CHAPITRE 1

Théorème d'inversion locale

1. Le cas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

DÉFINITION 1.1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme local de classe C^k au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ lorsque

- il existe un ouvert U contenant a, tel que $V = f(U)$ est un ouvert
- $f : U \to V$ est une bijection (est par conséquent $f^{-1} : V \to U$ existe)
- $f \in C^k(U)$
- $f^{-1} \in C^k(V)$

(on appelle difféomorphismes les C^1 difféomorphismes)

THÉORÈME 1.2. *Si f est de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $f'(0) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local au voisinage de a.*

Sans perte de généralité nous supposons que $a = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

Première preuve. Puisque f' est une fonction continue, il existe $\epsilon > 0$, tel que dans $]-\epsilon, \epsilon[$ la dérivée $f'x)$ soit strictement positive et par conséquent f soit strictement croissante. Il s'en suit que $f : [-\epsilon, \epsilon] \to [a, b]$, où $a = f(-\epsilon)$, $b = f(\epsilon)$, est une bijection. Soit $g(x) = f^{-1}(x)$, $x = f(g(x))$. On vérifie facilement que g est continue dans $[-\epsilon, \epsilon]$: dans le cas contraire il existe une suite $x_n \to x_0$, telle que (quitte à extraire une sous-suite) $g(x_n) \to y_0$, $y_0 \in [\epsilon, \epsilon]$, $y_0 \neq g(x_0)$. On en déduit que $x_n = f(g(x_n)) \to f(y_0)$ et donc $f(y_0) = x_0$, en contradiction avec $y_0 \neq g(x_0)$. Finalement

$$1 = \lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{(x+y) - x} = \lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{g(x+y) - g(x)} \frac{g(x+y) - g(x)}{(x+y) - x}$$

et puisque

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{g(x+y) - g(x)} = f'(g(x)) \neq 0$$

nous en déduisons que $g'(x)$ existe dans $]-\epsilon, \epsilon[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

La continuité de f', g implique $g = f^{-1} \in C^1(]a, b[)$. $\square$

La démonstration ci-dessus est simple, mais ne se généralise pas en dimension supérieure. Nous allons présenter une deuxième qui est facilement adaptable en dimension quelconque.

Deuxième preuve. D'après la formule de Taylor $f(x) = f'(0)x - F(x)$ où $F(x) = o(|x|)$. Sans perte de généralité nous supposons que $f'(0) = 1$, $f(x) = x - F(x)$. Si la fonction inverse g de f existait, alors $g'(0) = 1$ et $g(x) = x + G(x)$, $G(x) = o(|x|)$ et $x = f(g(x)) = g(x) - F(g(x)) = x + G(x) - F(x + G(x))$. Nous en déduisons que

$$F(x + G(x)) = G(x). \tag{1.1}$$

Si nous pouvions résoudre l'équation "fonctionnelle" (1.1), le théorème serait démontré (on prouve aisément que G est de classe C^1). On remarque que G est le point fixe de l'application

$$\Phi : G \to F \circ (id + G) \tag{1.2}$$

Nous allons utiliser le résultat fondamental suivant (voir exercice 6, feuille d'exercices 1)

THÉORÈME 1.3 (Théorème du point fixe). *Soit (E, ρ) un espace métrique complet et $\Phi : E \to E$ une application "contractante", c'est à dire il existe une constante $c < 1$ telle que*

$$\rho(\Phi(x), \Phi(y)) \leq c\rho(x, y), \forall x, y \in E.$$

Alors $\forall x_0 \in E$ la suite $x_n = \Phi^n(x_0)$ converge vers le point fixe unique y de Φ :

$$x_n \to y, \Phi(y) = y.$$

Démonstration :

> Puisque $\rho(\Phi^{n+1}(x_0), \Phi^n(x_0)) < c^{n-1}\rho(x_1, x_0)$ on en déduit que la suite (x_n) est de Cauchy et donc elle converge (E est complet).Soit $x_n \to y$. Alors $\Phi(x_n) \to \Phi(y)$ (Φ est continue) et $\Phi(x_n) = x_{n+1} \to y$ ce qui implique $\Phi(y) = y$. L'unicité est maintenant évident : si $\Phi(y) = y$, $\Phi(x) = x$, alors $\rho(x, y) = \rho(\Phi(x), \Phi(y)) < c\rho(x, y)$ et donc $\rho(x, y) = 0$, $x = y$.

Soit

$$E = \{G \in C^0([-\epsilon, \epsilon]) : |G(x)| \leq |x|\}.$$

E est un espace vectoriel normé avec la norme $\|G\| = sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]}|G(x)|$. De plus il est complet (le théorème suivant a été prouvé au premier semestre : *toute suite uniformément convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue*). Pour appliquer le Théorème du point fixe nous devons vérifier que Φ est contractante. Pour cela nous supposons que ϵ est si petit que

- la fonction F est définie dans $] - 2\epsilon, 2\epsilon[$
- $|F(x)| < |x|/2$, $\forall x \in] - 2\epsilon, 2\epsilon[$

Nous en déduisons que $\Phi(G(x)) = F(x + G(x))$ est bien définie $\forall x \in [-\epsilon, \epsilon]$ et

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| = \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |F(x + G_1(x)) - F(x + G_1(x))|$$

$$= \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |F'(\xi(x)|.|G_1(x) - G_2(x)|, \xi(x) \in]x + G_1(x), x + G_1(x)[$$

Puisque $F'(0) = 0$ et F est continue en $x = 0$ nous pouvons supposer que $\epsilon > 0$ est si petit que $\sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} F'(x) < c < 1$. Il s'en suit que

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| \leq c \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |G_1(x) - G_2(x)| = c \|G_1 - G_2\|$$

et donc Φ est une application contractante. D'après le Théorème du point fixe il existe une fonction unique $G \in E$ telle que $\Phi(G) = G$ et par conséquent $g(x) =$

$x + G(x)$ est l'inverse à $f(x) = x - F(x)$: $f(g(x) = x$, $\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[$. De plus g est dérivable, car

$$1 = \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{x+\delta-x} = \frac{f(g(x+\delta)) - g(x)}{g(x+\delta)-g(x)} \frac{g(x+\delta)-g(x)}{x+\delta-x}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{g(x+\delta)-g(x)} = f'(g(x).$$

Il s'en suit que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{g(x+\delta)-g(x)}{(x+\delta-x)} = 1/f'(g(x),$$

c'est à dire g est dérivable, $g'(x) = 1/f'(g(x)$ et $g \in C^1(]-\epsilon, \epsilon[)$.

De la même manière on prouve que, étant donné une fonction g de classe C^1 au voisinage de 0, il existe une fonction h de de classe C^1 au voisinage de 0, telle que $g(h(x)) = x$. Nous avons

$$g(h(x)) = x \Rightarrow f(g(h(x))) = f(x) \Rightarrow h(x) = f(x).$$

Ainsi, $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ et g est la fonction inverse de f. En particulier f est bijective (localement) et donc g est unique.□

2. Le cas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, n > 1$

Définition 2.1. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local de classe C^k au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ lorsque

- il existe un ouvert U contenant a, tel que $V = f(U)$ est un ouvert
- $f : U \to V$ est une bijection (est par conséquent $f^{-1} : V \to U$ existe)
- $f \in C^k(U)$
- $f^{-1} \in C^k(V)$

(on appelle difféomorphismes les C^1 difféomorphismes)

Théorème 2.2. *Si f est de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ et* $\det Jf(a) \neq 0$, *alors f est un difféomorphisme local au voisinage de a.*

Preuve. Il s'agit d'adapter la deuxième preuve dans le cas $n = 1$ ci-dessus au cas $n > 1$. Puisque f est de classe C^1 au voisinage de a, d'après la formule de Taylor

$$f(a + x) = f(a) + Jf(a).x + o(\|x\|).$$

Sans perte de généralité nous supposons que $a = f(a) = 0 \in R^n$. L'application linéaire $x \to Jf(a).x$ est un isomorphisme, car $\det Jf(a) \neq 0$. En remplaçant x par $Jf(a).x$ nous pouvons supposer aussi que

$$f(x) = x - F(x), \text{ où } F(x) = o(\|x\|).$$

Comme dans le cas $n = 1$, nous allons construire une application inverse de la forme $g(x) = x + G(x)$, $G(x) = o(\|x\|)$. Pour cela nous allons utiliser le Théorème du point fixe pour résoudre l'équation fonctionnelle (1.2).

Soit

$$E = \{G \in C^0(\overline{B(0,\epsilon)}) : \|G(x)\| \leq \|x\|\}, \overline{B(0,\epsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\}.$$

E est un espace vectoriel normé avec la norme $\|G\| = sup_{x\in\overline{B(0,\epsilon)}} \|G(x)\|$. De plus il est complet (à justifier). Pour appliquer le Théorème du point fixe nous devons vérifier que Φ est contractante. Pour cela nous supposons que ϵ est si petit que

- la fonction F est définie dans la boule ouverte $B(0, 2\epsilon)$
- $\|F(x)\| < \|x\| /2$, $\forall x \in]B(0, 2\epsilon)$

Nous en déduisons que $\Phi(G(x)) = F(x + G(x))$ est bien définie $\forall x \in \overline{B(0, \epsilon)}$ et

$$\begin{aligned}\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| &= \sup_{x \in \overline{B(0,\epsilon)}} |F(x + G_1(x)) - F(x + G_1(x))| \\ &\leq \sup_{\xi \in \overline{B(0,2\epsilon)}} \|DF(\xi)\| . \sup_{x \in \overline{B(0,\epsilon)}} \|G_1(x) - G_2(x)\|\end{aligned}$$

(nous venons d'utiliser le Théorème d'accroissements finis).

Puisque $DF(0) = 0$ et F est continue en $x = 0$ nous pouvons supposer que $\epsilon > 0$ est si petit que $\sup_{\xi \in \overline{B(0,\epsilon)}} \|DF(\xi)\| < c < 1$. Il s'en suit que

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| \leq c \sup_{x \in \overline{B(0,\epsilon)}} \|G_1(x) - G_2(x)\| = c \|G_1 - G_2\|$$

et donc Φ est une application contractante. D'après le Théorème du point fixe il existe une fonction unique $G \in E$ telle que $\Phi(G) = G$ et par conséquent $f(g(x) = x$, $\forall x \in \overline{B(0, \epsilon)}$ où $g(x) = x + G(x)$. De la même manière on prouve que, étant donné une application g de classe C^1 au voisinage de 0, il existe une application h de de classe C^1 au voisinage de 0, telle que $g(h(x)) = x$. Nous avons

$$g(h(x)) = x \Rightarrow f(g(h(x))) = f(x) \Rightarrow h(x) = f(x).$$

Ainsi, $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ et g est l'application inverse de f. En particulier f est bijective (localement) et donc g est unique.

Finalement il nous reste à prouver que g est localement de classe C^1. Nous avons

$$\xi = f(g(x + \xi)) - f(g(x)) = Jf(g(x)).(g(x + \xi) - g(x)) + o(g(x + \xi) - g(x)).$$

$Jf(x)$ est continue enx, $\det Jf(0) \neq 0$ et donc $\det Jf(x) \neq 0$ dans un voisinage de 0. Nous déduisons

$$g(x+\xi)-g(x) = Jf(g(x))^{-1}.\xi - Jf(g(x))^{-1}o(g(x+\xi)-g(x)) = Jf(g(x))^{-1}.\xi + o(\xi).$$

Il s'en suit que g est différentiable en x et

$$Dg(x).\xi = Jf(g(x))^{-1}.\xi$$
$$Jg(x) = Jf(g(x))^{-1}.$$

Puisque $Jf(g(x))^{-1}$ est continue nous en déduisons que g est de classe C^1 au voisinage de 0. $\square$

CHAPITRE 2

Théorème des fonctions implicites

1

Soit

$$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x,y) \mapsto f(x,y), x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$$

une application de classe C^1 au voisinage de $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Soit

$$J_y(f)(a,b) = (\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b))_{i,j}$$

la matrice Jacobienne de la fonction $y \mapsto f(x,y)$: c'est une matrice $n \times n$.

THÉORÈME 1.1. *Si* $f(a,b) = 0$ *et* $\det J_y(f)(a,b) \neq 0$*, alors il existe une voisinage* $U \subset \mathbb{R}^m$ *de* a *et une unique fonction* $y(x)$ *de classe* $C^1(U)$*, telle que*

$$f(x, y(x)) = 0, \forall x \in U.$$

Preuve dans le cas $m = n = 1$. Soit $f = f(x,y)$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, telle que $J_y(f)(a,b) = f'_y(a,b) \neq 0$. Soit Φ l'application auxiliaire

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)), \Phi_1(x,y) = x, \Phi_2(x,y) = f(x,y).$$

Nous avons

$$Jac(\Phi)(a,b) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'_x(a,b) & f'_y(a,b) \end{pmatrix} = f'_y(a,b) \neq 0.$$

Le Théorème d'inversion locale implique qu'il existe une unique application inverse Φ^{-1} de classe C^1 au voisinage de (a,b). Si

$$\Phi(x,y) = (z,t) = (x, f(x,y))$$

alors l'application inverse est définie par

$$x = z, y = y(z,t), f(z, y(z,t)) = t$$

et par conséquent $f(x, y(x,t)) = t$. Si l'on pose $t = 0$ et $y(x) = y(x,0)$ alors

$$f(x, y(x)) = 0$$

au voisinage de (a,b) et $y(.)$ est une fonction de classe C^1. L'unicité de $y(z)$ est une conséquence du Théorème d'accroissements finis. Soit $y_1(x), y_2(x)$ deux fonctions de classe C^1 au voisinage de (a,b) telles que $f(x, y_1(x)) = f(x, y_2(x))$. Il existe $\xi \in]y_1(x), y_2(x)[$ tel que $f'_y(x,\xi) = 0$ ce qui contredit à la continuité de $f'_y(x,y)$ et $f'_y(a,b) \neq 0$.$\square$

Le cas général $(n > 1)$ est similaire.