donc différentiable et de différentielle nulle. On peut calculer $Df_{n(z)}$ de duex façons différentes (au moins !) :

2.a- Pour tout $n \geq 1$ et $z, h \in \mathbb{C}$, on a

$$f_n(z+h) - f_n(z) = \frac{nz^{n-1}h + h^2(\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k}h^{k-2})}{n!} = \mathrm{L}(h) + |h|p(h)$$

En posant $\mathrm{L}(h) = z^{n-1}h/(n-1)!$ et $p(h) = (\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k}h^{k-2})h^2/(n!|h|)$. Or, L est **linéaire** en h, **continue** (car entre espaces de dimension finie), et de plus

$$|p(h)| \leq 2^n |h| \max(|h|, |z|)^{n-1}/n!,$$

ce qui prouve que $p(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. L'application f_n est donc différentiable en z, de différentielle L. On a par définition de la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$:

$$\|Df_{n_z}\| = \|\mathrm{L}\| = \sup_{|h|=1} \|L(h)| = \sup_{|h|=1} \frac{|z^{n-1}h|}{(n-1)!} = \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2.b- Soit $\ell : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application définie par : $\ell(z_1, \cdots, z_n) = z_1 \cdots z_n$. Cette application est n **linéaire et continue** (puisque $\mathbb{C}$ est de dimension finie). Soit ensuite $\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, définie par $\Delta(z) = (z, \cdots, z)$. L'application Δ est **linéaire et continue**. On a : $f_n = \dfrac{1}{n!}(\ell \circ \Delta)$ ce qui prouve que f_n est $\mathcal{C}^\infty$. De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall h \in \mathbb{C},\ Df_{n(z)}(h) = \frac{1}{n!} D\ell_{\Delta(z)}[\Delta(h)]$$

$$= \frac{1}{n!}(hz\cdots z + \cdots + z\cdots zh) = \frac{1}{n!}(nhz^{n-1}) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} hz^{n-1}$$

3- Pour montrer que f est différentiable sur $\mathbb{C}$, on considère $r > 0$ quelconque et on montre que f est différentiable sur la boule fermée B_r de centre 0 et de rayon r.

Pour tout $z \in B_r$ et tout $n \geq 1$, on a $\|Df_{n_z}\| = |z^{n-1}|/(n-1)! \leq r^{n-1}/(n-1)$. On en déduit que la série de fonctions $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Df_{n_z}$ est **normalement convergente** sur B_r, donc uniformément convergente sur B_r (Exercice 34). Le **Théorème** 4.6 permet de conclure que f est différentiable sur B_r, et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'application linéaire Df_z est la somme d'applications linéaires $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Df_{n_z}$, soit $Df_z = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(h \mapsto z^{n-1}h/(n-1)!) = (h \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}h/(n-1)!) = (h \mapsto f(z)h)$.

Remarque. la série de terme général $f_n(0)$ est convergente, de sorte que le **Théorème 4.6** assure directement, du fait de la convergence uniforme de la série des différentielles Df_n, que la série de terme général f_n est uniformément convergente. On retrouve alors **1-**.

4- Montrons que f est k fois différentiable sur $\mathbb{C}$, quel que soit k, par récurrence. On vient de coir que f est différentiable et que $Df_{(z)}(h) = h \cdot f(z)$. Soit $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ définie par $\Phi(w)(h) = w \cdot h$. Cette application est **linéaire et continue** donc $\mathcal{C}^\infty$ et de plus :

$$Df = \Phi \circ f \tag{$\sharp$}$$

Supposons que f est k fois différentiable sur $\mathbb{C}$. Par ($\sharp$), Df est alors aussi k fois différentiable sur $\mathbb{C}$ ie que f est $k+1$ fois différentiable sur $\mathbb{C}$.

5- Fixons $w \in \mathbb{C}$, notons p l'application produit $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, T_w l'application translation $z \mapsto z + w$ et M l'application $z \mapsto -z$. L'application proposée par l'énoncé est $p \circ (f \circ T_w, f \circ M)$. Comme p est bilinéaire continue et comme M est linéaire continue et T_w est somme d'une application linéaire continue et d'une application constante, M et T_w sont toutes les deux différentiables. C'est aussi le cas de f par 3−, et le Théorème 2.1 s'applique. Comme $DT_{wz} = Id_{\mathbb{C}}$ et $DM_z = -Id_{\mathbb{C}}$, on a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Dg_z = Dp_{(f(z+w),f(-z))} \circ (Df_{z+w}, -Df_{-z}) = f(z+w)Df_{-z} - f(-z)Df_{z+w},$$

et donc $Dg_z = (h \mapsto f(z+w)f(-z)h - f(-z)f(z+w)h) = (h \mapsto 0) = 0$. Comme $\mathbb{C}$ est **connexe**, g est constante sur $\mathbb{C}$ par le **Corollaire 2.7.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc $g(z) = g(0) = f(w)$, d'où la relation $f(z+w)f(-z) = f(w)$ valable pour tout $z, w \in \mathbb{C}$. Prenant $w = 0$, on en déduit $f(z)f(-z) = 1$, et donc $f(z+w) = f(z+w)f(z)f(-z) = f(z)f(w)$ pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercice 38bis. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et tout $n \geq 0$, $f_n(x, y)$ est bien défini et de plus,

$$f_n(x, y) = \frac{x}{n^y} + \frac{1}{n^{y+1}}$$

et $\frac{x}{n^y}$ est le terme général d'une série convergente si et seulement si $y > 1$ tandis que $\frac{1}{n^{y+1}}$ est le terme général d'une série convergente si et seulement si $y > 0$. On a donc

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y > 1\}.$$

Comme on sait que $\sum f_n$ **converge simplement** sur U, pour prouver la différentiabilité, nous avons le choix entre les deux méthodes suivantes :

Première méthode : le **Théorème 4.6** (ou sa version affaiblie donnée en TD) dit que pour prouver la différentiabilité de f, il suffit de montrer :

1) la différentiabilité de f_n sur U pour tout $n > 0$,

2) la **convergence uniforme locale de la série des différentielles** $\sum_{n>0} Df_n$ (comme série de fonctions $U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$).

Pour prouver 1), on calcule pour tout n la matrice de $(Df_n)_{(x,y)}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$, à l'aide des dérivées partielles, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n^y} & \frac{-\ln n(x+1/n)}{n^y} \end{bmatrix}$$

Ces dérivées partielles sont **continues** sur U, ce qui prouve que f_n y est différentiable. De plus, on a

$$\|(Df_n)_{(x,y)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \max\left\{\frac{1}{n^y}, \frac{\ln n|x+1/n|}{n^y}\right\}$$

Pour prouver 2), considérons $(a, b) \in U$ et $R > 0$ tels que la **boule fermée** $\overline{B}((a, b), R)$ **est incluse dans** U. On a alors pour tout $(x, y) \in B((a, b), R)$ les inégalités $y \geq b - R > 1$ et $|x| \leq |a| + R$, d'où

$$\|(Df_n)_{(x,y)}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \max\left\{\frac{1}{n^{b-R}}, \frac{\ln n(|a|+R+1)}{n^{b-R}}\right\}$$

Or, les séries $\sum \frac{1}{n^{b-R}}$ et $\sum \frac{\ln n(|a|+R+1)}{n^{b-R}}$ sont toutes deux convergentes puisque $b - R > 1$, ce qui prouve la **convergence normale**, donc uniforme, de $\sum_{n\geq 0}(Df_n)(x, y)$ lorsque $(x, y) \in B((a, b), R)$.

Deuxième méthode : le **théorème 4.8** affirme qu'il suffit pour prouver la différentiabilité de f de prouver la **convergence uniforme locale des séries de dérivées partielles** $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial x}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial y}$ (on aura alors $\Omega_1 = U$ et $\Omega_2 = \emptyset$).

Or (par le même calcul que pour la première méthode), pour tout $(a, b) \in U$ et $R > 0$ tels que la **boule fermée** $\overline{B}((a, b), R)$ **est incluse dans** U, on a pour tout $(x, y) \in B((a, b), R)$ les inégalités

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}(x, y)\right| = \frac{1}{n^y} \leq \frac{1}{n^{b-R}}$$

et
$$\Big|\frac{\partial f_n}{\partial y}(x,y)\Big| = \frac{\ln n|x+1/n|}{n^y} \leq \frac{\ln n(|a|+R+1)}{n^{b-R}}$$
et les séries $\sum \frac{1}{n^{b-R}}$ et $\sum \frac{\ln n(|a|+R+1)}{n^{b-R}}$ sont toutes deux convergentes puisque $b-R>1$, ce qui prouve la convergence **normale**, donc uniforme, des séries des dérivées partielles sur $\overline{B}((a,b),R)$.

Exercice 39. *i*- Soit $f : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to F$ une application admettant en $a \in \Omega$ une différentielle à l'ordre k, F étant un espace vectoriel normé quelconque sur le corps $\mathbb{K}$. On sait alors que f est capable de la formule de Taylor à l'ordre k : $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f_{(a)}(x-a)^j + ||x-a||^k p_a(x-a)$, où $p_a(u) \to 0_F$, lorsque $u \to 0_{\mathbb{K}^n}$. Grâce à la formule (3) du théorème 2.9 du cours, on peut exprimer chaque $D^j f_{(a)}(x-a)^j$ comme un polynôme de degré j en les n coordonnées de $x-a$. En effet, on a : $D^j f_{(a)}(x-a)^j = \displaystyle\sum_{1\leq \ell_1,\ldots,\ell_j \leq n} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j f}{\partial x_{\ell_1}\ldots \partial x_{l_j}}(a)(x_{\ell_1}-a_{\ell_1})\ldots(x_{\ell_j}-a_{\ell_j})$.

On en déduit que $f(x) = P_a^k(x-a) + o(||x-a||^k)$, avec P_a^k un polynôme de degré k à n indéterminées, dont les coefficients s'expriment en fonction des dérivées partielles de f en a.

Supposons maintenant que $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} L^j(x-a)^j + o(||x-a||^k)$ $(*)$, avec $L^j : E^j \to F$ une application j-linéaire. Montrons par récurrence que les applications $E \ni \vec{h} \to L^j(\vec{h})^j \in F$ sont uniquement déterminées (ce qui est différent de montrer que les applications L^j elles-même sont uniquement déterminées)

- Lorsque $k=0$, la formule $(*)$ dit : $f(x) = cte + p_a(x)$, où $cte = L^0(x-a)^0 \in F$ et $p_a(x) \to 0$ lorsque $x \to a$. On en déduit que nécessairement $L^0(x-a)^0 = \lim_{u\to a} f(u)$. Cette limite n'est $f(a)$ que lorsque f est continue en a. Si f n'est pas continue en a, on considère plutôt son prolongement par continuité $\widetilde{f}$ en a, défini par $\widetilde{f}(u) = f(u)$ si $u \neq a$ et $\widetilde{f}(a) = L^0(x-a)^0$. Dans la suite on suppose donc que $f(a) = L^0(x-a)^0$.

- Lorsque $k=1$, $(*)$ est $f(x) = L^0(x-a)^0 + L^1(x-a)^1 + o(x-a)$. Or L^1 est 1-linéaire, c'est-à-dire linéaire, et donc continue (dimension finie). On en déduit que $L^1(x-a) \leq ||L^1||.||x-a||$, i.e. $L^1(x-a) = o(||x-a||^0)$, et par ce qui précède, nécessairement $L^0(x-a)^0 = f(a)$. On conclut que $f(x)-f(a) = L^1(x-a) + o(||x-a||)$, ou encore que f est différentiable en a. Par unicité de la différentielle, $L^1(x-a) = Df_{(a)}(x-a)$ est uniquement déterminée.

- Faisons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(k)$ suivante :

"la propriétè $\mathcal{P}(k)$ est vraie, où $\mathcal{P}(k)$ est l'unicité des applications $(x-a) \to L^j(x-a)^j$, pour $0 \leq j \leq k$, dès que l'égalité $(*)$ a lieu".

Supoosons alors que $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} L^j(x-a)^j + o(||x-a||^{k+1})$, avec L^j j-linéaire. Par continuité de L^{k+1}, on a : $||L^{k+1}(x-a)^{k+1}|| \leq ||L||.||x-a||^{k+1} = o(||x-a||^k)$, et donc par $\mathcal{H}(k)$, les applications $(x-a) \to L^j(x-a)^j$ sont uniquement déterminées, pour $0 \leq j \leq k$. Deux écritures du type $(*)$ pour f ne peuvent ainsi différer que sur les termes $L^{k+1}(x-a)^{k+1} + o(||x-a||^{k+1})$. Supposons alors qu'existe L^{k+1} et $\mathcal{L}^{k+1}$ toutes les deux $(k+1)$-linéaires telles que $(L^{k+1}-\mathcal{L}^{k+1})(x-a)^{k+1} = ||x-a||^{k+1}p_a(x-a)$, avec $p_a(x-a) \to 0$ lorsque $x \to a$. En remplaçant $x-a$ par $t(x-a)/||x-a||$, pour $x \neq a$ et $t > 0$, on obtient :
$$\frac{t^{k+1}}{||x-a||^{k+1}}(L^{k+1}-\mathcal{L}^{k+1})(x-a)^{k+1} = t^{k+1}p_a(t(x-a)/||x-a||),$$
et en faisant $t \to 0$, on obtient $L^{k+1}(x-a)^{k+1} = \mathcal{L}^{k+1}(x-a)^{k+1}$. C'est-à-dire que $\mathcal{P}(k+1)$ a lieu et donc que $\mathcal{H}(k) \Longrightarrow \mathcal{H}(k+1)$, ce qui termine la récurrence.

Conséquence. S'il existe un polynôme P_a^k de degré k à n indéterminées tel que $f(x) = P_a^k(x-a)^k + o(||x-a||^k)$, ce polynôme est unique (car la somme de ses monômes de degré j est une application j- linéaire calculée sur $(x-a)^j$, i.e. une écriture du type $(*)$). En particulier si $D^k f_{(a)}$ existe, ce polynôme existe, est unique, et ses coefficients sont donnés par les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k.

Exemple. Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=x+y^2\sin(xy)$, f admet toutes ses dérivées partielles à tous les ordres, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ (théorème 2.9). En $(1,1)$, f admet donc une formule de Taylor à tous les ordres.Écrivons cette formule à l'ordre 2 :

on a :

$$Df_{(1,1)}(x-1,y-1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1), \text{ et}$$

$$D^2f_{(1,1)}(x-1,y-1)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2.$$

On obtient :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=1+\sin(1)+(1+\cos(1))(x-1)+(2\sin(1)+\cos(1))(y-1)$$

$$+\frac{1}{2!}[(-\sin(1))(x-1)^2+2(3\cos(1)-\sin(1))(x-1)(y-1)+(4\cos(1)+\sin(1))(y-1)^2]+o(||(x-1,y-1)||^2).$$

ii- On pourrait montrer que les monômes $(x-a)^j$, pour $|j|=0,\dots,k$ sont les éléments d'une base de l'espace $\mathbb{K}_k[x]$ des polynômes de degré $\leq k$, ce qui donnerait l'existence et l'unicité des α_j. Mais ceux-ci ne seraient explicitement donnés que grâce à la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}_k[x]$ à la base $((x-a)^j)_{(0\leq|j|\leq k)}$. On va ici déterminer explicitement les α_j.

Écrivons la formule de Taylor pour P en a à l'ordre $k+p$, avec $k=\deg(P)$. On a :

$$P(x)=P(a)+\sum_{j=1}^{k+p}D^jP_{(a)}(x-a)^j+o(||x-a||^{k+p}),$$

or les dérivées partielles de P à l'ordre $m>k$ sont nulles, puisque P est de degré k, de plus $P(a)+\sum_{j=1}^k D^jP_{(a)}(x-a)^j$ est un polynôme de degré $\leq k$ en les coordonnées de $(x-a)$. Notons-le $Q(x)=\displaystyle\sum_{j=0}^k\alpha_j(x-a)^j$. Les constantes α_j sont données par les dérivées partielles de P en a, jusqu'à l'ordre k. On vient d'écrire que pour tout $p\leq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{||x-a||^{k+p}}(P(x)-Q(x))=0$, ce qui n'est possible, que si $P(x)-Q(x)=0$, car ce polynôme est de degré $\leq k$).

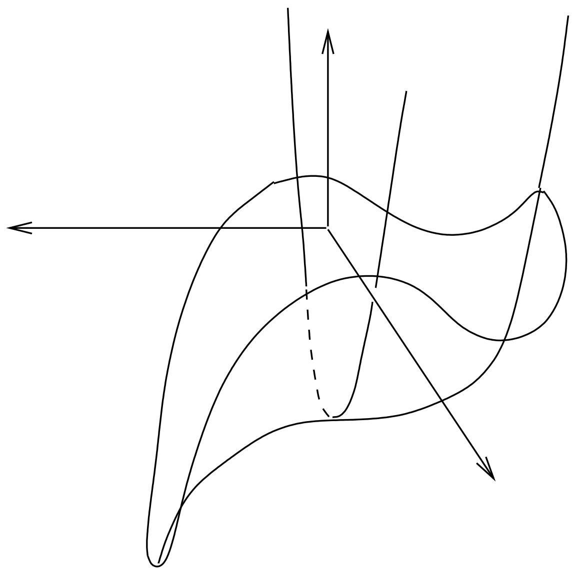
En identifiant les coefficients γ_j de $P(x)$, qui sont donnés par les dérivées partielles de P en 0 et les coefficients α_j de $Q(x)$, qui sont donnés par les dérivées partielles de P en a, on obtient ces dernières en fonction des premières.

Exemple. Soit $P(x,y)=1+x+xy$, alors par la partie "conséquence" de la première question ci-dessus : $\alpha_0=P(0,0)=1, \alpha_1=\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,0)=1, \alpha_2=\dfrac{\partial P}{\partial y}(0,0)=0, \alpha_3=\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0)=0, \alpha_5=\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0,0)=0$ et $\alpha_4=\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(0,0)=1$. Mais on a aussi, par la seconde question : $P(x,y)=\gamma_0+\gamma_1(x-1)+\gamma_2(y-1)+\gamma_3(x-1)^2+\gamma_4(x-1)(y-1)+\gamma_5(y-1)^2$. En identifiant, on obtient le système : $\alpha_0=\gamma_0-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_5+\gamma_4+\gamma_3; \alpha_1=\gamma_1-2\gamma_3-\gamma_4; \alpha_2=\gamma_2-\gamma_4-2\gamma_5; \alpha_3=\gamma_3; \alpha_4=\gamma_4; \alpha_5=\gamma_5$, d'où les dérivées partielles γ_j de P en $(1,1)$ en fonction des α_j.

Exercice 40. f étant continue sur le compact $\bar{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1\}$, f est bornée sur $\bar{D}$ et atteint ses bornes. Le domaine sur lequel on doit étudier f étant à bord, l'étude se fait en deux temps, et l'inf de f sur $\bar{D}$ est à déterminer parmi $\inf_{\partial D}f$ et les minima locaux de f sur $\overset{\circ}{D}$; le sup de f est à déterminer parmi $\sup_{\partial D}f$ et les maxima loacaux de f sur $\overset{\circ}{D}$. Précisément : $\inf_{\bar{D}}f=\min\{\inf_{\partial D}f, \text{minlocaux}_{\overset{\circ}{D}}f\}$ et $\sup_{\bar{D}}f=\max\{\sup_{\partial D}f, \text{maxlocaux}_{\overset{\circ}{D}}f\}$.

a- Étude sur $\overset{\circ}{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2<1\}$.

Sur $\overset{\circ}{D}$ les points (x,y) en lesquels f admet des extrema sont des points singuliers de f, i.e. tels que $Df_{(x,y)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})}$, ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, soit le seul point $(0,0)$. De plus $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, de sorte que le Hessien de f en $(0,0)$ est nul. Nous sommes dans le cas défavorable où l'étude du Hessien n'apprend rien sur le comportement de f au voisinage de $(0,0)$. Notons simplement que $f(0,0) = -1$.



b- Étude sur $\partial D = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ (voir la figure ci-dessus).

Nous devons étudier le comportement de f sur S^1. Les points en lesquels f restreinte à S^1 admet des extrema sont des points en lesquels $f \circ \gamma$ admet aussi des extrema (de même nature), pour toute paramétrisation γ de S^1, de sorte que si γ est dérivable, et si en $\gamma(\theta) \in S^1$, f admet un extremum, $F'(\theta) = (f \circ \gamma)'(\theta) = 0$. En posant $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, on obtient : $F'(\theta) = 0$ ssi $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \theta_0, 2\pi - \theta_0$, avec θ_0 tel que $\cos(\theta_0) = -(2/5)^{1/3}$. On a : $F''(\theta) = 2\cos(2\theta)(\frac{5}{2}\cos^3(\theta) + 1) - \frac{15}{2}\sin(2\theta)\cos^2(\theta)\sin(\theta)$. Donc $F''(0) = 7 > 0$, et en 0, F admet un minimum local et $F(0) = f(0,0) = -2$; $F''(\pi/2) = -2 < 0$, et en $\pi/2$, F admet un maximum local et $F(\pi/2) = 0$; $F''(\pi) = -3 < 0$, et en π, F admet un maximum local et $F(\pi) = 0$; $F''(3\pi/2) = -2 < 0$, et en $3\pi/2$, F admet un maximum local et $F(3\pi/2) = 0$; $F''(\theta_0) = 6\sin^2(\theta_0) \geq 0$, et en θ_0, F admet un minimum local et $F(\theta_0) < 0$, enfin $F''(2\pi - \theta_0) = 6\sin^2(\theta_0) \geq 0$, et en $2\pi - \theta_0$, F admet un minimum local et $F(2\pi - \theta_0) < 0$.

c- Conclusion : f admet sur $\bar{D}$ un maximum égal à 0, atteint en trois points

$(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$ et un minimum égal à -2, puisque $-2 < f(0,0) < F(\theta_0) = F(2\pi - \theta_0)$, atteint en $(1,0)$.

Chapitre 5- Fonctions implicites. Inversion locale.

5.1. Différentielles partielles.

Rappelons que si $f : \Omega \subset \mathbb{K}^n \to F$, on a défini la j^{eme} dérivée partielle de f en a, lorsqu'elle existe, relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, par:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{\vec{e}_j} f_{(a)} = \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + t\vec{e}_j) - f(a)),$$

autrement dit, en notant $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée en a_j de la fonction $\widetilde{f}_a^j : \Omega_j \to F$, où $\Omega_j = \pi_j(\Omega)$ est la j^{eme} projection de Ω sur $\mathbb{K}$ (les projections π_k étant ouvertes, Ω_j est bien un ouvert de
$\mathbb{K}$), et où $\widetilde{f}_a^j$ est définie par: $\widetilde{f}_a^j(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Pratiquement calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ revient donc à fixer toutes les variables de f, autres que la j^{eme}, égales respectivement à $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ et à dériver f au point a_j, par rapport à la seule j^{eme} variable.

On peut concevoir des restrictions de f du type $\widetilde{f}_a^j$, dans un cadre plus général: lorsque f est une application définie sur un ouvert Ω d'un produit d'espaces vectoriels normés E_j, on peut fixer les variables des espaces E_k pour $k \neq j$, et ne faire varier que la variable de E_j. Ceci conduit à la définition suivante des différentielles partielles:

Définition. Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{K}$, $\Omega \subset E = E_1 \times \ldots \times E_n$ un ouvert (E étant muni de la norme produit : $\| \;\|_E = \max\{\| \;\|_{E_1}, \ldots, \| \;\|_{E_n}\}$) et a un point de Ω. Soit enfin $f : \Omega \to F$.

On dit que f admet une différentielle partielle au point $a \in \Omega$ relativement à la variable j, ssi l'application:

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}_a^j : & \Omega_j \subset E_j & \to & F \\ & x & \to & \widetilde{f}_a^j(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

est différentiable en a_j. On note cette différentielle partielle par $D_j f_{(a)}$ ou $\partial_j f(a)$.

Remarques importantes. - Lorsque $E_j = \mathbb{K}$, on retrouve très exactement $D_j f_{(a)}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)h$.

- Si $n = 2$ et $E_1 = \mathbb{K}^\ell, E_2 = \mathbb{K}^m, F = \mathbb{K}^p$, notons $a = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ avec $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell$ et $\beta \in \mathbb{R}^m$. En calculant les dérivées partielles $\dfrac{\partial \widetilde{f}_a^1}{\partial x_j}(\vec{\alpha})$ et $\dfrac{\partial \widetilde{f}_a^2}{\partial x_k}(\vec{\beta})$ ($1 \leq j \leq \ell$, $1 \leq k \leq m$) des applications partielles $\widetilde{f}_a^1$ et $\widetilde{f}_a^2$ on trouve immédiatement $\dfrac{\partial \widetilde{f}_a^1}{\partial x_j}(\vec{\alpha}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $\dfrac{\partial \widetilde{f}_a^2}{\partial x_k}(\vec{\beta}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_{\ell+k}}(a)$ (ici f est considérée comme une application de $\ell+m$ variables !), et on obtient donc que les deux différentielles partielles: $D_1 f_{(a)} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^\ell; \mathbb{K}^p)$ et $D_2 f_{(a)} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m; \mathbb{K}^p)$ ont respectivement pour matrice jacobienne (dans les bases canoniques):

$$Jac\widetilde{f}^1_{a\,(a)} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(a)) \in \mathcal{M}_{\ell \times p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Jac\widetilde{f}^2_{a\,(a)} = (\frac{\partial f}{\partial x_{\ell+1}}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{\ell+m}}(a)) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$$

et donc:

$$Jacf_{(a)} = (Jac\widetilde{f}^1_{a\,(a)} \; Jac\widetilde{f}^2_{a\,(a)}) \in \mathcal{M}_{(\ell+m) \times p}(\mathbb{R}).$$

Exemple. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\ell = 3$, $m = 2$, $p = 2$, et

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 x_5 \sin(x_2 + x_3), \cos(x_4) + x_3),$$

on a, pour tout $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, $D_1 f_{(a)}(\vec{h}) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a) = h_1(a_5 \sin(a_2 + a_3), 0) + h_2(a_1 a_5 \cos(a_2 + a_3), 0) + h_3(a_1 a_5 \cos(a_2 + a_3), 1)$ et pour tout $\vec{k} \in \mathbb{R}^2$ $D_2 f_{(a)}(\vec{k}) = k_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_4}(a) + k_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_5}(a) = k_1(0, -\sin(a_4)) + k_2(a_1 \sin(a_2 + a_3), 0)$.

On peut prouver, pour les différentielles partielles, les mêmes types d'énoncé que pour les dérivées partielles. Il suffit d'adapter les preuves au cadre que l'on se donne: chaque espace $\mathbb{K}$ devenant ici un espace E_j, de dimension peut-être infinie.

Le théorème 2.10 admet alors l'analogue suivant:

Théorème 5.1. — *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés, $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, étant muni de la norme $\max\{\| \ \|_{E_1}, \ldots, \| \ \|_{E_n}\}$ (par exemple), et soient F un espace vectoriel normé, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$.*

1.o- Si f est différentiable en $a \in \Omega$, alors f admet toutes ses différentielles partielles en a, $D_1 f_{(a)}, \ldots, D_n f_{(a)}$, et $Df_{(a)} = \sum_{j=1}^{n} D_j f_{(a)} \circ \pi_j$, où $\pi_j : E \to E_j$ est la j^{eme} projection canonique $\pi_j(h_1, \ldots, h_n) = h_j$.

1.i- Si f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω, f admet toutes ses différentielles partielles sur Ω et celles-ci sont continues sur Ω.

1.ii- Réciproquement, si f admet toutes ses différentielles partielles sur Ω et si celles-ci sont continues sur Ω, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ ssi ses différentielles partielles existent et sont continues.

1.iii- Si f admet toutes ses différentielles partielles et que celles-ci sont continues en $a \in \Omega$, sauf éventuellement une qui n'existe qu'en a, alors f est différentiable en a.

On a en realité le théorème général suivant:

2.i- Si f admet en a une différentielle d'ordre $k \geq 1$, alors f admet en a toutes ses différentielles partielles d'ordre k:

$$D_{j_k}(\ldots(D_{j_1} f)\ldots)(a) \ \ \textit{notée} \ \ D_{j_k \ldots j_1} f(a), \ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$$

en a. On a de plus:

$$\forall \ \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k \in E, \ \ D^k f_{(a)}(\vec{h}_k) \ldots (\vec{h}_1) =$$

$$D^k f_{(a)}(\vec{h}_k, \ldots, \vec{h}_1) = \sum_{0 \leq j_k, \ldots, j_1 \leq n} D_{j_k \ldots j_1} f(a)\big(h_k^{j_k} \ldots h_1^{j_1}\big) \tag{8}$$

2.ii- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω ssi f admet toutes ses différentielles partielles d'ordre k; $D_{j_k \ldots j_1} f(a)$, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ sur Ω, et si celles-ci sont continues sur Ω.

2.iii- Si f admet toutes ses différentielles partielles d'ordre k sur Ω, continues en $a \in \Omega$, sauféventuellement une qui n'existe qu'en $a \in \Omega$, alors f est k-fois différentiable en a. □

5.2. Famille de contractions dépendant uniformément d'un paramètre.

Définition. Soient E et F des espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{K}$, Ω_E un ouvert de E, Ω_F un ouvert de F, et $\Phi_x : \Omega_F \to F$, avec $x \in \Omega_E$, une famille de fonctions telles que:

$$\forall (x, y, z) \in \Omega_E \times \Omega_F \times \Omega_F, \ \|\Phi_x(y) - \Phi_x(z)\|_F \leq C\|y - z\|_F,$$

pour une constante $0 \leq C < 1$ indépendante de x, y et z.

i- On dit alors que la famille $\Phi = (\Phi_x)_{x \in \Omega_E}$ est une famille de contractions dépendant uniformément du paramètre x.

ii- Une partie $S \subset \Omega_F$ est dite stable par Φ ssi pour tout $x \in \Omega_E$, $\Phi_x(S) \subset S$.

iii- Une application $\varphi : \Omega_E \to \Omega_F$ est dite invariante par Φ ssi pour tout $x \in \Omega_E$, $\Phi_x[\varphi(x)] = \varphi(x)$.

Remarques. - Unicité de la fonction invariante: Comme $C \in [0;1[$, à toute famille de contractions, on ne peut associer (éventuellement) qu'une seule application invariante. En effet, si $\psi : \Omega_E \to \Omega_F$ est une autre application invariante par la famille Φ, pour tout $x \in \Omega_E$, on a:

$$\|\phi(x) - \psi(x)\| = \|\Phi_x(\phi(x)) - \Phi_x(\psi(x))\| \leq C\|\phi(x) - \psi(x)\| \text{ et } C < 1,$$

ce qui ne se peut que si $\|\phi(x) - \psi(x)\| = 0$.

- Pour tout $x \in \Omega_E$, Φ_x est lipschitzienne, donc uniformément continue sur Ω_F. Bien sûr on ne peut rien dire a priori de la continuité de $\Omega_E \times \Omega_F \ni (x,y) \to \Phi_x(y) \in F$.

- Si Ω_F est convexe et si pour tout $x \in \Omega_E$, Φ_x est différentiable, de différentielle telle que $\|D\Phi_{x(\xi)}\| < 1$, la famille Φ est une famille de contractions (par le théorème de la moyenne).

Exemple. Considérons, pour $x \in]0,1[$ la famille de fonctions Φ_x $:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $\Phi_x(y) = \sqrt{1+xy}$ ($E = F = \mathbb{R}$, $\Omega_E =]0,1[$ et $\Omega_F =]0,+\infty[$). Soit $x \in]0,1[$, on a pour tout $y \in]0,+\infty[$: $\Phi'_x(y) = \dfrac{x}{2\sqrt{1+xy}} \leq \dfrac{x}{2} < 1/2 < 1$. Le théorème de la moyenne assure alors que $(\Phi_x)_{x\in]0,1[}$ est une famille de contractions dépendant uniformément du paramètre x. À x fixé, si la fonction Φ_x admet $\varphi(x)$ pour point fixe, celui-ci est donné par: $\Phi_x(\varphi(x)) = \varphi(x)$, soit $\varphi(x) = \sqrt{1+x\varphi(x)}$, ce qui donne: $\varphi(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

Si l'équation $\Phi_x(\varphi(x)) = \varphi(x)$ n'avait pas été facile à résoudre, on aurait pu prouver que Φ_x possède un point fixe de la façon suivante: on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in]0,+\infty[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \Phi_x(u_n)$. Notons que quel que soit $u_0 \in]0,+\infty[$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,+\infty[$, ce qui permet bien de définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut alors montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy: par le théorème de la moyenne, $|\Phi_x(u_n) - \Phi_x(u_{n-1})| \leq 1/2|u_n - u_{n-1}|$, ce qui donne de proche en proche: $|u_{n+1} - u_n| = |\Phi_x(u_n) - \Phi_x(u_{n-1})| \leq 1/2^n|u_1 - u_0|$. On en déduit que:
$|u_q - u_n| \leq |u_q - u_{q-1}| + |u_{q-1} - u_{q-2}| + \ldots + |u_{n+1} - u_n| \leq (\dfrac{1}{2^{q-1}} + \dfrac{1}{2^{q-2}} + \ldots + \dfrac{1}{2^n})|u_1 - u_0|$. Soit:
$|u_q - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}(\dfrac{1}{2^{q-n-1}} + \dfrac{1}{2^{q-n-2}} + \ldots + 1)|u_1 - u_0| = \dfrac{1}{2^n}(\dfrac{1-1/2^{q-n}}{1-1/2})|u_1 - u_0|$, et donc

$$|u_q - u_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - u_0|,$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ceci prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite de Cauchy, et comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge vers un réel $\ell = \ell(x)$ (la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de x !). Mais par continuité de $(x,y) \to \Phi_x(y)$, et comme $u_{n+1} = \Phi_x(u_n)$, nécessairement $\ell(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_x(u_n) = \Phi(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = \Phi(\ell(x))$. C'est-à-dire que Φ_x admet bien un point fixe, quel que soit $x \in]0,1[$.

Cet exemple fournit en réalité le modèle de la preuve de l'existence de fonctions invariantes

par une famille de contractions (théorème 5.2): dès que l'on peut trouver une partie stable par Φ, on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui s'avère être de Cauchy (parce que $C < 1$). Si l'espace F est complet, elle converge vers $\varphi(x)$, et par continuité de $(x,y) \to \Phi_x(y)$, $\varphi(x)$ est bien un point fixe de Φ_x. L'existence d'une partie stable sera assurée par l'existence d'au moins un point fixe (a,b) (i.e. $\Phi_a(b) = b$) et la continuité de $(x,y) \mapsto \Phi_x(y)$ en (a,b).

Théorème 5.2. (Théorème du point fixe en famille) — *Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, Ω_E et Ω_F des ouverts de E et F respectivement, $\Phi = (\Phi_x)_{x\in\Omega_E}$ une famille de contractions telle que $\Phi_x : \Omega_F \to F$.*

S'il existe $(a,b) \in \Omega_E \times \Omega_F$ tel que $\Phi_a(b) = b$ et si $\Omega_E \times \Omega_F \ni (x,y) \mapsto \Phi_x(y) \in F$ est continue en (a,b), ou de façon un peu moins restrictive, si $\Omega_E \ni x \to \Phi_x(b) \in F$ est continue en a, alors il existe une partie $S \subset \Omega_F$ stable par $(\Phi_x)_{x\in\Omega'_E}$ (S étant de plus une boule fermée de centre b incluse dans Ω_F et Ω'_E une boule ouverte de centre a incluse dans Ω_E) et il existe une unique application $\varphi : \Omega'_E \to S$ invariante par $(\Phi_x)_{x\in\Omega'_E}$. Si de plus $\Omega_E \times \Omega_F \ni (x,y) \mapsto \Phi_x(y) \in F$ est continue, l'application φ est aussi **continue**.

Preuve. Soit $\rho > 0$ tel que $\bar{B}(b,\rho) \subset \Omega_F$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{B}(b,\rho)$ soit une partie stable par Φ, est que pour tout $x \in \Omega_E$, pour tout $y \in \bar{B}(b,\rho)$, $\|\Phi_x(y) - b\| \leq \rho$. Or $\|\Phi_x(y) - b\| \leq \|\Phi_x(y) - \Phi_x(b)\| + \|\Phi_x(b) - b\| \leq C\|y - b\| + \|\Phi_x(b) - b\| \leq C.\rho + \|\Phi_x(b) - b\|$. Mais par continuité de $x \mapsto \Phi_x(b)$, comme $\Phi_a(b) - b = 0$, il existe une boule ouverte Ω'_E telle que pour tout $x \in \Omega'_E$, $\|\Phi_x(b) - b\| \leq (1 - C)\rho$ et donc $S = \bar{B}(b,\rho)$ est une partie stable par $(\Phi_x)_{x \in \Omega'_E}$.

Nous devons maintenant supposer que F est un espace de Banach pour trouver une application $\varphi : \Omega'_E \to S$ invariante par $(\Phi_x)_{x \in \Omega'_E}$.

Pour $x \in \Omega'_E$, définissons la suite $\varphi_0(x) = b, \varphi_1(x) = \Phi_x(\varphi_0(x)), \ldots, \varphi_{n+1}(x) = \Phi_x(\varphi_n(x)), \ldots$ Cette suite est bien définie car S est une partie stable par Φ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) \in S \subset \Omega_F$, puisque $\varphi_n(x) = \Phi_x(\varphi_{n-1}(x))$ et $\varphi_{n-1}(x) \in S$.

On a alors, si $p > q$:

$$\|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)\| \leq \|\varphi_p(x) - \varphi_{p-1}(x)\| + \ldots + \|\varphi_{q+1}(x) - \varphi_q(x)\| \leq \|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\|(C^{p-1} + \ldots + C^q).$$

On en déduit que :

$$\|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)\| \leq C^q(\frac{1 - C^{p-q}}{1 - C})\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{$*$}$$

et donc que la suite $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, qui converge vers un point noté $\varphi(x)$ dans F (puisque F est complet). Mais comme S est un fermé de F et $\varphi_n(x) \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) \in S$. Enfin comme pour tout $x \in \Omega'_E$, on a $\Phi_x(\varphi_n(x)) = \varphi_{n+1}(x)$, en faisant $n \to \infty$, par continuité de $(x,y) \to \Phi_x(y)$, on a bien $\Phi_x(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Notons que $\|\Phi_x(b) - b\| = \|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \leq (1 - C)\rho$, de sorte que la convergence de $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur Ω'_E, par $(*)$ (critère de Cauchy uniforme), et par conséquent si chaque φ_n est continue, la limite φ est continue sur Ω'_E. La continuité de chaque φ_n se prouve très aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, grâce à l'hypothèse de continuité de $(x,y) \to \Phi_x(y)$. $\square$

5.3. Le théorème de la fonction implicite.

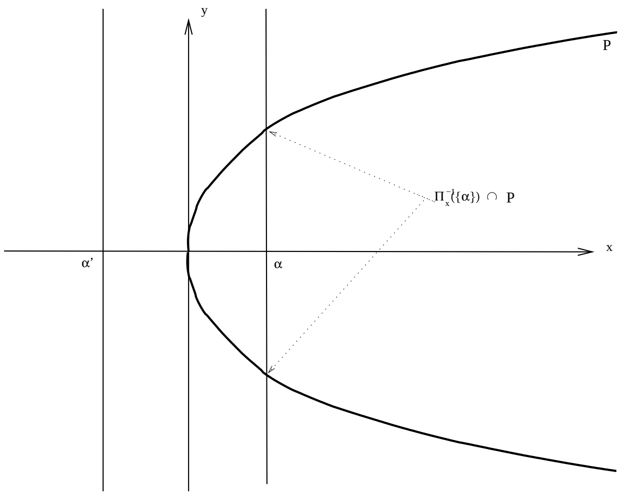
Le théorème 5.2 permet d'obtenir une unique application invariante φ par une famille continue de contractions Φ, pourvu qu'un membre de la famille Φ_a possède un point fixe b (l'existence de φ est assurée localement autour de a). Par exemple, étant donnée une application $f : E \times F \to G$, considérons, lorsque $F = G$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_x : & F & \to & F \\ & y & \to & y + f(x,y) \end{array}$$

Si Φ vérifie les hypothèses du théorème 5.2., il va exister une unique application invariante $\varphi : \Omega'_E \to S$ par Φ, c'est-à-dire que pour tout $x \in \Omega'_E$, $\Phi_x(\varphi(x)) = \varphi(x)$, ou encore: $f(x,\varphi(x)) = 0$. De plus on a vu que si $y \in F$ est tel que $\Phi_x(y) = y$ alors nécessairement $y = \varphi(x)$ (unicité de l'application invariante). On en conclut que localement autour d'un point $(a,b) \in E \times F$ tel que $f(a,b) = 0$, l'ensemble des points (x,y) tel que $f(x,y) = 0$ (on parle d'hypersurface dans $E \times F$) est l'ensemble $(x,\varphi(x))$, c'est-à-dire est donné par le graphe d'une application φ, ce qui est une propriété non triviale.

Par exemple soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 - x$. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0\}$ est la parabole P d'axe Ox. Mais autour de $(0,0)$, P n'est certainement pas le graphe d'une application $\varphi :]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{R}$, avec $\varphi(x) = y$, puisque $P \cap \pi_x^{-1}(\{\alpha\})$ contient soit deux points, soit est vide, pour α voisin de 0 dans $]-\epsilon,\epsilon[$

($\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ étant l'application définie par $\pi_x(a,b) = a$).



Remarquons que dans cet exemple, en notant $\Phi_x(y) = y - f(x,y) = y - y^2 + x$, le rapport $(\Phi_x(y) - \Phi_x(z))/(y-z) \to \Phi'_x(y) = 1 - 2y$ quand $z \to y$. Ce rapport n'étant pas majoré en valeur absolue par une constante $C < 1$ pour y voisin de 0, au voisinage de $x = 0$ et de $y = 0$, Φ_x ne peut pas être une famille de contractions.

Exercice 41. *Montrer que $\Phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $\Phi_x(y) = y - f(x,y)$ où $f(x,y) = y^2 - x^3$, ne définit pas une famille de contractions, en montrant qu'au voisinage du point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x,y) = 0\}$ n'est pas le graphe d'une application du type $x \to y = \varphi(x)$. (ind. utiliser le* théorème 5.2 *et s'inspirer de l'exemple ci-dessus).*

Ne supposons plus $F = G$, et remarquons que tout ceci est encore valable lorsque $\Phi_x(y) = y + P[f(x,y)]$, où $P : G \to F$ est une application telle que $P(z) = 0_F \Longrightarrow z = 0_G$. Car $\Phi_x(\varphi(x)) = \varphi(x) \Longrightarrow P[f(x,\varphi(x))] = 0_F$.

Autrement dit, on peut essayer de "choisir" P pour que la famille Φ soit dans les hypothèses du théorème 4.2, c'est-à-dire pour que l'hypersurface $f(x,y) = 0_G$ de $E \times F$ soit localement un graphe autour d'un de ses points (a,b).

Grâce au théorème de la moyenne, pour trouver une condition suffisant au caractère contractant de Φ_x (uniformément en $x \in E$), on peut évaluer $D\Phi_{x(y)}$, pour $y \in E$. Si P est choisie linéaire, on obtient: $D\Phi_{x(y)} = Id_F + P \circ D_2 f_{(x,y)}$.

Or si $D_2 f_{(a,b)}$ est un isomorphisme de $F \to G$, pour un certain $(a,b) \in E \times F$, on peut poser $P = -[D_2 f_{(a,b)}]^{-1}$, ce qui donne: $D\Phi_{a(b)} = Id_F - [D_2 f_{(a,b)}]^{-1} \circ D_2 f_{(a,b)} = Id_F - Id_F = 0_{\mathcal{L}(F;F)}$. Si de plus $(x,y) \to D\Phi_{x(y)}$ est continue en (a,b), alors pour (x,y) dans un voisinage $\Omega_E \times \Omega_F$ convexe de (a,b): $\|D\Phi_{x(y)}\| \leq C < 1$, ce qui donne bien une famille $(\Phi_x)_{x \in \Omega_E}$ d'applications contractantes, par le théorème de la moyenne. Pour se ramener aux hypothèses du théorème 4.2, il nous faut encore supposer que f est continue, pour que $(x,y) \to \Phi_x(y)$ le soit. En conclusion, sous les hypothèses suivantes:

- $f : \Omega \to G$ est une application continue, où Ω est un ouvert de $E \times F$,
- Il existe $(a,b) \in \Omega$ tel que $f(a,b) = 0_F$,
- $D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F;G)$,
- $\Omega \ni (x,y) \to D_2 f_{(x,y)} \in \mathcal{L}(F;G)$ est continue en (a,b), le théorème 5.2 assure qu'il existe un voisinage Ω'_E de a dans E, une boule fermée S centrée en b (et de rayon non nul) dans F, et une application continue $\varphi : \Omega'_E \to S$ telle que:

$$\forall (x,y) \in \Omega'_E \times S, \; f(x,y) = 0_G \iff y = \varphi(x).$$

Étudions le problème de la différentiabilité de φ. Pour cela on suppose que $f : \Omega \to G$ est elle-même différentiable.

Soit $x_0 \in \Omega'_E$, $y_0 = \varphi(x_0) \in S \subset F$ et $\varphi(x_0 + h) - y_0 = k \in F$. La continuité de φ implique que $k \to 0$ lorsque $h \to 0$. En particulier, dès que h est suffisamment petit, $(x_0 + h, y_0 + k) \in \Omega$. On a alors:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Df_{(x_0,y_0)}(h, k) + \|(h, k)\| p_{(x_0,y_0)}(h, k) \text{ avec } \lim_{h\to 0} p_{(x_0,y_0)}(h, k) = 0_G.$$

Mais comme $k \to 0_F$ lorsque $h \to 0_E$, $p_{(x_0,y_0)}(h, k) = q_{(x_0,y_0)}(h) \to 0_G$ lorsque $h \to 0_E$ et par définition de φ, $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) = 0_G$. Soit:

$$0_G = D_1 f_{(x_0,y_0)}(h) + D_2 f_{(x_0,y_0)}(k) + \max(\|h\|, \|k\|) q(h).$$

Rappelons (il s'agit du Théorème 3.3) que si F et G sont deux espaces de Banach, $\mathcal{I}som(F; G)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(F; G)$ et $\mathcal{I} : \mathcal{I}som(F; G) \ni P \to \mathcal{I}(P) = P^{-1} \in \mathcal{I}som(G; F)$ est une application $\mathcal{C}^\infty$.

Dans ces conditions, pour (x_0, y_0) suffisamment proche de (a, b), $D_2 f_{(x_0,y_0)}$ est dans $\mathcal{I}som(F; G)$, comme $D_2 f_{(a,b)}$. On en déduit:

$$k = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = -[D_2 f_{(x_0,y_0)}]^{-1}(D_1 f_{(x_0,y_0)}(h)) - \max(\|h\|, \|k\|)[D_2 f_{(x_0,y_0)}]^{-1}[q(h)].$$

Pour montrer que φ est différentiable, il suffit de prouver que $\|k\|/\|h\|$ est borné lorsque $h \to 0$. Or par l'égalité précédente: $\|k\| \leq \|L(h)\| + \|k\|.\|r(h)\|$, avec $L = [D_2 f_{(x_0,y_0)}]^{-1} \circ D_1 f_{(x0,y_0)}$ et $r(h) = [D_2 f_{(x_0,y_0)}]^{-1}[q(h)]$. On obtient alors: $\|k\|/\|h\| \leq \|L\|/(1 - \|r(h)\|)$. On en conclut que la différentiabilité de f implique bien celle de φ. Si de plus f est $\mathcal{C}^k$, l'égalité: $D\varphi_(x_0) = -[D_2 f_{(x_0,y_0)}]^{-1} \circ D_1 f_{(x_0,y_0)}$, montre, grâce au caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{I} : \mathcal{I}som(F; G) \ni P \to \mathcal{I}(P) = P^{-1} \in \mathcal{I}som(G; F)$ que φ aussi $\mathcal{C}^k$. On vient de montrer le théorème fondamental suivant:

Théorème 5.3. (Théorème de la fonction implicite) — *Soient E et G deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Soit Ω un ouvert de $E \times F$ et $f : \Omega \to G$. Posons que f est $\mathcal{C}^0$ ssi f est continue, et $\mathcal{C}^{1/2}$ ssi f est différentiable. Si:*

- f est une application $\mathcal{C}^k$, $k = 0, 1/2, 1, \ldots, \infty$,
- Il existe $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0_G$,
- $D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F; G)$ (G est alors comme F un espace de Banach),
- $(x, y) \to D_2 f_{(x,y)} \in \mathcal{L}(F; G)$ est continue en (a, b) (ce qui est automatique si $k \geq 1$),

Alors il existe un voisinage ouvert Ω_E de a dans E, un voisinage ouvert Ω_F de b dans F, et unique application $\varphi : \Omega_E \to \Omega_F$ de classe k, telle que:

$$\forall (x, y) \in \Omega_E \times \Omega_F, \; f(x, y) = 0_G \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

De plus, si $k > 0$, $D\varphi_{(x)} = -[D_2 f_{(x,\varphi(x))}]^{-1} \circ D_1 f_{(x,\varphi(x))}$. □

Remarques. • Les hypothèses du théorème de la fonction implicite impliquent que F et G sont isomorphes (il existe une application linéaire continue, inversible, d'inverse (linéaire) continue, entre F et G.) En particulier, F étant complet, G est également complet, et si F est de dimension finie, il en est de même de G, et $\dim(G) = \dim(F)$.

• L'hypothèse: "$D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F; G)$" est là pour définir l'application $(x, y) \to \Phi_x(y)$.

• L'hypothèse: "Il existe $(a, b) \in \Omega$ tel que $f(a, b) = 0_G$" assure l'existence d'une partie stable (avec la continuité en (a, b) de $(x, y) \to \Phi_x(y)$).

• L'hypothèse: "f est une application $\mathcal{C}^k$, $k = 0, 1/2, 1, \ldots, \infty$," assure que f est au moins continue, et donc que $(x, y) \to \Phi_x(y)$ est continue, ce qui à son tour implique:

- d'une part la continuité en (a, b) de $(x, y) \to \Phi_x(y)$, et donc l'existence d'une partie stable, permettant de définir la suite $\varphi_n(x)$ (cf le point précédent),

- d'autre part la continuité de $(x, y) \to \Phi_x(y)$ garantit la continuité de φ dans la version $\mathcal{C}^0$ du théorème. Le caractère $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1/2$ de φ étant garanti par le caractère $\mathcal{C}^k$ de f.

• L'hypothèse: "$(x, y) \to D_2 f_{(x,y)} \in \mathcal{L}(F; G)$ est continue en (a, b)" assure enfin que la famille Φ_x est une famille de contractions (par le théorème de la moyenne).

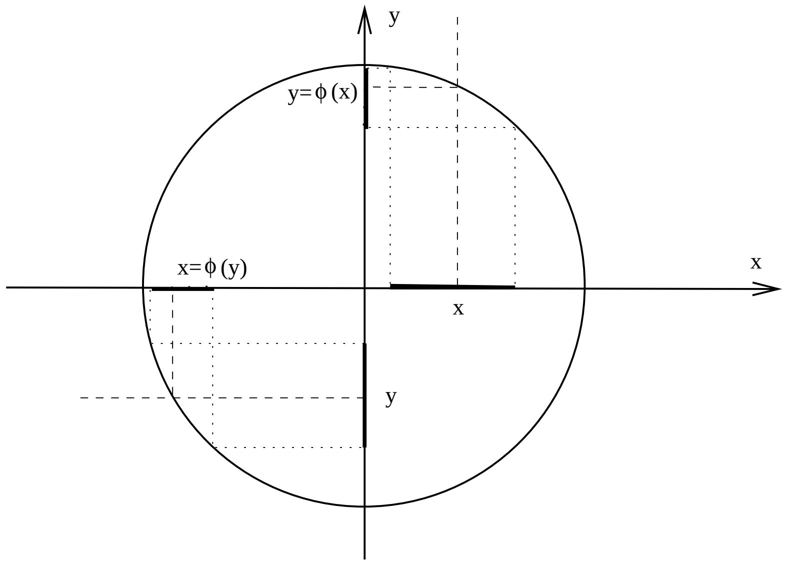
Exemple. Soit dans $\mathbb{R}^2$ le cercle unité $S^1 = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$, avec $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant $\mathcal{C}^\infty$, elle admet ses deux différentielles partielles, qui sont: $D_1 f_{(a)}(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h = 2a_1.h$ et $D_2 f_{(a)}(k) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)k = 2a_2.k$. On en déduit que $D_2 f_{(a)}$ est un isomorphisme ssi $a_2 \neq 0$. Donc en un point $a = (a_1, a_2)$ de S^1, $D_2 f_{(a)}$ est un isomorphisme ssi $a \neq (1, 0)$ et $(-1, 0)$. Soit donc $a \in S^1$ qui n'est pas sur l'axe des x.

On a:

- f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$,
- $f(a) = 0$,
- $D_2 f_{(a)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R}; \mathbb{R})$,
- Du fait que f est $\mathcal{C}^\infty$, $(x, y) \to D_2 f_{(x,y)}$ est bien sûr continue.

Le théorème de la fonction implicite assure alors qu'au voisinage de a, S^1 est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $x \to y = \varphi(x)$. On sait de plus que $D\varphi_{(x)} = -[D_2 f_{(x,\varphi(x))}]^{-1} \circ D_1 f_{(x,\varphi(x))}$. Par exemple en $(a_1, a_2) \in S^1$, $\varphi'(a_1) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, \sqrt{1 - a_1^2}) / \dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1, \sqrt{1 - a_1^2})$.



Même étude au voisinage des points de S^1 qui ne sont pas sur l'axe des y, en remplaçant f par g, avec $g(x, y) = f(y, x)$. On obtient au voisinage de ces points que S^1 est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $y \mapsto x = \psi(y)$ et $\psi'(a_2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{1 - a_2^2}, a_2) / \dfrac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{1 - a_2^2}, a_2)$.

Autrement dit, au voisinage des points de S^1 pour lesquels l'axe des coordonnées y (resp. x) coupe "transversalement" S^1, S^1 est le graphe, au-dessus de l'axe des coordonnées x (resp. y) d'une application $\mathcal{C}^\infty$,

$x \mapsto y = \phi(x)$ (resp. $y \mapsto x = \phi(y)$).

5.4. La géométrique des hypothèses du théorème de la fonction implicite.

Supposons que les conditions du théorème de la fonction implicite (théorème 4.4) soient réalisées en un point (a, b) pour une application $f : \Omega \subset E \times F \to G$ au moins $\mathcal{C}^1$. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{(x, y) \in \Omega \subset E \times F; f(x, y) = 0_G\}$, $(a, b) \in \mathcal{H}$. Au voisinage Ω_E de a est alors définie une application $\varphi : \Omega_E \to \Omega_F$, de même régularité que f (disons $\mathcal{C}^1$), qui arrive dans un voisinage Ω_F de b, telle que $\mathcal{H} \cap (\Omega_E \times \Omega_F)$ soit le graphe de φ. De plus on sait $D\varphi_{(x)} = -[D_2 f_{(x,\varphi(x))}]^{-1} \circ D_1 f_{(x,\varphi(x))}$. Puisque φ est différentiable en a, il résulte de la définition de la différentiabilité que le graphe de φ, en (a, b), vient s'aplatir sur le graphe $T_{(a,b)}$ de $b + D\varphi_{(a)}(. - a) : E \ni \vec{h} \mapsto b + D\varphi_{(a)}(\vec{h} - a) \in F$. Or on a : $T_{(a,b)} = \{(h, b + D\varphi_{(a)}(h - a)), h \in E\} = (a, b) + \{(h, D\varphi_{(a)}(h)), h \in E\}$. Soit :

$$T_{(a,b)} = (a, b) + \{(h, -[D_2 f_{(a,b)}]^{-1}(D_1 f_{(a,b)})(h)), h \in E\}$$

$$T_{(a,b)} = (a, b) + \{(h, k) \in E \times F; D_2 f_{(a,b)}(k) = -D_1 f_{(a,b)})(h)\}$$

$$T_{(a,b)} = (a, b) + \{(h, k) \in E \times F; D_1 f_{(a,b)})(h) + D_2 f_{(a,b)}(k) = 0_G\}.$$

Or comme par le théorème 4.1, $D_1 f_{(a,b)})(h) + D_2 f_{(a,b)}(k) = Df_{(a,b)}(h, k)$, on en conclut que :

$$T_{(a,b)} = (a, b) + \ker(Df_{(a,b)}).$$

On peut donc énoncer un premier résultat :

Proposition 5.4. — *Soit $f : \Omega \subset E \times F \to G$ une application au moins $\mathcal{C}^1$. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{(x, y) \in \Omega \subset E \times F; f(x, y) = 0_G\}$ et soit $(a, b) \in \mathcal{H}$. Supposons que le théorème de la fonction implicite soit satisfait pour f au point (a, b). Alors, en (a, b), $\mathcal{H}$ s'aplatit sur l'espace affine $T_{(a,b)} = (a, b) + \ker(Df_{(a,b)})$, appelé* **l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en** (a, b) *ou le* **plan tangent à $\mathcal{H}$ en** (a, b).

Si E est de dimension finie, $\dim(T_{(a,b)}) = \dim(E)$.

Preuve. Il reste à prouver que $\dim(T_{(a,b)}) = \dim(E)$. Mais cela est immédiat puisque $T_{(a,b)}$ est le translaté par (a, b) du graphe de $D\varphi_{(a)} : E \to F$. □

Nous allons maintenant interpréter l'hypothèse : $D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F; G)$ du théorème de la fonction implicite. Plaçons-nous en un point (a, b) de $\mathcal{H} = f^{-1}(\{0\})$ en lequel le théorème de la fonction implicite a lieu, ce qui donne l'existence du plan tangent $\mathrm{T}_{(a,b}\mathcal{H}$.

L'hypothèse $D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F, G)$ implique que $D_2 f_{(a,b)}$ est une application injective, et donc que $\ker(D_2 f_{(a,b)}) = \{0_F\}$. On en déduit qu'un vecteur $(0_E, k) \in E \times (F \setminus \{0_F\})$ ne peut pas être dans $\ker Df_{(a,b)}$, puisque $Df_{(a,b)}(0_E, k) = D_1 f_{(a,b)}(0_E) + D_2 f_{(a,b)}(k) = 0_G \iff D_2 f_{(a,b)}(k) = 0_G \iff k \in ker D_2 f_{(a,b)} \setminus \{0_G\}$. De sorte que l'hypothèse $D_2 f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F, G)$ implique que

$$\ker(Df_{(a,b)}) \cap \{0_E\} \times F = \{0_{E \times F}\}.$$

D'autre part si $(h, k) \in E \times F$, on peut trouver $(0_E, k') \in \{0_E\} \times F$ et $(u, v) \in \ker(Df_{(a,b)})$ tels que $(h, k) = (0_E, k') + (u, v)$. En effet, il suffit de poser $u = h$, et comme $Df_{(a,b)}(u, v) = D_1 f_{(a,b)}(u) + D_2 f_{(a,b)}(v)) = 0_G$, nécessairement $v = -[D_2 f_{(a,b)}]^{-1}(D_1 f_{(a,b)}(u))$.

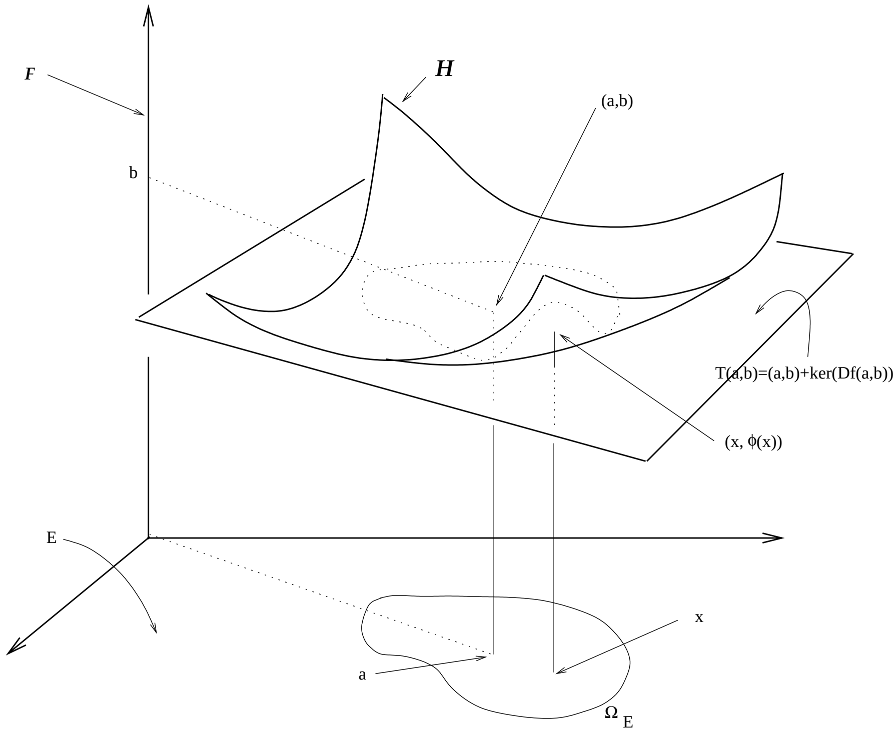
On vient ainsi de prouver que :

$$D_2 f_{(a,b)} \quad \text{inversible} \implies E \times F = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_E\} \times F). \tag{9}$$

✓

Ce qui implique que $T_{(a,b)} = (a, b) + \ker(Df_{(a,b)})$ ne contient pas de direction "verticale" au-dessus de E (ie dans $\{0_E\} \times F$) .

Finalement l'hypothèse $D_2f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F,G)$ garantit que $T_{(a,b)}$ est un plan affine "en regard" de E, sur lequel $\mathcal{H}$ vient s'aplatir en (a,b); il n'est donc pas surprenant que localement autour de (a,b), $\mathcal{H}$ lui-même soit "en regard" de E, et donc que localement autour de (a,b), $\mathcal{H}$ soit un graphe au-dessus d'un voisinage de a dans E.



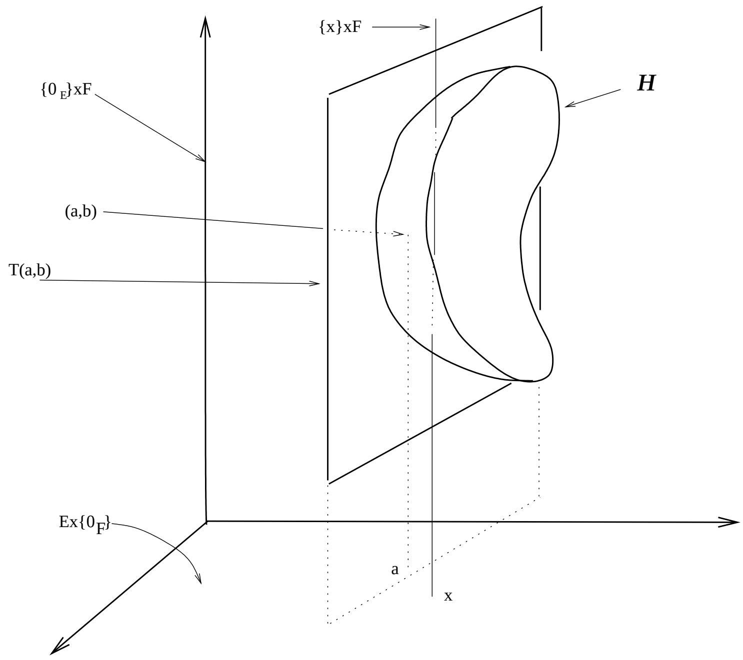
Voyons si la réciproque de (9) est vraie. Supposons que $E \times F = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_E\} \times F)$. Montrons qu'alors $D_2f_{(a,b)} : F \to G$ est injective. $D_2f_{(a,b)}(k) = 0_G$ implique que $Df_{(a,b)}(0_E, k) = 0_G$, ce qui par hypothèse ne se peut que si $(0_E, k) = 0_{E\times F}$, soit encore que $k = 0_F$ ie que $D_2f_{(a,b)}$ est injective. Supposons que $\dim(E) < \infty$ et $\dim(F) = \dim(G) < \infty$. L'hypothèse $E \times F = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_E\} \times F)$ implique que $Im(Df_{(a,b)}) = Df_{(a,b)}(\{0_E\} \times F)$. Or $Df_{(a,b)}(\{0_E\} \times F) = D_2f_{(a,b)}(F)$. D'autre part le théorème du rang donne $\dim(Im(Df_{(a,b)})) = \dim(F)$. On en déduit que $\dim(D_2f_{(a,b)}(F)) = \dim(F) = \dim(G)$, ie que $D_2f_{(a,b)}$ est surjective. On a donc prouvé :

$$\dim(E) < \infty, \dim(F) = \dim(G) < \infty \quad \text{et} \quad E \times F = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_E\} \times F)$$
$$\Longrightarrow D_2f_{(a,b)} \quad \text{inversible} \tag{10}$$

Nous avons illustré dans la figure ci-dessus l'hypothèse $D_2f_{(a,b)} \in \mathcal{I}som(F,G)$, qui implique que $E \times F = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_E\} \times F)$, ou encore que $T_{(a,b)}$ est "face à", ou "en regard de" E dans $E \times F$.

Nous représentons dans la figure ci-dessous la configuration interdite par les hypothèses du théorème de la fonction implicite : celle où $\ker(Df_{(a,b)})$ contient un vecteur non nul de $\{0_E\} \times F$.

Dans cette configuration interdite, $T_{(a,b)} = (a,b) + \ker Df_{(a,b)}$ n'est pas en regard de E, ce qui permet de dire que $\mathcal{H}$ n'est pas au voisinage de (a,b) un graphe d'application différentiable au-dessus d'un voisinage de a dans E (dans le cas de la figure, au-dessus d'un point voisin de a dans E, se trouve dans $\mathcal{H}$ soit 2 points, soit aucun. Si $\mathcal{H}$ était au voisinage de (a,b) le graphe d'une application au-dessus d'un voisinage de a, ce nombre serait constant et égal à 1. Nous n'avons pas reeprésenté le cas où $\mathcal{H}$ traverse son plan tangent, ce qui est par exemple le cas pour le graphe de $x \mapsto y = x^{1/3}$ au-dessus de Ox dans $\mathbb{R}^2$).



Étude en dimension finie : cas $E = \mathbb{R}^n$**,** $F = G = \mathbb{R}^p$**.** Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ satisfasse les hypothèses du théorème de la fonction implicite en $(a,b) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p)$, c'est-à-dire que f soit par exemple $\mathcal{C}^1$, que $f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et que $D_2f_{(a,b)}$ soit inversible (la continuité de $(x,y) \mapsto D_2f_{(x,y)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^p) = G\ell_p(\mathbb{R})$ en (a,b) est assurée par l'hypothèse f est $\mathcal{C}^1$.)

Remarque. Formellement f est une application de deux variables vectorielles $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, mais quitte à composer f par l'isomorphisme linéaire $\Psi : \mathbb{R}^{n+p} \ni (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \mapsto \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) = ((x_1 \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_p)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, c'est-à-dire quitte à identifier $\mathbb{R}^{n+p}$ et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on peut, au besoin, aussi bien voir f comme une fonction de $n+p$ variables sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$.

• L'hypothèse "f est $\mathcal{C}^1$" se teste en regardant les dérivées partielles de f sur Ω, par le théorème 2.10 : $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{n+p})$, $j \in \{1, \ldots, n+p\}$ doivent exister quel que soit $(x_1, \ldots, x_{n+p}) \in \Omega$ et être continues sur Ω.

• L'hypothèse "$D_2f_{(a,b)} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est bijective" signifie que la matrice représentative, dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^p$, de cette application linéaire est inversible. Si l'on se fixe une base $(\vec{e}_1, \ldots, \ldots, \vec{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$, disons la base canonique, on sait, en notant $f_1, \ldots, f_p$ les p composantes de f dans notre base, que :

$$D_2f_{(a,b)} = \begin{pmatrix} D_2f_{1(a,b)} \\ \vdots \\ D_2f_{p(a,b)} \end{pmatrix}.$$

Or si $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, pour $1 \leq j \leq p$, $D_2g_{(a,b)}(\vec{e}_j)$ est par définition $D\widetilde{g}^2_{(a,b)}(\vec{e}_j)$, c'est-à-dire la dérivée directionnelle de l'application $\widetilde{g}^2_{(a,b)}$ du paragraphe 5.1, suivant la direction du j^{eme} vecteur $\vec{e}_j$ de notre base. Mais comme l'application $\widetilde{g}^2_{(a,b)}$ consiste à fixer la première variable (i.e. x) de f égale à a et à considérer l'autre (i.e. y) comme libre, cette dérivée directionnelle est donc exactement la dérivée directionnelle de f (vue comme application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$), au point (a,b), suivant la direction $\vec{E}_j$, avec $\vec{E}_j$ le $(n+j)^{eme}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+p}$). Autrement dit, $D_2 g_{(a,b)}(\vec{e}_j) = \dfrac{\partial f}{\partial y_j}(a,b)$. En faisant $g = f_1, \ldots, f_p$, on obtient la matrice représentative de $D_2 f_{(a,b)}$ dans notre base :

$$\mathcal{M}at(D_2 f_{(a,b)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}.$$

ou encore, en considérant f comme une fonction de $n+p$ variables $(x_1, \ldots, x_{n+p})$:

$$\mathcal{M}at(D_2 f_{(a,b)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}(a,b) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+p}}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{n+1}}(a,b) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{n+p}}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Dire alors que cette matrice est inversible, revient à vérifier que son déterminant est non nul.

On a vu (proposition 5.4), que lorsque le théorème de la fonction implicite a lieu, $\mathcal{H} = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\})$ vient s'aplatir en (a,b) sur le plan affine $T_{(a,b)} = (a,b) + \ker(Df_{(a,b)})$.

$T_{(a,b)}$ est alors de dimension n. En effet, par le théorème 5.1, $Df_{(a,b)} = D_1 f_{(a,b)}.\pi_1 + D_2 f_{(a,b)}.\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, avec π_1 et π_2 les projections canoniques de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$: $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \ni (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \pi_1(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \ni (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \pi_2(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} \in \mathbb{R}^p$. Or si $D_2 f_{(a,b)}$ est inversible, elle est en particulier surjective, et $D_2 f_{(a,b)}(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p$. On en conclut a fortiori que $Df_{(a,b)}$ est surjective, et par le théorème du rang, $\dim(\ker Df_{(a,b)}) = \dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) - \dim(Im(Df_{(a,b)})) = (n+p) - p = n$. (On peut aussi dire, comme dans la preuve de la proposition 5.4, que $\ker Df_{(a,b)}$ est le graphe de $D\varphi_{(a)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, pour prouver que $\dim(T_{(a,b)}) = n$.)

Remarquons que $\ker(Df_{(a,b)}) = \ker(Df_{1(a,b)}, \ldots, Df_{p(a,b)})$, c'est-à-dire que :

$$\ker(Df_{(a,b)}) = \bigcap_{j=1,\ldots,p} \ker(Df_{j(a,b)}).$$

Chaque $Df_{j(a,b)} : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$, $j = 1, \ldots, p$ est une forme linéaire non nulle (sinon $\mathcal{M}at(D_2 f_{(a,b)})$ ne serait pas inversible !), égale à : $Df_{j(a,b)}(h_1, \ldots, h_{n+p}) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(a,b).h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_j}{\partial x_{n+p}}(a,b).h_{n+p}$. En notant $\overrightarrow{grad} f_{j(a,b)} = (\dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(a,b), \ldots, \dfrac{\partial f_j}{\partial x_{n+p}}(a,b)) \in \mathbb{R}^{n+p}$, on a que $\ker(Df_{j(a,b)})$ est l'hyperplan $(\overrightarrow{grad} f_{j(a,b)})^{\perp}$, c'est-à-dire que $\ker(Df_{(a,b)})$ est l'intersection de p hyperplans de $\mathbb{R}^{n+p}$:

$$\ker(Df_{(a,b)}) = \bigcap_{j=1,\ldots,p} (\overrightarrow{grad} f_{j(a,b)})^{\perp}.$$

On en déduit que le n-plan affine $T_{(a,b)}$ a pour équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b).(X_1 - a_1) + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{n+p}}(a,b).(X_{n+p} - b_p) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a,b).(X_1 - a_1) + \ldots + \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{n+p}}(a,b).(X_{n+p} - b_p) = 0 \end{cases}$$

Maintenant, dire que $\mathcal{M}at(D_2 f_{(a,b)})$ est inversible, signifie que les p lignes de

$\mathcal{M}at(D_2f_{(a,b)})$ sont libres, ou encore que :

✓

$$\text{les projections de } \overrightarrow{grad}f_{j(a,b)} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \text{ sur } \mathbb{R}^p,\ (j = 1, \ldots, p),\ \text{forment une base de } \mathbb{R}^p. \tag{12}$$

Si $\ker(Df_{(a,b)}) = \bigcap_{j=1,\ldots,p} (\overrightarrow{grad}f_{j(a,b)})^\perp$ contenait une droite Δ de $\mathbb{R}^p$, chaque $\overrightarrow{grad}f_{j(a,b)}$ serait alors orthogonal à Δ, et ainsi les projections de $\overrightarrow{grad}f_{j(a,b)}$ sur $\mathbb{R}^p$ ne pourraient engendrer un vecteur de Δ, et ne donneraient pas une base de $\mathbb{R}^p$. On retrouve que la condition (9) : "$D_2f_{(a,b)}$ est inversible" implique que $\ker(Df_{(a,b)})$ ne contient aucune direction de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire aucune direction orthogonale à $\mathbb{R}^n$, ou encore que $T_{(a,b)} = (a,b) + \ker(Df_{(a,b)})$ est en regard de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

En tenant compte de (9) et de (10), nous pouvons énoncer la version suivante, en dimension finie, du théorème de la fonction implicite.

Théorème 5.5 (fonction implicite-version géométrique). — *Soient n et p deux entiers non nuls, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f = (f_1, \cdots, f_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p$. Si :*

- *f est une application $\mathcal{C}^k$, $k = 0, 1/2, 1, \cdots, \infty$,*
- *Il existe $(a,b) \in \Omega$ tel que $f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^p}$,*
- *Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i \in \{1, \cdots, p\}$, $j \in \{n+1, \cdots, n+p\}$, sont continues en (a,b),*
- *$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \ker(Df_{(a,b)}) \oplus (\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^p)$,*

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_1$ de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert $\mathcal{O}_2$ de b dans $\mathbb{R}^p$, et unique application $\varphi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ de classe k, telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2,\ f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff y = \varphi(x).$$

De plus, si $k > 0$, $D\varphi_{(x)} = -[D_2f_{(x,\varphi(x))}]^{-1} \circ D_1f_{(x,\varphi(x))}$. □

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par :

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, z + y^2 - 1).$$

On note $\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$. $\mathcal{H}$ est l'intersection des deux surfaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, données par :

$$\mathcal{H}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0_{\mathbb{R}}\},$$

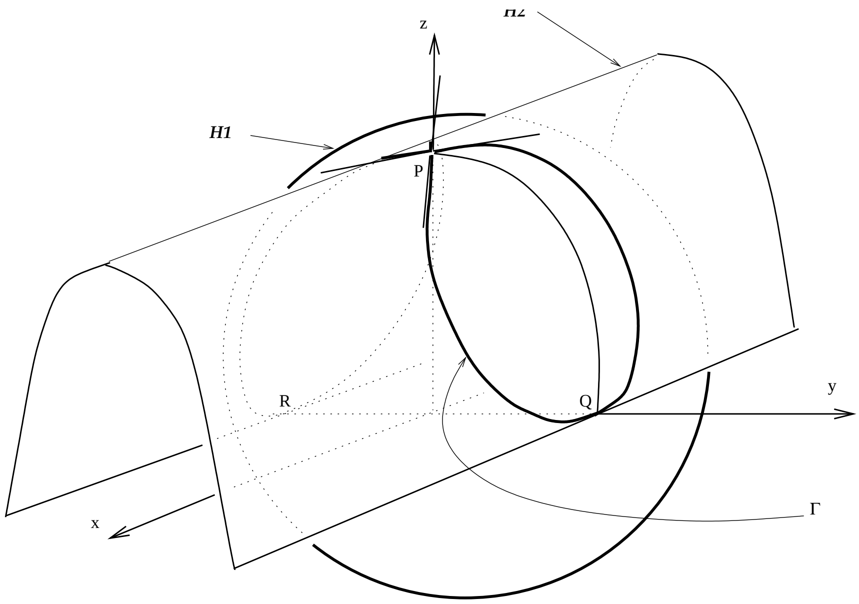
$$\mathcal{H}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; f_2(x,y,z) = z + y^2 - 1 = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Cherchons les points de $\mathcal{H}$ au voisinage desquels $\mathcal{H}$ est le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$, par exemple du type $y \mapsto (x,z)$. Voyons pour cela ce que donne le théorème de la fonction implicite appliquée à f dont la première variable est y et la seconde (x,z) (ie que f est vue comme étant définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$). Toutes les hypothèses du théorème de la fonction implicite sont satisfaites automatiquement ici, sauf celle portant sur le caractère bijectif de $D_2f_{(x,y,z)}$.

La matrice représentative de $D_2f_{(x,y,z)}$ est :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible dès que $x \neq 0$. Or $x = 0$ donne les points $P = (0, 0, 1)$, $Q(0, 1, 0)$, $R = (0, -1, 0)$ de $\mathcal{H}$. À l'exception peut-être de ces trois points, en tous les points de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ est donc localement le graphe d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $\varphi : y \mapsto (x(y), z(y))$.



Retrouvons ce résultat à l'aide de la caractérisation géométrique fournie par (9) et (10) (résumée dans le Théorème 5.5) de l'hypothèse "$D_2f()$ est inversible".

L'espace tangent à $\mathcal{H}$ en (x, y, z) est :

$$(x, y, z) + \ker(Df_{(x,y,z)}) = (x, y, z) + \{(h, k, l) \in \mathbb{R}^3; xh + yk + zl = 0 \text{ et } 2yk + l = 0\}.$$

Puisque $\dim(Oxz) = 2$, dire que $\ker(Df_{(x,y,z)})$ n'est pas un supplémentaire de Oxz dans $\mathbb{R}^3$, c'est dire que $\ker(Df_{(x,y,z)}) \cap Oxz$ contient un vecteur non nul ou que $\ker(Df_{(x,y,z)}) = 0$. Or cette condition dernière condition n'est satisfaite qu'en 0, qui n'est pas un point de $\mathcal{H}$.

Soit alors $(h, 0, l)$ non nul tel que $Df_{(x,y,z)}(h, 0, l) = (0, 0)$. On en déduit que $l = 0$ et $xh + zl = 0$. Or si $l = 0$, nécessairement $h \neq 0$, ce qui donne $x = 0$. On en conclut que les seuls points de $\mathcal{H}$ en lequel $\ker(Df_{(x,y,z)})$ n'est pas un supplémentaire de Oxz dans $\mathbb{R}^3$ sont P, Q, R. D'après (9) et (10) il s'agit des points en lesquels le théorème de la fonction implicite ne s'applique pas. Notons qu'en P, $\ker(Df_{(P)})$ est le plan Oxy, qui n'est pas supplémentaire de Oxz pour une simple rasion de dimension, alors qu'en Q et R, $\ker(Df_{(Q)}) = \ker(Df_{1(Q)}) \cap \ker(Df_{2(Q)}) = Ox$, qui pas supplémentaire de Oxz.

On a retrouvée ces points spéciaux grâce à (9) et (10), donnés par la condition "$D_2f(x, y, z)$ n'est pas inversible".

En ces points la figure ci-dessous montre que $\mathcal{H}$ ne peut pas être localement le graphe d'une application (cf le croisement en P, le rebroussement de $\mathcal{H}$ en Q et R le long de Oy).

5.5. Théorèmes d'inversion locale et d'inversion globale.

Le théorème de la fonction implicite permet, sous certaines hypothèses, de résoudre l'équation $g(x,y)=0$ en y, et de trouver une unique solution du type $y=\varphi(x)$, sur des voisinages de a et b, solution de $g(x,y)=0$. Une équation intéressante à résoudre est $g(x,y)=y-f(x)=0$. Si (a,b) est une solution de $y-f(x)=0$, i.e. si $b\in Im(f)$, trouver une unique solution $x=\varphi(y)$, définie sur un voisinage Ω_F de b dans F, c'est exactement dire que localement autour de b, tout point y admet un unique antécédent, ou encore que $f_{|\Omega_E}:\Omega_E\to\Omega_F$ est une bijection d'inverse $\varphi:\Omega_F\to\Omega_E$, pour un certain voisinage Ω_E de a dans E. Notons que l'existence de φ prouve aussi que b est un point intérieur de $Im(f)$. On énonce :

Théorème 5.6. (Théorème de l'inversion locale) — *Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ (bien sûr si F est de dimension finie, F est de Banach), et $f:\Omega\to F$, où Ω est un ouvert de E.*

Rappelons que l'on dit que f est $\mathcal{C}^{1/2}$ ssi f est différentiable. Si :

- f est une application $\mathcal{C}^k$, $k=1/2,1,\dots,\infty$,
- $f(a)=b\in Im(f)$ est tel que $Df_{(a)}$ est une application linéaire inversible de $\mathcal{L}(E;F)$, (E est alors comme F un espace de Banach),
- $x\mapsto Df_{(x)}$ est continue en a (ce qui est automatique si $k\geq 1$),

Alors il existe un voisinage ouvert Ω_F de b dans F, un voisinage ouvert Ω_E de a dans E,tels que $f:\Omega_E\to\Omega_F$ établisse un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme entre Ω_E et Ω_F. $\square$

Exemple. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(y\sin(x),yx^2)$. f est $\mathcal{C}^\infty$ et on a :

$$Jac(f)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} y\cos(x) & \sin(x)\\ 2xy & x^2\end{pmatrix}$$

Donc $\det(Jac(f)_{(x,y)})=yx(x\cos(x)-\sin(x))$. Dès que $y\neq 0, x\neq 0$ et $x\cos(x)\neq\sin(x)$, $Df_{(x,y)}$ est inversible, et f détermine un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de (x,y) sur un voisinage de $(y\sin(x),yx^2)$.

Exercice (partiel du 29 novembre 2001). *Soit $E=\mathcal{C}^1_0([0;1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, dérivables sur $[0;1]$, à dérivée continue sur $[0;1]$ et telles que $f(0)=0$. On note pour tout $f\in E$, $||f||_E=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|+\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.*

Soit $F=\mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, continues sur $[0;1]$. On note pour tout $g\in F$, $||g||_F=\sup\limits_{x\in[0,1]}|g(x)|$.

On admettra que $(E,||\ ||_E)$ et $(F,||\ ||_F)$ sont deux espaces de Banach.

1. $-$*Soit $\Phi:E\to F$ l'application définie par $\Phi(f)=f'^2+f$. Montrer que Φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D\Phi_{(f)}(h)$, pour tout $f,h\in E$.*

2 . $-$*Soit $\Omega=\{f\in E; f'(t)\neq 0,\ \forall t\in[0;1]\}$. Montrer que Ω est un ouvert de E.*

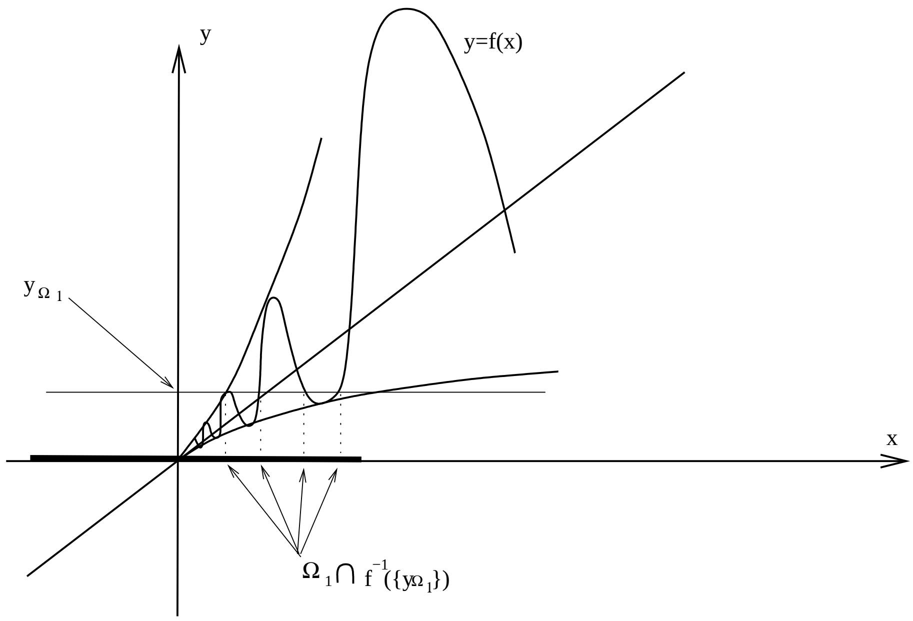
3 . $-$ **3.a.** *Montrer que quel que soit $f\in\Omega$, $D\Phi_{(f)}:E\to F$ est bijective.*
3.b. *Montrer que $D\Phi_{(f)}\in\mathcal{I}som(E;F)$, en utilisant sans preuve le théorème suivant:*
Théorème 2: *Si E et F sont deux espaces de Banach, et si $u\in\mathcal{L}(E;F)$ est bijective, alors $u^{-1}\in\mathcal{L}(F;E)$.*

4 . $-$*Soit $f_0\in\Omega$ et $g_0=\Phi(f_0)=f_0'^2+f_0\in F$. Montrer, grâce au theéorème d'inversion locale, qu'existent Ω_{g_0} un voisinage ouvert de g_0 dans F et Ω_{f_0} un voisinage ouvert de f_0 dans E, tels que pour tout $g\in\Omega_{g_0}$ l'équation différentielle $\mathcal{E}_g$: $f'^2+f=g$ admette une unique solution $f\in\Omega_{f_0}$.*

Remarque. Dans le cas où $E=F=\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est différentiable en a ssi f est dérivable, et alors $Df_{(a)}(h)=h.f'(a)$. Dire que $Df_{(a)}$ est inversible revient ainsi à dire que $f'(a)\neq 0$. On retrouve le théorème bien connu d'inversion des fonctions réelles : si $f'(a)$ est non nul et si f est $\mathcal{C}^1$, alors $f'(x)\neq 0$ pour x dans un voisinage de a et f est alors strictement monotone (strictement croissante ou décroissante), donc localement autour de a, f est inversible et de plus $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.

✓ **Importance de l'hypothèse** "$x \mapsto Df_{(x)}$ **est continue en** a". Cette hypothèse est essentielle dans le théorème de l'inversion locale, comme le montre l'exemple ci-dessous. D'autre part, comme les théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite sont équivalents, l'hypothèse $(x, y) \mapsto D_2 f_{(x,y)}$ est continue en (a, b) du théorème de la fonction implicite est également essentielle.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = y = x + x^2 \sin(1/x)$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dérivable en 0, et $Df_{(0)} : h \mapsto Df_{(0)}(h) = f'(0).h = h$ est inversible (c'est l'identité !), mais $x \mapsto f'(x)$ n'est pas continue en 0. Il n'existe aucun voisinage Ω_1, Ω_2 de 0 dans $\mathbb{R}$, tel que f établisse une bijection de Ω_1 sur Ω_2. En effet quel que soit le voisinage Ω_1 de 0, il existe y_{Ω_1} aussi proche de 0 que l'on veut tel que $f^{-1}(\{y_{\Omega_1}\}) \cap \Omega_1$ soit un ensemble de plus de deux points (en x_k, $k \in \mathbb{N}$ et $x_k \to 0$, la dérivée de f s'annule et change de signe), f n'est donc pas injective sur Ω_1.



Exercice 43. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = x + x^k \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f_k(0) = 0$.*

Montrer que f_k est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $k \geq 3$. En déduire que le graphe de f est localement en 0 le graphe d'une application $\mathcal{C}^1$, $y \mapsto g(y) = x$.

Montrer que f_2 possède une dérivée qui s'annule et change de signe infiniment au voisinage de 0 (ind. étudier le signe de $\varphi(u) = -\sin(u) + 2/u^2 \sin(u) - 2/u \cos(u)$, lorsque u est grand. Pour cela tracer les graphes de $tan(u)$ et de $2u/(2 - u^2)$. En déduire que φ s'annule en des points $u_k = 2k\pi - \epsilon_k$, avec $\epsilon_k \to 0$ quand $k \to +\infty$. Montrer enfin que $1 - [\cos(u_k) - 2/u_k \sin(u_k)] < 0$.)

Théorème 5.7. (Théorème de l'inversion globale) — *Soient E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ (bien sûr si F est de dimension finie, F est de Banach), et $f : \Omega \to F$, où Ω est un ouvert de E. Rappelons que l'on dit que f est $\mathcal{C}^{1/2}$ ssi f est différentiable. Si :*

- *f est une application $\mathcal{C}^k$, $k = 1/2, 1, \ldots, \infty$,*
- *$\forall x \in \Omega$, $Df_{(x)}$ est une application linéaire inversible de $\mathcal{L}(E; F)$, (E est alors comme F un espace de*

Banach),

- $x \mapsto Df_{(x)}$ *est continue sur* Ω *(ce qui est automatique si* $k \geq 1$*),*

Alors $Im(f)$ *est un ouvert de* F*, et si de plus* f *est injective* $f : \Omega \to Im(f)$ *établit un* $\mathcal{C}^k$ *difféomorphisme entre* Ω *et* $Im(f)$*.*

Preuve. Les hypothèses impliquent par le théorème d'inversion locale, que localement, en tout point de $x \in \Omega$, f est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme et que $f(x)$ est un point intérieur de $Im(f)$. On en déduit que $Im(f)$ est un ouvert de F. Si de plus f est injective, $f : \Omega \to Im(f)$ est une bijection et son inverse est de classe $\mathcal{C}^k$, par ce qui précède, autrement dit f est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme. $\square$

Exemple. - Soit $\varphi :]0; +\infty[\times]0; 2\pi[\ni (\rho, \theta) = \varphi(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$. φ est $\mathcal{C}^\infty$ car ses composantes admettent toutes leurs dérivées partielles à tous les ordres en tous les points de $]0; +\infty[\times]0; 2\pi[$. φ est une injection et de plus $det(Jac(\varphi_{(\rho,\theta)})) = \rho > 0$, donc par le théorème d'inversion globale, φ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme.

Remarque. L'hypothèse "f est injective" est essentielle dans le théorème d'inversion globale. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dénie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, f est l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Bien sur f n'est pas injective ($f(-1) = f(1)$) et donc f n'est pas un difféomorphisme. En revanche, quel que soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Df_{(z)} : h \mapsto f'(z).h = 2z.h$ est bien inversible.

5.6. La dimension finie : des preuves sans théorème du point fixe.

Nous avons démontré le théorème du point fixe, puis le théorème de la fonction implicite et enfin le théorème d'inversion locale, dans le cadre très général des espaces de Banach.

Nous allons maintenant donner, **en dimension finie**, une preuve du théorème d'inversion locale, sans utiliser le théorème du point fixe. Le théorème de la fonction implicite se déduisant aisément du théorème d'inversion locale, il s'ensuit que ces deux théorèmes, en dimension finie, ne nécessitent pas le théorème du point fixe. Leur preuve en est assez notablement simplifiée.

✓ Cependant les hypothèses que nous prenons ici sont un peu plus fortes que celles du cas général (Théorème 5.6): nous allons supposer que f est $\mathcal{C}^1$ sur son ouvert de définition, et non plus seulement différentiable à différentielle continue en a. La raison en est l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral.

Soit n un entier, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$. On suppose qu'en $a \in \Omega$, $Df_{(a)}$ est une application inversible. Nous allons alors montrer qu'existent Ω_1, Ω_2 deux voisinages ouverts resp. de a et $b = f(a)$, tels que $f_{|\Omega_1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Preuve sans point fixe du théorème de l'inversion locale. Commençons par remarquer que, f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a ssi $h : x \mapsto [Df_{(a)}]^{-1}(f(a + x) - f(a))$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en 0. On peut donc supposer que $a = f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et que $Df_{(a)} = Id_{\mathbb{R}^n}$, comme c'est le cas pour h.

Par continuité de $x \mapsto Df_{(x)}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(0_{\mathbb{R}^n}, \epsilon) \subset \Omega$ et $\|x\| \leq \epsilon$ implique $\|Df_{(x)} - Df_{(0)}\| \leq 1/2$. Soient alors $x, y \in B(0_{\mathbb{R}^n}, \epsilon)$. Puisque $x \mapsto Df_{(x)}$ est continue sur $B(0_{\mathbb{R}^n}, \epsilon)$, on a, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(y) - f(x) = \int_{[0,1]} Df_{(x+t(y-x))}(y - x). \qquad (*)$$

On en déduit, si $f(x) = f(y)$:

$$0 = \|(y - x) + \int_{[0,1]} [Df_{(x+t(y-x))} - Df_{(0)}](y - x).\| \geq \|y - x\| - \int_{[0,1]} \|Df_{(x+t(y-x))} - Df_{(0)}](y - x)\|$$

$$\geq \|y - x\| - \int_{[0,1]} \|Df_{(x+t(y-x))} - Df_{(0)}\|.\|(y - x)\| \geq 1/2\|y - x\|.$$

On en conclut que $\forall x, y \in B(0,\epsilon)$, $\quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$, ie que f est injective sur $B(0,\epsilon)$.

Notons que $(*)$ signifie que l'application réciproque de $f_{|B_{(0,\epsilon)}} : B_{(0,\epsilon)} \to f(B_{(0,\epsilon)})$, $g : f(B_{(0,\epsilon)}) \to B_{(0,\epsilon)}$ est 1/2 lipschitzienne, donc continue. Cependant cela ne garantit pas que $f(B_{(0,\epsilon)})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais seulement que $f(B_{(0,\epsilon)}) = g^{-1}(B_{(0,\epsilon)})$ est un ouvert de $f(B_{(0,\epsilon)})$ (pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$) !

Montrons alors que l'image par f de $B_{(0,\epsilon/2)}$ contient la boule $B_{(0,r)}$, dès que $0 < r < \epsilon/8$.

Soit $z \in B_{(0,r)}$. La boule $\bar{B}_{(0,\epsilon/2)}$ étant compacte, la fonction continue $\bar{B}_{(0,\epsilon/2)} \ni x \mapsto \|f(x) - z\|$ atteint sa borne inférieure en $x_0 \in \bar{B}_{(0,\epsilon/2)}$. Montrons que $x_0 \in B_{(0,\epsilon/2)}$. En effet, si $\|x_0\| = \epsilon/2$ le caractère 1/2-lipschitzien de f^{-1} donne :

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \geq 1/2\|x - 0\| = \epsilon/4 > 2r.$$

On en déduit que :

$$\|f(x) - z\| \geq \|f(x)\| - \|z\| > 2r - r > \|z\| = \|f(0) - z\| \geq \|f(x_0) - z\|,$$

ce qui est contradictoire.

Montrons enfin que $f(x_0) = z$. La fonction $B(0,\epsilon/2) \ni x \mapsto (f(x) - z|f(x) - z)$ étant minimale en $x_0 \in B(0,\epsilon/2)$ sa différentielle est nulle en x_0. Or celle-ci est $Df_{(x_0)}(f(x_0) - z)$. Notons que par la Proposition 3.2, $Df_{(x_0)}$ est inversible, puisque $\|Df_{(x_0)} - Df_{(0)}\| = 1/2 < 1$. Par conséquent $Df_{(x_0)}(f(x_0) - z) = 0$ implique $f(x_0) = z$.

$\Omega_1 = f^{-1}(B(0,r))$ est alors un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et comme $\Omega_1 \subset B(0,\epsilon)$, f est injective sur Ω_1. Notons $\Omega_2 = B(0,r)$, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est alors une bijection.

Il reste à prouver que f^{-1} est différentiable sur $B(0,r)$ (le Théorème 3.5 assurera alors que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme).

Soit $z \in B(0,r)$ et $k \in \mathbb{R}^n$ tel que $z + k \in B(0,r)$. On note $f(x) = z, f(x+h) = z + k$. On a :

$$\|f^{-1}(z+k) - f^{-1}(z) - [Df_{(x)}]^{-1}(k)\| = \|h - [Df_{(x)}]^{-1}[Df_{(x)}(h) + \|h\|p(h)]\|\|h\|.\|p(h)\|.$$

avec $p(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Or f^{-1} étant 1/2 lipschitzienne sur $B(0,r)$, $\|f^{-1}(z+k) - f^{-1}(z)\| = \|h\| \leq 1/2\|k\|$. On en déduit que :

$$\|f^{-1}(z+k) - f^{-1}(z) - [Df_{(x)}]^{-1}(k)\| \leq 1/2\|k\|.\|p(h)\|.$$

Mais lorsque $k \to 0$, $h = f^{-1}(z+k) - f^{-1}(z) \to 0$ par continuité de f^{-1}, et donc $k \to 0 \Longrightarrow p(h) \to 0$, ce qui prouve que f^{-1} est différentiable, en z de différentielle $[Df_{(f^{-1}(x))}]^{-1}$.

Exercices du chapitre 5

Exercice 42. (Sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^3$) *On considère dans $\mathbb{R}^3$ la surface Σ donnée sous la forme implicite : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x,y,z) = 0\}$, avec $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3$.*

i- *Représenter dans $\mathbb{R}^3$ l'intersection $\Sigma \cap \Pi_z$, où Π_z est le plan d'équation $z = cte$, puis $\Sigma \cap \Pi_\theta$, où Π_θ est le plan d'équation $y = \tan(\theta)x$. Représenter enfin Σ.*

ii- *Existe-t-il un voisinage de $(0,0,0)$ dans Σ qui soit le graphe d'une application φ_i, avec :*

$$\varphi_1 : \Omega_{x,y} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2 : \Omega_{x,z} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_3 : \Omega_{y,z} \to \mathbb{R},$$

où $\Omega_{x,y}$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, identifié avec $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$, $\Omega_{x,z}$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, identifié avec $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3\}$, $\Omega_{y,z}$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, identifié avec $\{0\} \times \mathbb{R}^2 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$?
Si tel est le cas, quelle est la régularité de φ_i ?

iii- *Rappelons que dans un espace de Hilbert* $(E, (\ |\ ))$ *, pour toute forme linéaire continue* $U : E \to \mathbb{R}$*, il existe un unique vecteur* $\vec{u} \in E$ *tel que :*

$$\forall \vec{h} \in E,\ U(\vec{h}) = (\vec{u}|\vec{h}).$$

Si $(\ |\ )$ *désigne le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^3$*, trouver l'unique vecteur de* $\mathbb{R}^3$*, noté* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(a)}$ *tel que :*

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^3,\ Df_{(a)}(\vec{h}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(a)}|\vec{h}).$$

iv- *Soit* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$*, où* I *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0*, un arc dérivable, tel que* $\gamma(0) = a$*,* $\gamma'(0) \neq (0, 0, 0)$ *et* $\gamma(I) \subset \Sigma$*. Montrer que* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(a)} \perp \gamma'(0)$*.*

v-

Soit $a \in \Sigma \setminus \{0\}$*. Montrer que dans un voisinage de* a*,* Σ *est le graphe d'applications* $\mathcal{C}^\infty$ *du type* φ_1*, et/ou* φ_2*, et/ou* φ_3*. On définit alors l'espace tangent de* Σ *en* a*, que l'on note* $T_a\Sigma$*, par :*

$$T_a\Sigma = a + \textit{Graphe de } D\varphi_{i(\alpha)},\ \textit{pour un } i \textit{ dans } \{1, 2, 3\} \textit{ et pour } \alpha \in \mathbb{R}^2 \textit{ tel que } \varphi_i(\alpha) = (\alpha, a).$$

Montrer que cette définition ne dépend pas du choix de $i \in \{1, 2, 3\}$*, en montrant que* $T_a\Sigma$ *est le sous-espace affine de* $\mathbb{R}^3$ *qui passe par* a *et qui est dirigé par les vecteurs du type* $\gamma'(0)$*.*

Déterminer l'équation de $T_a\Sigma$*, le plan tangent de* Σ *en* a*, de deux façons différentes : grâce à* $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(a)}$*, puis grâce aux dérivées partielles de* φ_i*.*

vi- *On note* π_x *et* π_y *les projections de* $\mathbb{R}^3$ *de noyaux respectifs* $\mathbb{R}_x$ *et* $\mathbb{R}_y$ *:*

$$\pi_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_{y,z} \\ (x, y, z) & \mapsto & (0, y, z) \end{array} \qquad \pi_y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_{x,z} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, 0, z) \end{array}$$

Soit $C^\Sigma_{\pi_x}$ *(resp.* $C^\Sigma_{\pi_y}$*) le "lieu critique" dans* Σ *de* π_x *(resp.* π_y*), c'est-à-dire l'ensemble des points* a *de* Σ *tels que* $\dim(\pi_x(T_a\Sigma)) < 2$ *(resp.* $\dim(\pi_y(T_a\Sigma)) < 2$*).*

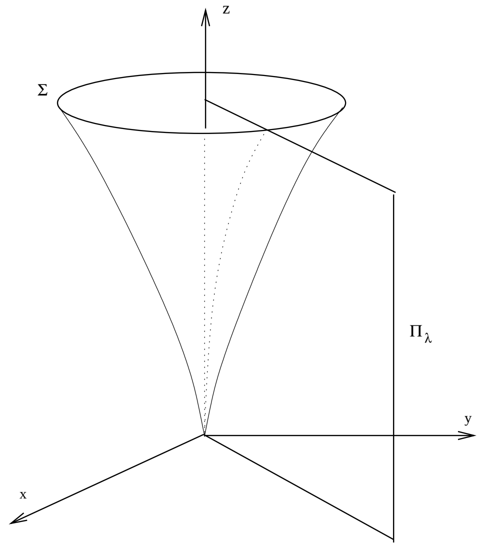
Déterminer $C^\Sigma_{\pi_x}$ *et* $C^\Sigma_{\pi_y}$*, ainsi que* $\pi_x(C^\Sigma_{\pi_x})$ *et* $\pi_y(C^\Sigma_{\pi_y})$*.*

Au voisinage de points de $C^\Sigma_{\pi_x}$ *(resp.* $C^\Sigma_{\pi_y}$*),* Σ *est-elle le graphe d'une application du type* φ_3 *(resp.* φ_2*) ? Si non, expliquer pourquoi le théorème des fonctions implicites est mis en défaut.*

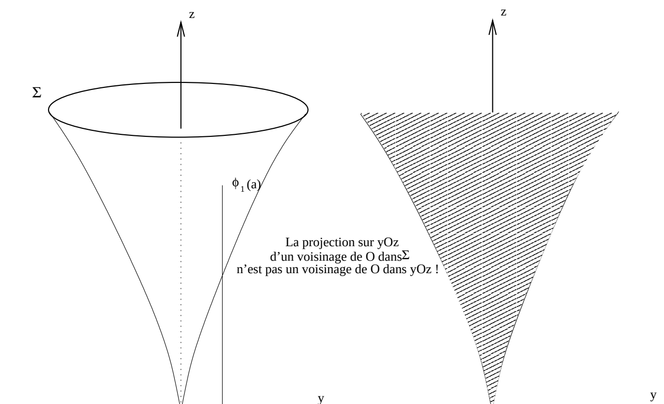
Corrigés des exercices du chapitre 5

Exercice 42. Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = 0$, où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3$.

i- Soit $z_0 \in \mathbb{R}$, si $z_0 < 0$, $\Pi_{z_0} \cap \Sigma = \emptyset$, si $z_0 \geq 0$, $(x, y, z_0) \in \Pi_{z_0} \cap \Sigma$ ssi $x^2 + y^2 = z_0^3$; il s'agit d'un cercle de centre $(0, 0, z_0)$ et de rayon $z_0^{3/2}$. Si Π_λ est le plan d'équation $y = \lambda x$, $\Sigma \cap \Pi_\lambda = \{(x, y, z); z = (1 + \lambda^2)^{2/3} x^{2/3}\}$, il s'agit d'une branche parabolique dans le plan Π_λ.



ii- Au-dessus d'un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (et même au-dessus de $\mathbb{R}^2$ tout entier), Σ est le graphe de $(x,y) \mapsto z = (x^2+y^2)^{1/3}$, qui n'est pas différentiable en $(0,0)$, et qui est du type φ_1. En revanche $\mathcal{V} \cap \Sigma$ n'est pas le graphe d'une application du type φ_2 ou φ_3, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet si tel était le cas, la projection de $\mathcal{V} \cap \Sigma$ sur l'espace des coordonnées serait un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, ce qui n'est jamais le cas ici, quel que soit$\mathcal{V}$.

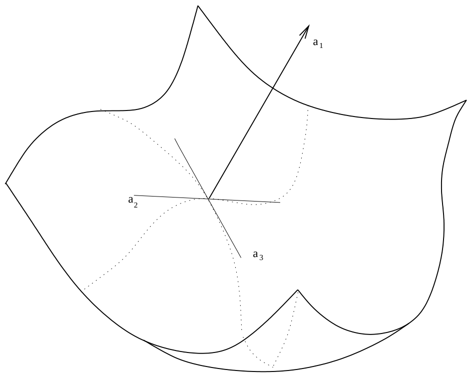


iii- Soit $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \mathcal{B}$ une base *orthonormée* de $\mathbb{R}^3$, on a alors, en notant $\vec{h} = \sum_{j=1}^{3} h_j \vec{b}_j$: $Df_{(a)}(\vec{h}) = \sum_{j=1}^{3} h_j Df_{(a)}(\vec{b}_j) = \sum_{j=1}^{3} h_j D_{\vec{b}_j} f_{(a)} = \sum_{j=1}^{3} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, en notant:

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ la j^{eme} dérivée partielle de f en a relativement à la base $\mathcal{B}$. De sorte que, $\mathcal{B}$ étant orthonormée: $Df_{(a)}(\vec{h}) = \left((\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a)) \mid \vec{h} \right)$. L'unique vecteur $\overrightarrow{grad} f_{(a)}$ tel que pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$, $Df_{(a)}(\vec{h}) =$

$(\overrightarrow{grad}f_{(a)}|\vec{h})$ est donc (dans la base $\mathcal{B}$): $\overrightarrow{grad}f_{(a)} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \frac{\partial f}{\partial x_3}(a))$.

iv- Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ dérivable en $0 \in I$, avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(t) \in \Sigma$ pour tout $s \in I$. On a alors $f(\gamma(t)) = 0$, pour tout $t \in I$ et $I \ni t \to (f \circ \gamma)(t)$ étant constante, sa dérivée est nulle. On en déduit que $(f \circ \gamma)'_{(t=0)} = D(f \circ \gamma)_{(0)}(1_{\mathbb{R}}) = Df_{(a)}[D\gamma_{(0)}(1_{\mathbb{R}})] = Df_{(a)}(\gamma'(0)) = (\overrightarrow{grad}f_{(a)}|\gamma'(0)) = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{grad}f_{(a)} \perp \gamma'(0)$.



v- Soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in \Sigma \setminus \{0\}$.

v.a-Considérons:

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & ((x,y),z) & \to & f_1((x,y),z) = f(x,y,z). \end{array}$$

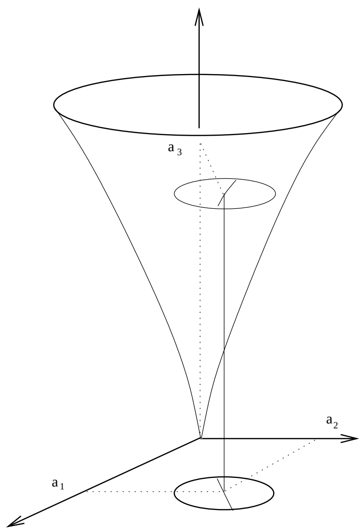
C'est-à-dire que la première variable de f_1 est $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et la seconde est z. f étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et $f_1 = f \circ \phi$, avec ϕ l'application linéaire (et donc $\mathcal{C}^\infty$) suivante: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni ((x,y),z) \to \phi((x,y),z) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, f_1 est $\mathcal{C}^\infty$ et admet une différentielle partielle $D_2f_{1(a)}$ suivant sa seconde variable, en tout point $a \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$. Or celle-ci est obtenue en fixant (x,y) égal à (a_1,a_2) et en différentiant la fonction $z \to f_1((a_1,a_2),z)$ au point $z = a_3$, de sorte que: $D_2f_{1(a)}(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a).h = -(3a_3^2).h$, pour tout $h \in \mathbb{R}$. L'application linéaire $\mathbb{R} \ni h \to D_2f_{1(a)}(h) \in \mathbb{R}$ est donc inversible ssi $3a_3^2 \neq 0$ (et son inverse est alors $\mathbb{R} \ni h \to \frac{-1}{3a_3^2}.h \in \mathbb{R}$). Regardons à quelle condition $a \in \Sigma$ implique $a_3^2 \neq 0$. Si à la fois $a_1^2 + a_2^2 - a_3^3 = 0$ et $a_3^2 = 0$, on obtient: $a_1^2 + a_2^2 = 0$, et donc $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Autrement dit, dès que $a \neq 0$, $D_2f_{(a)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$. De plus $D_2f_{1(a)} = 3a_3^2.Id_{\mathbb{R}}$ et donc $D_2f_1 = \Psi \circ \frac{\partial f}{\partial z}$, où $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ définie par $\Psi(\lambda) = \lambda Id_{\mathbb{R}}$. Ψ est linéaire, entre deux espaces vectoriels de dimension finie, Ψ est par conséquent $\mathcal{C}^\infty$, comme $a \to \frac{\partial f}{\partial z}(a)$, et ainsi D_2f_1 est $\mathcal{C}^\infty$, donc continue.

- f_1 est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$,
- $f_1((a_1,a_2),a_3) = 0$,
- $D_2f_{1(a)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$,
- et $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ni b \to D_2f_1(b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est continue en a,

par le **théorème de la fonction implicite**, il existe une application $\mathcal{C}^\infty$, $\phi_1 : \Omega_{(a_1,a_2)} \to \mathcal{U}_{a_3}$ définie sur un voisinage ouvert $\Omega_{(a_1,a_2)}$ de (a_1,a_2) dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}_{a_3}$ étant un voisinage ouvert de a_2 dans $\mathbb{R}$, telle que, autour de a dans $\Omega_{(a_1,a_2)} \times \mathcal{U}_{a_3}$, Σ est le graphe de ϕ_1:

$$\Sigma \cap \left(\Omega_{(a_1,a_2)} \times \mathcal{U}_{a_3}\right) = \{(x,y,z); (x,y) \in \Omega_{(a_1,a_2)} \text{ et } z = \phi_1(x,y) \in \mathcal{U}_{a_3}\}.$$

On pouvait aussi remarquer que $(x,y,z) \in \Sigma$ ssi $z = (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$, ce qui donne ϕ_1. Notons que $(x,y) \to (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais non différentiable en $(0,0)$, le point en lequel le théorème de la fonction implicite est mis en défaut.



v.b- Considérons:

$$f_2 : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ ((x,z),y) & \to & f_2((x,z),y) = f(x,y,z). \end{array}$$

L'étude du **v.a**, que l'on pourrait reprendre point par point, montre que $D_2 f_{2(a)} : \mathbb{R} \ni h \to D_2 f_{2(a)}(h) = 2a_2.h \in \mathbb{R}$, et donc que pour tout $a \in \Sigma$, $D_2 f_{2(a)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ssi $a_1^2 \neq a_3^3$. Dès que $a \notin \{(a_1,a_2,a_3) \in \Sigma; a_1^2 = a_3^3 \text{ et } a_2 = 0\}$, on a l'existence, par le **théorème de la fonction implicite**, d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $\phi_2 : \Omega_{(a_1,a_3)} \to \mathcal{U}_{a_2}$ définie sur un voisinage ouvert $\Omega_{(a_1,a_3)}$ de (a_1,a_3) dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}_{a_2}$ étant un voisinage ouvert de a_32 dans $\mathbb{R}$, telle que, autour de a dans $\Omega_{(a_1,a_3)} \times \mathcal{U}_{a_2}$, Σ est le graphe de ϕ_2:

$$\Sigma \cap \left(\Omega_{(a_1,a_3)} \times \mathcal{U}_{a_2}\right) = \{(x,y,z); (x,y) \in \Omega_{(a_1,a_3)} \text{ et } y = \phi_2(x,z) \in \mathcal{U}_{a_2}\}.$$

On pouvait aussi remarquer que $(x,y,z) \in \Sigma$ ssi $y = \pm\sqrt{z^3 - x^2}$, ce qui donne ϕ_2. Notons que $(x,z) \to \pm\sqrt{z^3 - x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais non différentiable en tout point (a_1,a_3) tel que $a_1^2 = a_3^3$.

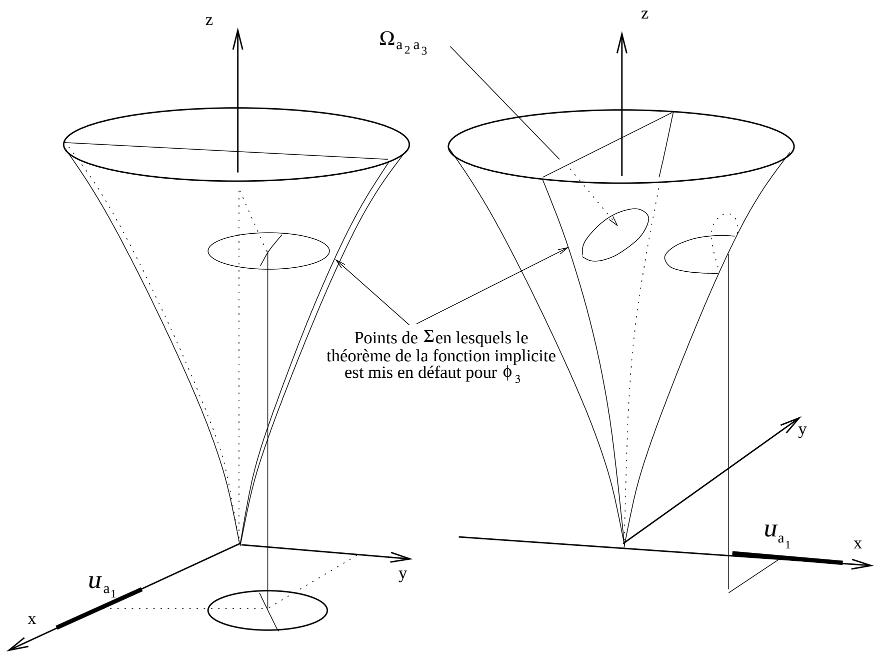
v.c- Considérons:

$$f_3 : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ ((y,z),x) & \to & f_3((y,z),x) = f(x,y,z). \end{array}$$

L'étude du **v.a**, que l'on pourrait reprendre point par point, montre que $D_2 f_{3(a)} : \mathbb{R} \ni h \to D_2 f_{3(a)}(h) = 2a_1.h \in \mathbb{R}$, et donc que pour tout $a \in \Sigma$, $D_2 f_{3(a)} \in \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ssi $a_2^2 \neq a_3^3$. Dès que $a \notin \{(a_1,a_2,a_3) \in \Sigma; a_2^2 = a_3^3 \text{ et } a_1 = 0\}$, on a l'existence, par le **théorème de la fonction implicite**, d'une application $\mathcal{C}^\infty$, $\phi_3 : \Omega_{(a_2,a_3)} \to \mathcal{U}_{a_1}$ définie sur un voisinage ouvert $\Omega_{(a_2,a_3)}$ de (a_2,a_3) dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}_{a_1}$ étant un voisinage ouvert de a_1 dans $\mathbb{R}$, telle que, autour de a dans $\Omega_{(a_2,a_3)} \times \mathcal{U}_{a_1}$, Σ est le graphe de ϕ_3:

$$\Sigma \cap \left(\Omega_{(a_2,a_3)} \times \mathcal{U}_{a_1}\right) = \{(x,y,z); (y,z) \in \Omega_{(a_2,a_3)} \text{ et } x = \phi_3(y,z) \in \mathcal{U}_{a_1}\}.$$

On pouvait aussi remarquer que $(x,y,z) \in \Sigma$ ssi $x = \pm\sqrt{z^3 - y^2}$, ce qui donne ϕ_3. Notons que $(y,z) \to \pm\sqrt{z^3 - y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, mais non différentiable en tout point (a_2,a_3) tel que $a_2^2 = a_3^3$.



Remarque: Au voisinage de tout point $a \in \Sigma \setminus \{0\}$, Σ est le graphe d'une application ϕ_i, pour au moins un indice $i \in \{1,2,3\}$, car le seul point $a \in \Sigma$ qui

appartienne à tous les ensembles "interdits", mis en évidence par **v.a, v.b, v.c** est $a = (0,0,0)$.

Soit maintenant $a \in \Sigma \setminus \{0\}$, et $i \in \{1,2,3\}$ tel qu'au voisinage de a, Σ soit le graphe de ϕ_i. Notons $\alpha_i \in \mathbb{R}^2$ tel que $\phi(\alpha_i) = (\alpha_i, a)$. On définit: $T_a\Sigma = a+$Graphe de $D\phi_{i(\alpha_i)}$. **Cette définition dépend a priori de** ϕ_i. Si par exemple $i = 1$, le Graphe de $D\phi_i(\alpha_i)$ est $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = D\phi_{1(a_1,a_2)}(x,y) = x\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(a_1,a_2) + y\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(a_1,a_2)\}$. Il s'agit du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(a_1,a_2))$ et $(0,1,\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(a_1,a_2))$. Ces deux vecteurs étant indépendants, $T_a\Sigma$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par a et de dimension 2. Le théorème de la fonction implicite donne de plus $D\phi_{1(a_1,a_2)} = -[D_2 f_{1(a)}]^{-1} \circ D_1 f_{1(a)}$, et donc $D\phi_{1(a_1,a_2)}(h,k) = -[3a_3^2]^{-1}(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a).h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a).k) = -[3a_3^2]^{-1}(2a_1.h + 2a_2.k)$. On a donc: $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(a) = \frac{2a_1}{-3a_3^2}$ et $\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(a) = \frac{2a_2}{-3a_3^2}$, et donc le graphe de $D\phi_{1(a)}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,\frac{2a_1}{-3a_3^2})$ et $(1,0,\frac{2a_2}{-3a_3^2})$.

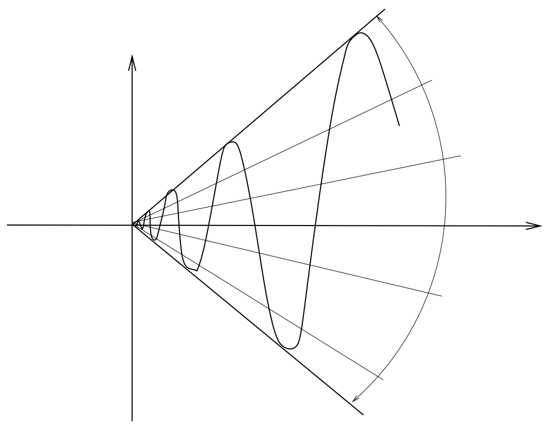
Les mêmes remarques conduisent, lorque $i = 2$ à montrer que le graphe de $D\phi_{2(a)}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,\frac{2a_1}{-2a_2},0)$ et $(0,\frac{3a_3^2}{2a_2},1)$. Un calcul rapide montre alors que le graphe de $D\phi_{1(a)}$ est celui de $D\phi_{2(a)}$ (et aussi celui de $D\phi_{3(a)}$...). C'est-à-dire que **la définition de $T_a\Sigma$ ne dépend pas de i. En revanche cette définition dépend encore a priori de l'application ϕ qui paramètre localement autour de a la surface Σ.** Nous allons montrer qu'il n'en est rien, en donnant une définition **intrinsèque de $T_a\Sigma$.**

Soit $v \in$ Graphe de $D\phi_{1(a_1,a_2)}$ (prenons $i = 1$, par exemple), i.e. $v = (u, D\phi_{1(a_1,a_2)}(u))$, pour $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\gamma(t) = (t.u_1, t.u_2, \phi_1(a_1 + t.u_1, a_2 + t.u_2)) \in \Sigma$, dès que t est suffisamment petit, $(a_1 + t.u_1, a_2 + t.u_2) \in \Omega_{(a_1,a_2)}$ et $\gamma'(0) = (u_1,u_2,D\phi_{1(a_1,a_2)}(u)) = v$.

Réciproquement, si γ est une courbe dérivable de $\mathbb{R}^3$ contenue dans Σ telle que $\gamma(0) = a$, alors $\mu = \pi_z \circ \gamma$

est une courbe dérivable de $\mathbb{R}^2$, telle que $\mu(0) = (a_1, a_2)$, et si Γ est la courbe $t \to (\mu(t), \phi_1(\mu(t)))$, alors $\Gamma = \gamma$ (puisque localement en a, Σ est le graphe de ϕ_1) et $\gamma'(0) = \Gamma'(0) = (\mu'(t), D\phi_{1(a_1,a_2)}(\mu'(0))) \in$ Graphe de $D\phi_{1(a_1,a_2)}$. On a donc prouvé que a+Graphe de $D\phi_{1(a_1,a_2)}$ est $a + \{\gamma'(0); \gamma : I \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ dérivable telle que $\gamma(0) = a$ }. **cette définition ne dépend pas du paramétrage de Σ.**

Le plan tangent apparait donc comme le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ contenant toutes les directions limites de sécantes en a à des courbes dérivables de $\mathbb{R}^3$ tracées sur Σ. C'est un résultat remarquable que cet ensemble soit précisément un espace affine de dimension 2 (et non un ensemble plus "gros" ou plus compliqué; pensez, par exemple, à l'ensemble des directions limites des sécantes en $(0,0)$ au graphe de $t \to t.\sin(1/t)$, qui n'est pas dérivable. Cet ensemble est celui des droites passant par $(0,0)$ et comprises entre les deux bissectrices. Alors que l'ensemble des directions limites de sécantes en $(0,0)$ au graphe de $t \to t^2.\sin(1/t)$, qui est dérivable, est bien une droite: l'axe des x.)



Ce résultat de nature dimensionnelle traduit le fait géométrique suivant (cf l'introduction): la différentiabilité de Φ_1 en (a_1, a_2) signifie que le graphe de Φ_1, au voisinage de a, c'est-à-dire tout un voisinage de a dans Σ, s'aplatit sur

le graphe de $D\Phi_{1(a)}$.

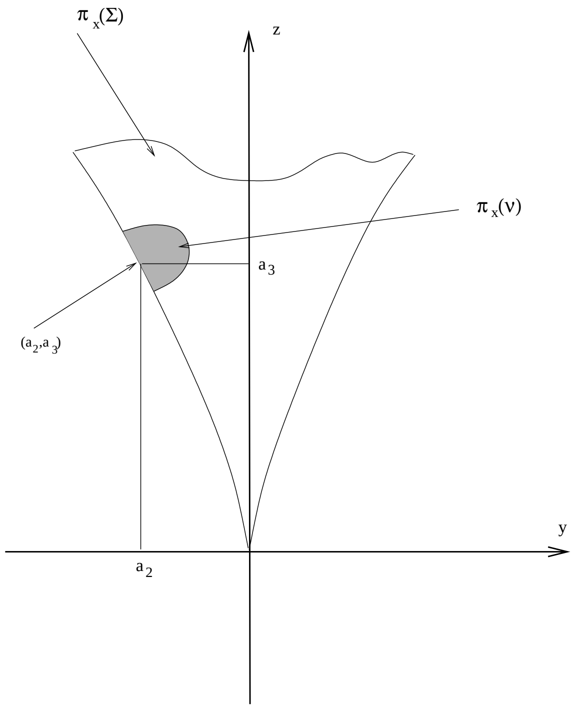
Par la question **iv**, tout vecteur du type $\gamma'(0)$ est orthogonal à $\overrightarrow{grad}f_{(a)}$, mais $\overrightarrow{grad}f_{(a)}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ (dès que $\overrightarrow{grad}f_{(a)} \neq 0$). On en conclut que $T_a\Sigma = a + \overrightarrow{grad}f_{(a)}^{\perp}$. **Ce qui donne une autre définition intrinsèque de $T_a\Sigma$.**

Déterminons l'equation du plan tangent $T_a\Sigma$. D'après $T_a\Sigma = a + \overrightarrow{grad}f_{(a)}^{\perp}$:

$$T_a\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + (z - a_3)\frac{\partial f}{\partial xz}(a)\}.$$

On a aussi vu que le Graphe de $D\phi_{1(a)}$ est engendré par $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)/\frac{\partial f}{\partial z}(a))$ et $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)/\frac{\partial f}{\partial z}(a))$, ce qui donne bien sûr la même équation pour a+Graphe de $D\phi_{1(a)}$ (de même avec ϕ_2 et ϕ_3).

vi- $a \in C^{\Sigma}_{\pi_x}$ ssi $\dim(\pi_x(T_a\Sigma)) = 0$ ou 1 ssi a + l'axe des x est inclus dans $T_a\Sigma$ ssi l'axe des x est inclus dans $\overrightarrow{grad}f_{(a)}^{\perp}$ ssi $\overrightarrow{grad}f_{(a)} \in \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ ssi $a_1 = 0$ ssi $a = (0, a_2, a_3) \in \Sigma$ avec $a_2^2 = a_3^3$ ssi a est dans le lieu des points de Σ au voisinage desquels le théorème de la fonction implicite est en échec pour l'existence de ϕ_3. Soit a un tel point de Σ, si Σ était tout de même le graphe d'une application du type ϕ_3 au voisinage de a, il existerait $\mathcal{V}$ un voisinage de a dans Σ tel que $\pi_x(\mathcal{V})$ serait un voisinage de (a_2, a_3) dans $\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ce qui n'est pas le cas. (mêmes remarques pour π_y).



Le théorème de la fonction implicite pour une application du type ϕ_2, par exemple, est mis en défaut dès que $D_2 f_{2(a)} \notin \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$, i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ ssi $T_a\Sigma$ contient la direction de l'axe des y ce qui est le lieu des points critiques $C^{\Sigma}_{\pi_y}$ de la projection π_y. On retiendra que le théorème de la fonction implicite, qui donne un paramètrage de Σ au voisinage de a suivant les coordonnées numéro i et j de $\mathbb{R}^3$, a lieu dès que la droite dirigée par l'axe de la troisième coordonnée coupe "transversalement" Σ au voisinage de a.

Chapitre 6- Équations différentielles.

6.1. Définitions générales. Réduction au cas résolu du premier ordre.

Soient E et G deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés complets et soient $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ et $F : \Omega \to G$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note (e) l'équation :

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0_G \tag{e}$$

Cette équation est appelée **équation différentielle d'ordre n en l'inconnue y, non résolue en $y^{(n)}$.** Chercher une **solution de** (e) c'est chercher un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ (ouvert, fermé, ouvert en une borne fermé en l'autre, de longueur finie ou pas) et une application n fois dérivable $y : I \to E$ telle que :

- $\Gamma_{(y,y',\cdots,y^{(n)})} = \{(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) \in I \times E^{n+1}; t \in I\}$ (le graphe de $I \ni t \mapsto (y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) \in I \times E^{n+1}$) soit contenu dans Ω,
- quel que soit $t \in I$, $F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0_G$.

Le terme **ordinaire** signifie que la solution y est à variables réelles.

Exemple. Si $n = 2$, $E = \mathbb{R}$, $\Omega = \{(t, x_0, x_1, z) \in \mathbb{R}^4;\ x_0 \cdot z > 0,\ t \neq 0,\ x_1 \cdot z \geq 0\}$ et F est l'application définie sur Ω par $F(t, x_0, x_1, z) = \sqrt{x_1 \cdot z} \cdot \sin(\frac{1}{t} \ln(x_0 \cdot z))$, l'équation (e) est :

$$\sqrt{y'(t) \cdot y''(t)} \cdot \sin(\frac{1}{t} \cdot \ln(y(t) \cdot y''(t))) = 0$$

L'équation différentielle (e) est la plus générale que l'on puisse considérer, mais on ne sait pas, sauf cas particuliers très rares, en trouver des solutions. On essaie alors de se ramener à une équation **résolue en** $y^{(n)}$, c'est-à-dire une équation du type décrit ci-après. On considère $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E^n$ et une application $\varphi : \mathcal{U} \to E$ **continue** (au moins). On note (ϵ) l'équation :

$$y^{(n)}(t) = \varphi(t, y(t), \cdots, y^{(n-1)}) \tag{ϵ}$$

Cette équation est appelée **équation différentielle d'ordre n en l'inconnue y, résolue en $y^{(n)}$.**

Réduction au cas résolu. Pour passer d'une équation non résolue en $y^{(n)}$ (de type (e)) à une équation résolue en $y^{(n)}$ (de type (ϵ)), on essaie d'appliquer le théorème de la fonction implicite à F. Notons $t, x_0, \cdots, x_{n-1}, z$ les $n+2$ variables de F. Si $(t^0, x_0^0, \cdots, x_{n-1}^0, z^0) \in \Omega$ est tel que $F(t^0, x_0^0, \cdots, x_{n-1}^0, z^0) = 0_G$, si F est différentiable partiellement relativement à la variable z, et si $D_z F_{(t^0, x_0^0, \cdots, x_{n-1}^0, z^0)} \in \mathcal{I}som(E; G)$ et $(t, x_0, \cdots, x_{n-1}, z) \mapsto D_z F_{(t, x_0, \cdots, x_{n-1}, z)}$ est continue en $(t^0, x_0^0, \cdots, x_{n-1}^0)$, on peut alors appliquer à F le théorème de la fonction implicite : il existe $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $(t^0, x_0^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ dans $\mathbb{R} \times E^n$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de z^0 dans E et une application $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ de même régularité que F telle que : quel que soit $(t, x_0, \cdots, x_{n-1}, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $F(t, x_0, \cdots, x_{n-1}, z) = 0_G \iff z = \varphi(t, x_0, \cdots, x_{n-1})$. Autrement dit une solution $y : I \to E$ de (ϵ) telle que $(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ pour tout $t \in I$ est une solution de (e) et réciproquement toute solution $y : I \to E$ de (e) telle que le graphe de $(y, y', \cdots, y^{(n)})$ au-dessus de I est contenu dans $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ est une solution de (ϵ).

Exemple. Reprenons l'exemple ci-dessus. Dans ce cas quel que soit $(t, x_0, x_1, z) \in \Omega$, on a :

$$D_z F(t, x_0, x_1, z) : h \mapsto \frac{\partial F}{\partial z}(t, x_0, x_1, z) \cdot h = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{z}}(\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{t} \ln(x_0 \cdot z)) + \frac{1}{t} \cos(\frac{1}{t} \ln(x_0 \cdot z)))$$

Cette application est bijective dès que $x_1 \neq 0$, et $\tan(\ln(x_0 \cdot z)) \neq -\dfrac{2}{t}$. Posons $(t^0, x_0^0, x_1^0, z^0) = (1,1,1,1)$. On a alors $F(t^0, x_0^0, x_1^0, z^0) = 0$ et $D_z F(t^0, x_0^0, x_1^0, z^0) \in \mathcal{I}som(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 1 dans $\mathbb{R}$, tels que $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \Omega$ et une application $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{C}^\infty$, telle que : $\Big(F(t, x_0, x_1, z) = 0 \quad \text{et} \quad (t, x_0, x_1, z) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \Big) \Longleftrightarrow z = \varphi(t, x_0, x_1)$. Autrement dit les solutions de (e) dont le graphe est contenu dans $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, sont les solutions de $y''(t) = \varphi(t, y(t), y'(t))$ (bien sûr il est en général impossible d'exprimer *explicitement* l'application φ. Le thórème de la fonction implicite n'en fournissant que l'existence).

Réduction au premier ordre. Nous allons voir comment, à partir de l'équation différentielle (ϵ) d'ordre n résolue en $y^{(n)}$, on peut se ramener à une équation différentielle $(\mathcal{E})$ du premier ordre résolue en y' qui soit équivalente à (ϵ), ie dont les solutions sur un intervalle donné sont les mêmes que celles de (ϵ).

On munit E^n de la norme $\| \ \|_\infty = \max(\| \ \|_E, \cdots, \| \ \|_E)$. Avec cette norme E^n est comme E un espace complet. Soit $f : \mathcal{U} \to E^n$ l'application définie par $f(t, x_0, \cdots, x_{n-1}) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, \varphi(t, x_0, \cdots, x_{n-1}))$. L'application f a la même régularité que φ. Soit enfin $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle du premier ordre en l'inconnue $\vec{y}$, résolue en $\vec{y}\,'$:

$$\vec{y}\,' = f(t, \vec{y}(t)) \tag{$\mathcal{E}$}$$

Ici l'inconnue $\vec{y}$ est une application de variable réelle à valeurs dans E^n. Si $\vec{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) : I \to E^n$ est une solution de $(\mathcal{E})$, on a pour tout $t \in I$:

$$(y_0'(t), y_1'(t), \cdots, y_{n-1}'(t)) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_{n-1}(t), \varphi(t, y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t))) \tag{1}$$

De (1) on déduit que :

$$y_{n-1}'(t) = \varphi(t, y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t))) \ \text{ et } \ y_1(t) = y_0'(t), \cdots, y_j(t) = y_0^{(j)}(t), \cdots, y_{n-1}(t) = y_0^{(n-1)}(t),$$

c'est-à-dire que y_0 est n fois dérivable et que $y_0^{(n)}(t) = \varphi(t, y_0(t), \cdots, y_0^{(n-1)}(t))$, ou encore que y_0 est solution de (ϵ). Mais réciproquement si y est une solution de (ϵ) sur un intervalle I, en posant $\vec{y} = (y, y', \cdots, y^{(n-1)})$, $\vec{y}$ est une solution de $(\mathcal{E})$ sur I.

En conclusion, une équation du type général (e) peut se ramener, lorsque le théorème de la fonction implicite permet de résoudre en $y^{(n)}$, à une équation du type $(\mathcal{E})$ (ie du type (ϵ), avec $n = 1$). Dans **la suite on ne considèrera donc que des équations différentielles du premier ordre résolues en** y'. On en redonne le modèle pour fixer définitivement les notations :

Soit $f : \mathcal{U} \to E$ une application au moins continue, avec E un espace vectoriel réel normé et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. On note $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle suivante en l'inconnue y :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{$\mathcal{E}$}$$

Chercher une **solution de** $(\mathcal{E})$ *c'est chercher un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une application dérivable $y : I \to E$ telle que :*

- *$\Gamma_y = \{(t, y(t)) \in I \times E; t \in I\}$ (le graphe de y) soit contenue dans $\mathcal{U}$,*
- *quel que soit $t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.*

Définition (I-solution). Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, on appelle I-**solution** de $(\mathcal{E})$ toute application $y : I \to E$ dérivable telle que :

- Γ_y, le graphe de y au-dessus de I, est contenu dans $\mathcal{U}$,
- pour tout $t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

Nous noterons $\mathcal{S}_I(\mathcal{E})$ l'ensemble des I-solutions. La réunion $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ des $\mathcal{S}_I(\mathcal{E})$, sur tous les intervalles I non réduits à un point, s'appelle **l'ensemble des solutions de** $(\mathcal{E})$. **Intégrer** $(\mathcal{E})$ c'est déterminer $\mathcal{S}(\mathcal{E})$.

Proposition 6.1. — *Si l'application f de l'équation $(\mathcal{E})$ est de classe k ($k \geq 1$), il est de même de toute I-solution de $(\mathcal{E})$.*

Preuve. Soit y une I-solution de $(\mathcal{E})$. La preuve se fait par récurrence sur la classe de y. Comme f est $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$ et comme y est par hypothèse dérivable au moins une fois (en tant que solution de $(\mathcal{E})$) l'application $t \mapsto f(t, y(t))$ est au moins dérivable. Or cette application est y', qui est par conséquent au moins $\mathcal{C}^0$, ie que y est au moins $\mathcal{C}^1$. Soit $p < k$ et supposons que quel que soit j inférieur ou égal à p, y soit $\mathcal{C}^j$. Dans ce cas, comme $k > p$, l'application $t \mapsto f(t, y(t))$ est $\mathcal{C}^p$, et donc y' est $\mathcal{C}^p$, ie y est $\mathcal{C}^{p+1}$. $\square$

6.2. Solutions maximales.

On munit l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ de la relation d'ordre suivante :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{E}), \quad \varphi \preceq \psi \Longleftrightarrow \Gamma_\varphi \subset \Gamma_\psi,$$

où Γ_φ et Γ_ψ sont les graphes dans $\mathcal{U}$ respectivement de φ et ψ. Autrement dit, pour deux solutions φ et ψ de $(\mathcal{E})$, on dit que $\varphi \preceq \psi$ si et seulement si ψ est une fonction qui prolonge φ, ou encore φ est une restriction de ψ.

Bien sûr la relation d'ordre $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre total, mais partiel : deux solutions de $(\mathcal{E})$ ne sont pas toujours comparables, ie que l'une n'est pas nécessairement la restriction de l'autre.

Définition. On dit qu'une solution μ de $(\mathcal{E})$ est une **solution maximale de** $(\mathcal{E})$ si et seulement si μ est un élément maximal pour l'ordre $\preceq$. Autrement dit μ est une solution de $(\mathcal{E})$ qui ne peut pas être prolongée strictement par une autre solution de $(\mathcal{E})$.

Théorème 6.2. — *Toute solution de $(\mathcal{E})$ peut être prolongée en une solution maximale.*

Avant de démontrer ce théorème, rappelons le lemme de Zorn, qui est équivalent à l'axiome du choix (†).

On dit qu'un ensemble ordonné $(\mathcal{A}, \preceq)$ est **inductif** si et seulement si toute partie non vide $\mathcal{P}$ de $\mathcal{A}$ totalement ordonnée admet un majorant dans $\mathcal{A}$. Autrement dit si $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ est non vide et tel que $\forall p, q \in \mathcal{P}$, $p \preceq q$ ou $q \preceq p$ ($\mathcal{P}$ totalement ordonnée), alors il existe $\mu \in \mathcal{A}$ tel que $\forall p \in \mathcal{P}$, $p \preceq \mu$ (μ est un majorant de $\mathcal{P}$).

Lemme de Zorn. *Tout ensemble non vide, ordonné, inductif admet (au moins) un élément maximal.*

Preuve du Théorème 6.2. D'après le lemme de Zorn, il suffit de prouver que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est inductif. Soit donc $\mathcal{P}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ non vide et totalement ordonné, montrons que $\mathcal{P}$ possède un majorant dans $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. Si $\varphi \in \mathcal{P}$, notons I_φ son intervalle de définition et Γ_φ son graphe. Comme les graphes des éléments de $\mathcal{P}$ sont deux à deux comparables, d'une part $I = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{P}} I_\varphi$ est un intervalle, d'autre part $\bigcup_{\varphi \in \mathcal{P}} \Gamma_\varphi \subset \mathcal{U}$ est le graphe d'une application $\Phi : I \to E$. Si $t \in I$, il existe $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $t \in I_\varphi$ et φ est par définition de Φ la restriction de Φ à I_φ. Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$, $\Phi'(t) = \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \Phi(t))$. On en conclut que $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$. Comme Φ est un majorant de $\mathcal{P}$, dans $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est bien inductif. $\square$

Remarque. Le Théorème 6.2 dit que l'on peut prolonger toute solution de $\mathcal{E}$ en une solution maximale, mais pas que ce prolongement est unique. Par exemple si $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(t, z) = 2\sqrt{|z|}$, l'équation

(†) L'axiome du choix est un axiome de la théorie des ensembles, comme par exemple l'axiome de l'infini qui assure qu'il existe un ensemble infini, ou de façon équivalente que l'on peut construire $\mathbb{N}$. L'axiome du choix assure quant à lui que "tout produit d'ensembles non vides est non vide" ou de façon équivalente que "pour tout ensemble non vide E il existe au moins une application $f : \mathcal{P}(E) \to E$ telle que pour tout $A \subset E$, avec $A \neq \emptyset$, on ait $f(A) \in A$". Cet axiome est équivalent au lemme de Zorn. Le lemme de Zorn peut ainsi être considéré lui-même comme un axiome de la théorie des ensembles. Pour une preuve de cette équivalence, on pourra par exemple se reporter à *Cours de Mathématiques Spéciales. 1- Algèbre.* B. Gostiaux. Puf.

$(\mathcal{E})$ devient : $y'(t) = 2\sqrt{y(t)}$. Il est clair que quels que soient α, β vérifiant $\alpha < \beta$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'application :

$$\begin{array}{rccll} y_{\alpha,\beta} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & t & \mapsto & -(t-\alpha)^2 & \text{si } \alpha \geq t \\ & & & 0 & \text{si } \beta \geq t \geq \alpha \\ & & & (t-\beta)^2 & \text{si } t \geq \beta \end{array}$$

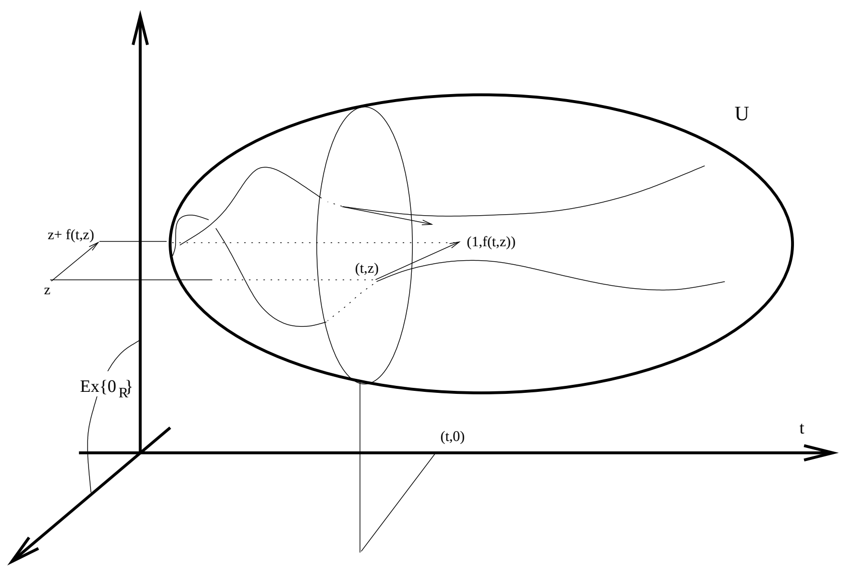
est une $\mathbb{R}$-solution de $(\mathcal{E})$, et donc une solution maximale de $(\mathcal{E})$. Mais quels que soient $-1 \geq \alpha$ et $\beta \geq 1$, la solution maximale $y_{\alpha,\beta}$ prolonge la $]-1, 1[$-solution $t \mapsto 0$. Ce prolongement n'est donc pas unique.

C'est la raison pour laquelle, dans la preuve du théorème précédent, il ne suffit pas de considérer la réunion des graphes des solutions de $(\mathcal{E})$ qui contiennent le graphe d'une solution donnée y pour montrer que la solution y se prolonge en une solution maximale, car la réunion en question n'a aucune raison d'être le graphe d'une application. Afin qu'une réunion de graphe soit un graphe, on ne peut pas se passer des parties totalement ordonnées de l'ensemble des graphes des solutions de $(\mathcal{E})$, et donc du lemme de Zorn.

6.3. Interprétation géométrique. Champs de vecteurs.

Se donner l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, c'est se donner un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R} \times E$, et en chaque point $(t, \vec{z})$ de $\mathcal{U}$, un vecteur $\vec{w} = f(t, \vec{z})$ de E. Chercher une solution de $(\mathcal{E})$, c'est chercher une application dérivable $y : I \to E$ (en fait de même classe que f par la Proposition 6.1), dont le graphe Γ_y soit inclus dans $\mathcal{U}$ (ce qui implique – mais n'équivaut pas ! – que $I \subset \pi_1(\mathcal{U})$ et $y(I) \subset \pi_2(\mathcal{U})$, où π_1 est la projection de $\mathbb{R} \times E$ sur $\mathbb{R}$, et π_2 est la projection de $\mathbb{R} \times E$ sur E) et telle que la courbe $I \ni t \mapsto y(t) \in E$ ait en t pour dérivée $y'(t) = f(t, y(t))$, ie que cette dérivée est la valeur de f au point $(t, y(t))$ (qui est le point de Γ_y au-dessus de t).

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, une I-solution de $(\mathcal{E})$ est une courbe $y : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable dont le graphe est dans $\mathcal{U}$, et telle qu'au point $(t, y(t))$, la tangente au graphe de y ait pour coefficient directeur $y'(t) = f(t, y(t))$, ie que cette tangente passe par $(t, y(t))$ et est dirigée par le vecteur $(1, y'(t)) = (1, f(t, y(t)))$. l'interprétation géométrique de $(\mathcal{E})$ est la suivante : *on se donne en chaque point* (t, z) *de* $\mathcal{U}$ *le vecteur* $(1, f(t, z))$ *et on cherche toutes les courbes dérivables dont les graphes sont dans* $\mathcal{U}$, *et tangentes en chaque point* (t, z) *au vecteur* $(1, f(t, z))$.



Si en chaque point P d'un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace vectoriel E, on se donne un vecteur $\vec{w}(P)$ de E, on dit que l'on dispose sur $\mathcal{U}$ du **champ de vecteurs** $\mathcal{U} \ni P \mapsto \vec{w}(P) \in E$. Les **courbes intégrales** de ce champ sont par définition les solutions maximales de l'équation différentielle :

$$p'(t) = \vec{w}(p(t)) \tag{$\mathcal{C}$}$$

C'est-à-dire que résoudre $(\mathcal{C})$ c'est chercher les courbes dérivables $p : I \to \mathcal{U}$, où I est un intevalle de $\mathbb{R}$, telles qu'en le point $p(t)$, la valeur de la dérivée $p'(t)$ – ou le vecteur vitesse à l'instant t de la trajectoire $p(I)$ – soit égal à $\vec{w}(p(t))$. Résoudre $(\mathcal{C})$ c'est ainsi chercher les courbes dérivables de $\mathcal{U}$ qui en chacun de leur point sont tangentes au vecteur correspondant du champ.

On voit alors que résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, revient à chercher les courbes intégrales du champ $\vec{w} : \mathbb{R} \times E \supseteq \mathcal{U} \ni (t, \vec{z}) \mapsto (1, f(t, \vec{z})) \in \mathbb{R} \times E$, puisque ces courbes sont du type $I \ni t \mapsto (t, y(t))$, où $I \ni t \mapsto y(t)$ est solution de $(\mathcal{E})$: les courbes solutions du champ $\vec{w}$ sont les graphes des solutions de $(\mathcal{E})$.

Notons enfin que réciproquement, l'équation différentielle $(\mathcal{C})$ est une équation différentielle du type $(\mathcal{E})$, avec $f(t, \vec{z}) = \vec{w}(\vec{z})$, ie que f ne dépend pas de la variable t, mais uniquement de la variable $\vec{z}$. On dit dans ce cas que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est **autonome**.

6.4. Le problème de Cauchy.

Consiérons l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Le **problème de Cauchy** est le suivant : *on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$ tels que $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et $I \subset \pi_1(\mathcal{U})$, et on cherche toutes les I-solutions $y : I \to E$ de $(\mathcal{E})$ telles que $y(t_0) = y_0$.*

Autrement dit on cherche toutes les courbes (définies sur I), du champ de vecteur de $\mathcal{U}$ défini par $(t, z) \mapsto (1, f(t, z))$, qui passent par (t_0, y_0). Notons que trouver toutes les I-solutions de $(\mathcal{E})$ revient par le Théorème 6.2 à déterminer toutes les solutions maximales de $(\mathcal{E})$, puisque qu'une I-solution est nécessairement la restriction à I d'une solution maximale dont l'intervalle de définition contient I.

Le théorème suivant sera utile pour faire apparaitre les solutions de $(\mathcal{E})$ comme des points fixe d'une application. Il fait intervenir la notion d'intégrale pour les applications continues à valeurs dans un espace vectoriel normé complet. Disons rapidement que l'on peut faire une théorie de l'intégration pour de telles applications, mais on peut aussi considérer que $E = \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}$, pour plus de simplicité.

Théorème 6.3. — *Soit $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les assertions (i) et (ii) sont équivalentes :*
(i) - y est une I-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0 (une solution au problème de Cauchy en (t_0, y_0)).
(ii) - $y : I \to E$ est continue, $\Gamma_y \subset \mathcal{U}$ et quel que soit $t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$.

Preuve. Si y est une I-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0, $\Gamma_y \subset \mathcal{U}$ et y étant au moins dérivable, l'application $I \ni \tau \mapsto f(\tau, y(\tau))$ est au moins continue (comme f) et le Théorème de Leibniz assure que $v : I \ni t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$ est dérivable, de dérivée en t, $v'(t) = f(t, y(t))$. Mais comme y est I-solution de $(\mathcal{E})$, on a $v'(t) = f(t, y(t)) = y'(t)$. Ayant la même dérivée sur l'intervalle I et passant toutes deux par y_0 en t_0, les applications v et y coïncident sur I. Réciproquement l'application $v : I \ni t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$ est dérivable sur I dès que f est continue, et de dérivée, en t, $v'(t) = f(t, y(t))$. Si donc $y = v$, y est bien une solution du problème de Cauchy pour $(\mathcal{E})$ en (t_0, y_0). □

6.5. Théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locale pour le problème de Cauchy.

Avec les notations de l'équation $(\mathcal{E})$, on dira que l'application $f : \mathcal{U} \to E$ est **localement lipschitzienne en sa seconde variable sur** $\mathcal{U}$ si et seulement si quel que soit $(t_0, z_0) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times E$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ de (t_0, z_0) dans $\mathbb{R} \times E$, tel qu'existe une constante $C_0 > 0$ vérifiant :

$$\forall (t, z), (t, x) \in \mathcal{U}_0, \quad \|f(t, z) - f(t, x)\| \leq C_0 \cdot \|z - x\|.$$

- Bien sûr lorsque f est localement lipschitzienne (ie que quel que soit $(t_0, z_0) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times E$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ de (t_0, z_0) dans $\mathbb{R} \times E$, tel qu'existe une constante $K_0 > 0$ vérifiant : $\forall (t, z), (s, x) \in \mathcal{U}_0, \quad \|f(s, z) - f(t, x)\| \leq K_0 \cdot \|(s - t, z - x)\|_{\mathbb{R}\times E} = K_0 \cdot \max(|(s - t|, \|z - x)\|.)$, f est en particulier localement lipschitzienne en sa seconde variable.
- En particulier si f est différentiable partiellement par rapport à sa deuxième variable (ie z), et si $(t, z) \mapsto D_z f_{(t,z)}$ est bornée sur $\mathcal{U}$, par le Théorème de la moyenne f est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\mathcal{U}$.
- Un cas important pour lequel le point précédent à lieu est celui-ci : E est de dimension finie et $(t, z) \mapsto D_z f_{(t,z)}$ est continue sur $\mathcal{U}$ (on applique alors le Théorème qui dit qu'une fonction continue sur un compact – une boule fermée par exemple si $\dim(E) < \infty$ – est bornée).
- En particulier, lorsque E est de dimension finie, l'existence et la continuité sur $\mathcal{U}$ des dérivées partielles de f relativement aux variables de E (ie $x_1, x_2, \cdots, x_n$ si $z = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$) assure que la différentielle partielle de f relativement à la seconde variable z de f existe et est continue, ce qui implique ensuite que f est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\mathcal{U}$.

On dispose du théorème suivant, dit de Cauchy-Lipschitz, **d'existence et d'unicité locale des solutions de** $(\mathcal{E})$.

Théorème 6.4. (Cauchy-Lipschitz) — *Avec les notations de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, si f est continue sur $\mathcal{U}$ et localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\mathcal{U}$, quel que soit $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une fonction $y : I_0 \to E$, telle que :*
- *$y(t_0) = y_0$,*
- *y est une I_0-solution de $(\mathcal{E})$,*
- *pour tout intervalle $J \subset I_0$ contenant t_0, il n'existe qu'une seule J-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0. Il s'agit de $y_{|J}$.*

Remarque. Avant de prouver ce théorème, remarquons que dans l'exemple qui suit le Théorème 6.2, l'application $(t, z) \mapsto f(t, z) = 2\sqrt{|z|}$ n'est pas localement lipschitzienne en sa seconde variable z en 0. On peut soit le vérifier directement (le rapport $\dfrac{2\sqrt{|z|}}{|z|}$ n'est pas borné au voisinage de 0), soit invoquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz : si f était lipschitzienne en la variable z, il n'existerait qu'une seule $\mathbb{R}$-solution de $(\mathcal{E})$ qui vaudrait 0 en 0. Or dans cet exemple tel n'est pas le cas, puisque lorsque $\alpha < 0 < \beta$, les $\mathbb{R}$-solutions $y_{\alpha,\beta}$ valent 0 en 0.

Cet exemple montre que pour obtenir l'existence **et l'unicité** localement de solutions au problème de Cauchy, on peut pas se passer de l'hypothèse "f est localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\mathcal{U}$", en la remplaçant par l'hypothèse moins forte "f est continue sur $\mathcal{U}$". Nous verrons plus loin que la seule continuité de f garantit cependant l'existence de solutions locales (Théorème de Cauchy-Arzelà).

Preuve. Comme f est par hypothèse localement lipschitzienne en sa seconde variable sur $\mathcal{U}$, il existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ un voisinage ouvert de (t_0, y_0) dans $\mathbb{R} \times E$ et une constante $C_0 > 0$ tels que quels que soient $(t, z), (t, x) \in \mathcal{U}_0$, $\|f(t, z) - f(t, x)\| \leq C_0 \cdot \|z - x\|$. Soit alors $\alpha, \beta > 0$ suffisamment petits pour que $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_{(y_0,\beta)} \subset \mathcal{U}_0$. Nous posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. L'application $I \ni t \mapsto \|f(t, y_0)\|$ est continue sur le compact I, donc bornée, disons par $m > 0$. Si $(t, x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_{(y_0,\beta)}$, on a :

$$\|f(t, x)\| \leq \|f(t, x) - f(t, y_0)\| + \|f(t, y_0)\| \leq C_0 \cdot \|x - y_0\| + m \leq C_0 \cdot \beta + m = M$$

Maintenant, quel que soit le sous-intervalle J de I, l'espace métrique $\mathcal{M}_J$ des applications continues sur J et à valeurs dans la partie complète $\bar{B}_{(y_0,\beta)}$ de E, munit de la distance $d_J(u, v) = \sup_{\tau \in J} \|v(\tau) - u(\tau)\|$, est complet. Considérons alors :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_J : & \mathcal{M}_J & \to & \mathcal{C}^0(J; E) \\ & v & \mapsto & \Phi_J(v) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, v(\tau))\ d\tau \end{array}$$

On a $\|\Phi_J(v)(t) - y_0\| = \| \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau))\ d\tau\| \leq | \int_{t_0}^t \|f(\tau, v(\tau))\|\ d\tau| \leq |t - t_0| \cdot M \leq \alpha \cdot M$. Mais si α est suffisamment petit pour que $\alpha \cdot M \leq \beta$, on en déduit que pour tout $v \in \mathcal{M}_J$, $\Phi_J(v)$ est à valeurs dans $\bar{B}_{(y_0,\beta)}$, ie que Φ_J est à valeurs dans $\mathcal{M}_J$.
Montrons alors que Φ_J est contractante. Pour tout $u, v \in \mathcal{M}_J$, pour tout $t \in J$:

$$\|\Phi_J(v)(t) - \Phi_J(u)(t)\| = \| \int_{t_0}^t f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, u(\tau))\ d\tau\| \leq | \int_{t_0}^t \|f(\tau, v(\tau)) - f(\tau, u(\tau))\|\ d\tau|$$

$$\leq \int_{t_0}^t C_0 \cdot \|v(\tau) - u(\tau)\| d\tau \leq C_0 \cdot \alpha \cdot d_J(u, v).$$

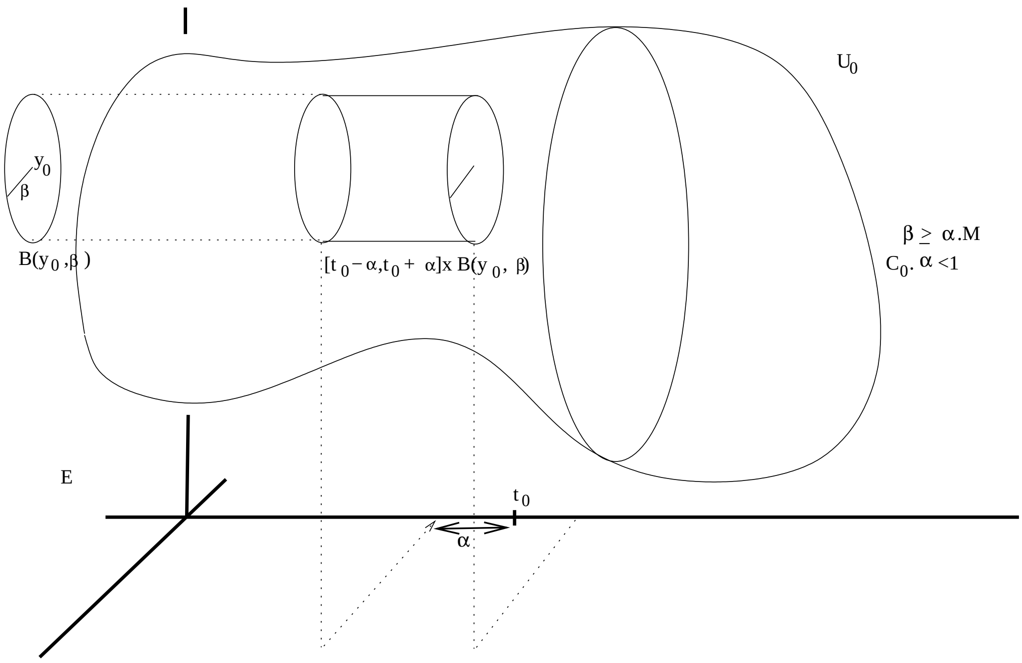
On en déduit que :

$$d_J(\Phi_J(v) - \Phi_J(u)) \leq C_0 \cdot \alpha \cdot d_J(u, v).$$

Si α est suffisamment petit pour que $C_0 \cdot \alpha < 1$, Φ_J est contractante et possède ainsi un unique point fixe $y_J \in \mathcal{M}_J$. Par le Théorème 6.3, y_J est une J-solution de $(\mathcal{E})$ qui vaut y_0 en t_0. Posons $y = y_I$.
Pour montrer qu'il n'existe qu'une seule J-solution y_J de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0, considérons ϕ une J-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0. Si on montre que ϕ est à valeurs dans $\bar{B}_{(y_0,\beta)}$, par unicité du point fixe de Φ_J, on aura $\phi = y_J$. Raisonnons par l'absurde : s'il existe $c \in J$ tel que $\|\phi(c) - y_0\| > \beta$, supposons par exemple que $t_0 < c$. Soit alors, par continuité de ϕ, $t_1 \in J$ tel que : $t_0 < t_1 < c$ et $\|\phi(t_1) - y_0\| = \beta$, $\|\phi(t) - y_0\| < \beta$, pour tout $t \in [t_0, t_1[$. On en déduit par le théorème de la moyenne (puisque $\|\phi'(t)\| = \|f(t, \phi(t))\| \leq M$, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, car dans ce cas $(t, \phi(t)) \in I \times \bar{B}_{(y_0,\beta)}$) :

$$\|\phi(t_1) - y_0\| = \|\phi(t_1) - \phi(t_0)\| \leq M(t_1 - t_0) < M \cdot \alpha \leq \beta,$$

ce qui est contradictoire.
Comme $y_{|J}$ est une J-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0, que celle-ci ne peut être que y_J, par ce qui précède, il s'ensuit que la seule J-solution de $(\mathcal{E})$ est la restriction de y à J. $\square$



Nous résumons les différentes hypothèses faites sur α, β dans la preuve qui précède par la figure ci-dessus. Lorsque toutes ces hypothèses sont satisfaites, on dit que le produit $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \bar{B}_{(y_0,\beta)}$ est un **cylindre de sécurité lipschitzien pour f, centré en** (t_0, y_0). L'existence d'un tel cylindre garantit l'existence d'une solution $y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \bar{B}_{(y_0,\beta)}$ de $(\mathcal{E})$ dont le graphe passe par (t_0, y_0).

6.6. Théorème de Cauchy-Arzelà : existence locale pour le problème de Cauchy.

Lorsque E est de dimension finie, on dispose du théorème suivant, qui garantit, sous l'hypothèse que f est continue, que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède au moins une solution définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 et passant par y_0 en t_0 ($(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ étant donné au préalable). Bien sûr cette solution n'est pas dans ce cas nécessairement unique. Nous donnons l'énoncé de théorème sans en donner la preuve, qui fait intervenir le Théorème d'Ascoli.

Théorème 6.5. **(Cauchy-Arzelà)** — *Avec les notations de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, si E est de dimension finie et si f est continue sur $\mathcal{U}$, quel que soit $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, il existe un intervalle ouvert I_0 contenant t_0 et une fonction $y : I_0 \to E$, telle que :*
- *$y(t_0) = y_0$,*
- *y est une I_0-solution de $(\mathcal{E})$.*

Preuve. Voir par exemple : *Équations Différentielles de fonctions de variable réelle ou complexe.* J.-M. Arnaudiès. Ellipses.

6.7. Solutions maximales et feuilletage de $\mathcal{U}$.

Le Théorème 6.4 de Cauchy-Lipschitz permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 6.6. — *Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, où f est continue sur $\mathcal{U}$ et lipschitzienne en sa seconde variable. Les assertions suivantes ont lieu :*

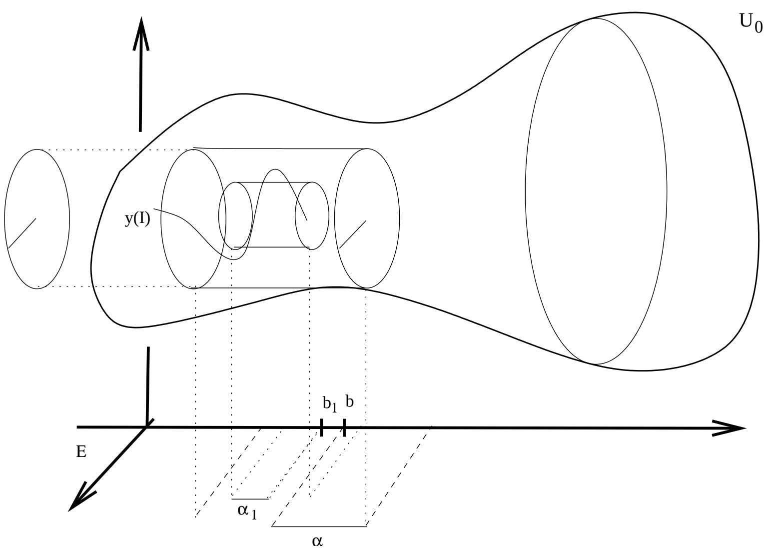
(i) - Les intervalles de définition des solutions maximales sont ouverts.

(ii) - Les graphes des solutions maximales forment une partition de $\mathcal{U}$ (on dit qu'ils feuillètent $\mathcal{U}$).

(iii) - Si y est une solution maximale de $(\mathcal{E})$ telle que $I_y \neq \mathbb{R}$, soit $b \neq \{-\infty, +\infty\}$ est une extrémité de I_y. Si y_0 est une valeur d'adhérence de y_I en b alors $(b, y_0) \in \mathrm{fr}(\mathcal{U}) = \bar{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$.

Preuve. Commençons par prouver (ii). Les graphes des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ sont inclus dans $\mathcal{U}$, par définition des solutions de $(\mathcal{E})$. De plus d'après le Théorème 6.4 de Cauchy-Lipschitz, si $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ il existe une solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0 et d'après le Théorème 6.2, une telle solution se prolonge en une solution maximale. On en déduit que la réunion des graphes des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ est $\mathcal{U}$. Montrons alors que deux tels graphes distincts sont disjoints. Soient $y : I \to E$ et $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to E$ deux solutions maximales de $(\mathcal{E})$ telles qu'existent $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$ vérifiant $y(t_0) = \widetilde{y}(t_0) = y_0$ ($t_0 \in I \cap \widetilde{I}$). Par le Théorème 6.4 de Cauchy-Lipschitz, les deux solutions y et $\widetilde{y}$ doivent nécessairement coïncider sur un intervalle qui est un voisinage de t_0, car le Théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité locale des solutions de $(\mathcal{E})$ passant par (t_0, y_0). On en déduit que $\{t \in I \cap \widetilde{I}, y(t) = \widetilde{y}(t)\}$ est un ouvert de $I \cap \widetilde{I}$. Mais comme y et $\widetilde{y}$ sont continues, cet ensemble est aussi fermé dans $I \cap \widetilde{I}$, qui est connexe. On en conclut que $\{t \in I \cap \widetilde{I}, y(t) = \widetilde{y}(t)\} = I \cap \widetilde{I}$, ie $y_{|I \cap \widetilde{I}} = \widetilde{y}_{|I \cap \widetilde{I}}$. Maintenant, comme y et $\widetilde{y}$ coïncident sur l'intervalle $I \cap \widetilde{I}$, si on avait $I \neq \widetilde{I}$, on en déduirait que le graphe $\Gamma_y \cap \Gamma_{\widetilde{y}}$ serait le graphe d'une solution de $(\mathcal{E})$ strictement plus grande que les deux solutions y et $\widetilde{y}$, mais comme y et $\widetilde{y}$ sont deux solutions maximales de $(\mathcal{E})$, cela ne se peut et ainsi $I = \widetilde{I}$, et $y = \widetilde{y}$.
Montrons (i). Soit $y : I \to E$ une solutions maximale de $(\mathcal{E})$ et $t_0 \in I$. Notons $y_0 = y(t_0)$. Comme $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, Le Théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence d'une solution locale en (t_0, y_0), ie qu'existe $\widetilde{y} : \widetilde{I} \to E$ une solution de $(\mathcal{E})$ définie sur l'intervalle ouvert $\widetilde{I}$ contenant t_0, telle que $\widetilde{y}(t_0) = y_0$. Mais $\widetilde{y}$ est nécessairement la restriction d'une solution maximale φ. Comme cette solution maximale a un graphe qui a en commun (t_0, y_0) avec le graphe de y, par le point (ii) que nous venons de démontrer, $y = \varphi$, et donc t_0 qui est un point intérieur à l'ensemble de définition de φ (qui est I) est aussi est point intérieur à I.

Montrons pour terminer (*iii*). Soit $y : I \to E$ une solutions maximale de $(\mathcal{E})$, $b \in \mathbb{R}$ une extrémité (diosons une extrémité droite) de I et y_0 une valeur d'adhérence de y en b. Clairement $(b, y_0) \in \bar{\mathcal{U}}$, car $(b, y_0) \in \bar{\Gamma}_y$ et $\Gamma_y \subset \mathcal{U}$. Montrons que $(b, y_0) \notin \mathcal{U}$. La difficulté de la preuve est la suivante : même si par le Théorème de Cauchy-Lipschitz on peut trouver une solution locale φ passant par (b, y_0), on ne pourra pas dire que cette solution permet de prolonger y par raccordement des graphes Γ_y et Γ_φ, puisque $(b, y_0) \notin \Gamma_y$. On procède alors ainsi : Soit, puisque $(b, y_0) \in \mathcal{U}$, α et β tels que $[b-\alpha, b+\alpha] \times \bar{B}_{(b,\beta)}$ soit un cylindre de sécurité lipschtzien pour f, ie que $[b-\alpha, b+\alpha] \times \bar{B}_{(b,\beta)} \subset \mathcal{U}$, f est C_0-lipschitzienne sur $\mathcal{U}_0$, bornée par M sur $[b-\alpha, b+\alpha] \times \bar{B}_{(b,\beta)}$ et $\alpha \cdot M \leq \beta$, $C_0 \cdot \alpha < 1$. Posons alors $\alpha_1 = \alpha/2$, $\beta_1 = \beta/2$, et soit $b_1 \in [b - \alpha_1, b[$ tel que $\|y(b_1) - y_0\| \leq \beta_1$, ce qui est possible puisque y_0 est valeur d'adhérence de y en b. On pose $y_1 = y(b_1)$. On a bien sûr $\alpha_1 \cdot M \leq \beta_1$ et $C_0 \cdot \alpha_1 < 1$. De plus $[b_1 - \alpha_1, b_1 + \alpha_1] \times \bar{B}_{(b_1,\beta_1)} \subset [b - \alpha, b + \alpha] \times \bar{B}_{(b,\beta)} \subset \mathcal{U}$. On en déduit que $[b_1 - \alpha_1, b_1 + \alpha_1] \times \bar{B}_{(b_1,\beta_1)}$ est un cylindre de sécurité lipschtzien pour f, centré en (b_1, y_1), ce qui assure l'existence d'une solution locale $\varphi : [b_1 - \alpha_1, b_1 + \alpha_1] \to \bar{B}_{(b_1,\beta_1)}$ de $(\mathcal{E})$ passant par $y_1 = y(b_1)$ en b_1. Or par le point (*ii*) de cette preuve, φ est dans une solution maximale de $(\mathcal{E})$ qui est nécessairement y. Mais comme $b_1 + \alpha_1 > b$, on a une contradiction. $\square$



6.8. Retour sur l'équation (ϵ).

Le théorème 6.6 s'applique à l'équation (ϵ), compte tenu de la réduction de (ϵ) à $(\mathcal{E})$. On peut énoncer :

Théorème 6.7. — *Avec les notations de l'équation (ϵ), supposons $\varphi : \mathcal{U} \to E$ continue et lipschitzienne en le n-uple formé par ses n variables vectorielles $x_0, \cdots, x_{n-1}, z$. Alors pour tout point $(t_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in \mathcal{U}$ il existe une unique solution maximale $y : I \to E$ de (ϵ) telle que : $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$. Les intervalles de définition des solutions maximales sont ouverts et les graphes des solutions maximales forment une partition de $\mathcal{U}$.* $\square$

Exercices du chapitre 6

Exercice 43. (Inégalité de Lojasiewiecz) — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(t, y) = g(y)$. On considère l'équation différentielle (dite autonome ou encore le champ de vecteurs sur Ω) :

$$y'(t) = f(t, y(t)) = g(y(t)) \qquad (\mathcal{E})$$

1- Montrer que le problème de Cauchy pour $(\mathcal{E})$ admet une solution unique en chaque point (t_0, y_0) de $\mathbb{R} \times \Omega$.

2- Soient $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ et $y : I \to \Omega$ la solution maximale de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$. Montrer que $I + (t_1 - t_0) \ni t \mapsto y(t + (t_0 - t_1)) \in \Omega$ est la solution maximale de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_1) = y_0$. Faire un dessin dans $\mathbb{R} \times \Omega$.

3- Montrer que les trajectoires des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ donnent une partition de Ω
(*ind. Utiliser le Théorème* 6.6 *et remarquer que les trajectoires des solutions maximales de* $(\mathcal{E})$ *sont les projetés sur* $\{0\} \times \Omega$ *des graphes des solutions maximales de* $(\mathcal{E})$).

4- On suppose que $y :]a, b[\to \Omega$ est une solution maximales de $(\mathcal{E})$ ayant 0 pour valeur d'adhérence en la borne a de I. Montrer, en utilisant le théorème 6.6, que nécessairement $a = -\infty$.

5- On suppose que g est $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert borné $\mathcal{O}$ contenant l'adhérence de l'ouvert Ω et que g ne s'annule éventuellement sur $\mathcal{O}$ qu'en 0. (On peut toujours se placer dans ces hypothèses dès que g à - éventuellement - un zéro isolé en 0).

Déduire de la question 4 que si 0 est une valeur d'adhérence d'une trajectoire d'une solution maximale de $(\mathcal{E})$ en une des bornes de son intervalle de définition nécessairement $g(0) = 0$.
(*ind. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des accroissements finis pour une composante bien choisie de* y).

6- Soit $P : \Omega \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^2$. On pose $g(y_1, \cdots, y_n) = (\dfrac{\partial P}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial P}{\partial y_n}) = \vec{grad} P_{(y_1,\cdots,y_n)}$ et on suppose que g vérifie les hypothèses de la question 5.

Soit $y :] - \infty, b[\to \Omega$ une solution maximale de $(\mathcal{E})$ telle que 0 soit une valeur d'adhérence de la trajectoire de y en $-\infty$. Le but de cette question est de montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence possible pour la trajectoire de y, sous l'hypothèse qu'existe un réel $\nu \in]0, 1[$ et une constante C tels que :

$$\forall (y_1, \cdots, y_n) \in \Omega, \quad |P(y_1, \cdots, y_n)|^\nu \leq C \cdot \|g(y_1, \cdots, y_n)\| \qquad (*)$$

Montrer que si la trajectoire de y possède une autre valeur d'adhérence que 0 en $-\infty$, la trajectoire de y est nécessairement de longueur infinie.
Montrer, à l'aide de $(*)$, que la longueur de la trajectoire de y entre $y(t_0)$ et $y(\alpha)$ $(\alpha, t_0 \in I, \alpha < t_0)$ est bornée par :

$$\int_\alpha^{t_0} (P \circ y)'(t)/\|g(y(t))\| \, dt \leq (1 - \nu)(P^{1-\nu}(y(t_0)) - P^{1-\nu}(y(\alpha))).$$

Conclure.

7- Illustrer l'étude qui précède à l'aide de $P(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$.

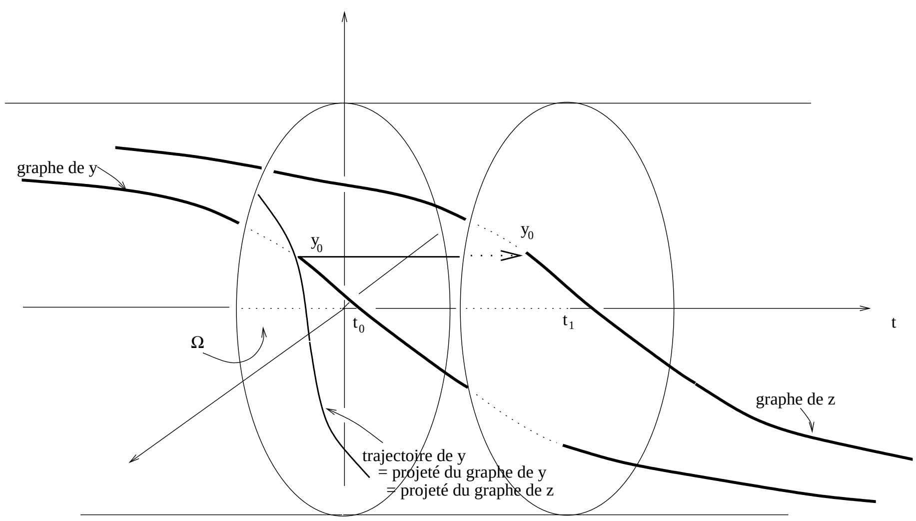
Corrigé des exercices du chapitre 6

1- L'application f étant $\mathcal{C}^1$, par le théorème de la moyenne, f est localement lipschitzienne en sa seconde variable, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, quel que soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, il existe un intervalle ouvert

I_0 contenant t_0 et une I_0-solution de $(\mathcal{E})$, $\mu : I_0 \to \Omega$ telle que $\mu(t_0) = y_0$. De plus Il n'existe qu'une seule J-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0, pour $J \subset I_0$; c'est la restriction de μ à J. Par le théorème 6.2, μ se prolonge en une solution maximale $y : I \to \Omega$. Par unicité locale de la solution de $(\mathcal{E})$ en chaque point $(t, y(t)) \in I \times \Omega$, y est la seule I-solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0.

2- L'application $z : I + (t_1 - t_0) \to \Omega$ définie par $z(t) = y(t + (t_0 - t_1))$ vérifie : $z(t_1) = y(t_0) = y_0$. D'autre part $z'(t) = y'(t + (t_0 - t_1)) = g(y(t + (t_0 - t_1))) = g(z(t))$. Donc z est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_1. Comme y est maximale, il en est de même de z.

Le graphe de z est par conséquent le translaté du graphe de y par le vecteur $(t_1 - t_0)$. Le feuilletage de $\mathbb{R} \times \Omega$ par les graphes des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ à donc l'allure suivante.



3- Une trajectoire dans Ω d'une solution maximale y de $(\mathcal{E})$ est la projection sur $\Omega \times \{0\}$ du graphe de y suivant la direction $\mathbb{R} \times \{0\}$. En effet la trajectoire de y est $\{y(t), t \in I\}$ et le graphe de y est $\{(t, y(t)), t \in I\}$. D'après la question précédente, deux points (t_0, y_0) et (t_1, y_0) se projètent sur le même point y_0 de Ω ssi (t_1, y_0) est dans le translaté par $\{t_1 - t_0\} \times \{0\}$ du graphe de l'unique solution maximale y de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_0. Ce translaté étant l'unique solution maximale z_{t_1} de $(\mathcal{E})$ passant par y_0 en t_1. Tous les graphes des solutions maximales du type z_{t_1} se projètent donc sur la trajectoire de y, et aucune autre projection de graphe de solution maximale ne rencontre la trajectoire de y. D'autre part, d'après le théorème 6.6, les graphes des solutions maximales de $(\mathcal{E})$ forment une partition de $\mathbb{R} \times \Omega$. Tout point de Ω est donc dans la projection d'un graphe d'une solution maximale de $(\mathcal{E})$, c'est-à-dire dans une trajectoire de solution maximale.

En conclusion si l'on définit la relation déquivalence suivante sur les solutions de $(\mathcal{E})$: $y \mathcal{R} z$ ssi le graphe de y est le translaté du graphe de z par un vecteur du type $T \times \{0\}$ (ie ssi il existe t, t' tels que $y(t) = z(t')$), chaque représentant d'une classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ se projète sur Ω et les trajectoires obtenues forment une partition de Ω.

4- Par le théorème 6.6, si 0 est valeur d'adhérence en a de y, nécessairement puisque 0 n'est pas dans la frontière du domaine $\mathbb{R} \times \Omega$, a est une valeur infinie. Comme a est à gauche du domaine I, $a = -\infty$.

5- Soit y une solution maximale de $(\mathcal{E})$ ayant 0 pour valeur d'adhérence en la borne gauche de son intervalle. On vient de voir que cette borne est alors $-\infty$. Supposons que $g(0) \neq 0$. Alors d'après les hypothèses g ne s'annule pas sur le compact $\bar{\Omega}$. Il existe alors une composante de g, disons g_1 pour fixer les idées, qui ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}$, et donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \Omega$, $g_1(y) \geq \delta > 0$ (on peut supposer que g_1 est par exemple positive, puisqu'elle ne s'annule pas). Soit alors $t_0 \in I$ et $\alpha \in I, \alpha < t_0$. On a

$y_1(t_0) - y_1(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{t_0} y_1'(u)\ du = \int_\alpha^{t_0} g_1(y(u))\ du \geq \delta(t_0 - \alpha)$. Or $y_1(t_0) - y_1(\alpha) \to y_1(t_0)$ quand $\alpha \to -\infty$ et $\delta(t_0 - \alpha) \to \infty$ quand $\alpha \to -\infty$. L'hypothèse $g(0) \neq 0$ est donc absurde.

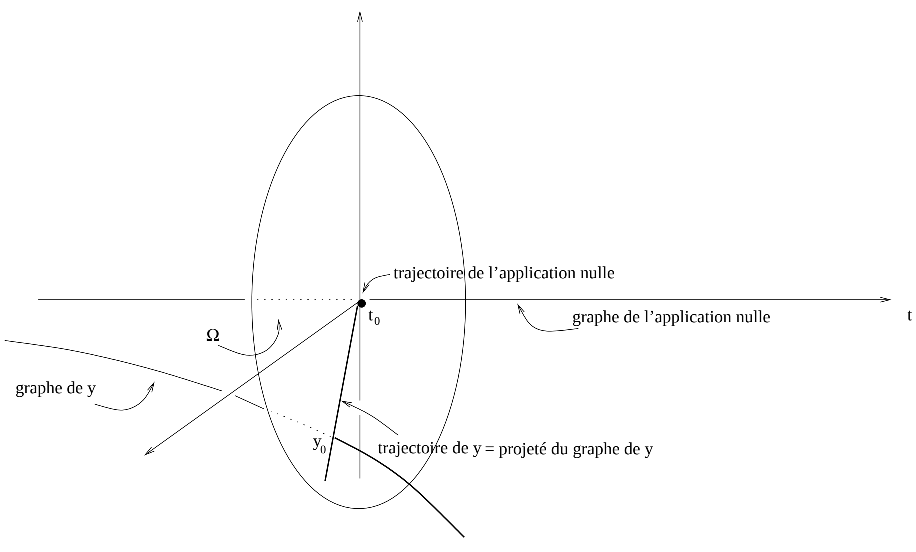
6- Si y possède 0 et ω comme valeurs d'adhérence en $-\infty$ et si $\omega \neq 0$, il existe $\alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \cdots$ deux suites tendant vers $-\infty$ telles que $\|y(\alpha_n) - y(\beta_n)\| > \|\omega\|/2$. Comme la longueur de la trajectoire de y entre α_1 et $-\infty$ est plus grande que celle de la trajectoire de y entre α_1 et α_n, qui est $\geq n.\|\omega\|/2$, cette longueur est infinie. Remarquons que $\Big(g(y(t))|g(y(t))\Big) = \Big(g(y(t))|y'(t)\Big) = DP_{(y(t))}(y'(t)) = (P \circ y)'(t)$. On en déduit que la longueur $\ell(y)$ de y entre t_0 et α, $\alpha > t_0$, est $\ell(y) = \displaystyle\int_\alpha^{t_0} \|y'(t)\|\ dt = \int_\alpha^{t_0} \|g(y(t))\|\ dt = \int_\alpha^{t_0} \|g(y(t))\|^2/\|g(y(t))\|\ dt = \int_\alpha^{t_0} \Big(g(y(t))|g(y(t))\Big)/\|g(y(t))\|\ dt = \int_\alpha^{t_0} (P \circ y)'(t)/\|g(y(t))\|\ dt \leq C \int_\alpha^{t_0} (P \circ y)'(t)/|P(y(t))|^\nu\ dt$.

D'autre part puisque $(P \circ y)'(t) = \Big(g(y(t))|g(y(t))\Big) \geq 0$, $t \mapsto (P \circ y)(t)$ est croissante, et comme $P(y(t)) \to P(0)$ quand $t \to 0$, et que l'on peut supposer, quitte à considérer $P - P(0)$, que $P(0) = 0$, on a $P(y(t)) \geq 0$. On en déduit que :

$$\ell(y) \leq \frac{C}{1-\nu} \int_\alpha^{t_0} \left((P \circ y)^{1-\nu}\right)'(t)\ dt = \frac{C}{1-\nu}(P(y_0) - P(y(\alpha)),$$

cette quantité étant bornée lorsque $\alpha \to -\infty$, il en est de même de $\ell(y)$. On en conclut que, sous l'hypoyhèse $(*)$, 0 est la seule valeur d'adhérence de y.

7- Ici $\vec{grad}P_{(y_1,y_2)} = (2y_1, 2y_2)$ et pour réaliser $(*)$, on peut choisir $\nu = 1/2$, car $(y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \leq 2\|\vec{grad}P_{(y_1,y_2)}\|$. Les solutions de $(\mathcal{E})$ passant en $y_0 = (y_1^0, y_2^0)$ en t_0 sont $y(t) = (y_1(t) = y_1^0 e^{2(t-t_0)}, y_2(t) = y_2^0 e^{2(t-t_0)})$. Leur trajectoire dans Ω (Ω = la boule ouverte de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$, par exemple) sont les droites $Yy_1^0 = Xy_2^0$ et l'origine. Chaque trajectoire non constante adhère à l'origine pour $t \to -\infty$ et l'origine est, comme prévu par la question 6, la seule valeur d'adhérence de ces trajectoires en $-\infty$.



Références

Cours de calcul différentiel :

Arnaudiès, Analyse, Dunod Université, Bordas
Arnaudiès, équations diffŕentielles de fonctions de variable réelle ou complexe, Ellipses.
Arnold 1, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles. Mir, 1980.
Arnold 2, Équations différentielles ordinaires. : Champs de vecteurs, groupes à un paramètre, difféomorphismes, flots, systèmes linéaires, stabilités des positions d'équilibre, théorie des oscillations, équations différentielles sur les variétés. Editions Mir, 1974.
Avez , Calcul différentiel. Coll. Maîtrise de mathématiques pures, Masson, 1991.
Borel, Polycopié de l'Université de Provence.
Cartan, Calcul diffrentiel. I. Calcul différentiel dans les espaces de Banach. II. Equations différentielles. Paris : Hermann, 1967 .
Donato, Calcul différentiel pour la licence Cours, exercices et problèmes résolus. Dunod.
Laudenbach Calcul diffrentiel et intgral. Palaiseau : Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
Pham 1, Géométrie et calcul différentiel sur les variétés : cours, études et exercices pour la maîtrise de mathématiques. Paris : Intéréditions, 1992.
Pham 2, Les différentielles. Masson, 1996
Pham 3, Fonctions d'une ou deux variables. Des fonctions élémentaires aux fonctions implicites : chemins de la découverte. Dunod, 2003.
Ramis-Deschamp-Odoux 1, Cours de Mathématiques spéciales, Analyse tome 3, Masson.
Ramis-Deschamp-Odoux 2, Cours de Mathématiques spéciales, Algèbre tome 3, Masson.
Rouvière, Petit guide de calcul différentiel l'usage de la licence et de l'agrégation. Paris : Cassini, 1999.

Livres d'exercices :

Ramis-Deschamp-Odoux, Cours de Mathématiques spéciales, Analyse tome 3, Masson.
Ramis-Deschamp-Odoux, Exercices de Mathématiques spéciales, Analyse tome 3, Masson.
Leichtnam-Schauer, Exercices Corrigés de Mathématiques Oral X Et Ens, Ellipses.
El Mabsout, Calcul différentiel. Exercices. Masson, 1984 (Coll. Maîtrise de Mathématiques Pures).