M2 IMAT
2009–2010
Analyse de sensibilité

Examen du 16 Décembre 2009 de 7h45 à 9h45

Les notes de cours sont autorisées. Les calculatrices sont autorisées.

1 Rasoirs

Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p < n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$ on pose $x_j = j - \frac{n+1}{2}$. On considère $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$ des polynômes fixés tels que :

- degré$(\psi_i) = i, \ \forall 0 \leq i \leq p$
- $\sum_{j=1}^{n} \psi_i(x_j)\psi_k(x_j) = 0, \ \forall 0 \leq i \neq k \leq p$

On a en vue d'étudier le modèle de régression

$$Y_j = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \psi_i(x_j) + \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont indépendantes es et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \sigma^2$ sont des paramètres inconnus.

1. Pourquoi un tel plan d'expériences se révèle intéressant ?
2. Estimer les paramètres de ce modèle.
3. Ecrire un test de niveau α de "$\lambda_p = 0$" contre "$\lambda_p \neq 0$".

   Le revenu net par action de la compagnie Gillette pour les années 57 à 64 est le suivant :

Année (z_j)	:	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964
Revenu en \$ ($Y_j(\omega)$)	:	0,93	0,99	1,11	1,33	1,52	1,60	1,47	1,33

   On pose $x_j = z_j - 1960,5$ puis $\psi_0(x) = 1, \psi_1(x) = 2x$ et $\psi_2(x) = x^2 - 21/4$.
4. Vérifier brièvement que le choix ci-dessus de $x_j, \psi_0, \psi_1, \psi_2$ rentre dans le cadre décrit plus haut.
5. En supposant que $Y_j = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \psi_i(x_j) + \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq 8$ avec $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, estimer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et σ^2. Tester si $\lambda_2 = 0$.
6. Faire une prévision pour le revenu net par action en 1965.

   N.B. Pour faciliter les calculs, on indique les valeurs numériques suivantes :
   $\sum_j \psi_1^2(x_j) = \sum_j \psi_2^2(x_j) = 168$ $\sum_j Y_j^2(\omega) = 13,65$ $\sum_j \psi_0(x_j)Y_j(\omega) = 10,28$
   $\sum_j \psi_1(x_j)Y_j(\omega) = 6,86$ $\sum_j \psi_2(x_j)Y_j(\omega) = -4,1$.

2 Krikri

1. Soit Z_1 une variable aléatoire de densité $f_{Z_1}(z) := \frac{3}{4}(1-x^2)$ sur $]-1,1[$ et Z_2 une variable de loi uniforme sur $]-1,1[$. Montrer que les fonctions caractéristiques de ces variables sont :

$$\varphi_{Z_1}(t) := \mathbb{E}(e^{itZ_1}) = \frac{3}{t^3}(\sin t - t\cos t) \text{ et } \varphi_{Z_2}(t) := \mathbb{E}(e^{itZ_2}) = \frac{\sin t}{t}, \quad (t \in \mathbb{R}_*).$$

2. Expliquer pourquoi les fonctions φ_{Z_1} et φ_{Z_1} sont des fonctions de covariance.
3. On considère sur $\mathbb{R}$ les processus gaussiens centrés $(X_t^1)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(X_t^2)_{t\in\mathbb{R}}$ de fonction de covariance respective φ_{Z_1} et φ_{Z_2}. Soit x_0 un réel donné. On observe $X_0^j = x_0$ $(j = 1,2)$. Pour t un réel non nul, déterminer la loi de X_t^j $(j = 1,2)$ connaissant cette observation. Pour t réel, tracer la fonction de krigeage (l'espérance de cette loi conditionnelle).

3 Sensibilité

On considère la relation entrée sortie suivante :

$$Y = \cos(X_1)X_2^2 + \cos(X_2)X_1^2. \tag{1}$$

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 sont indépendantes. X_1 a la densité h_{Z_1} décrite au paragraphe précédent. X_2 est une variable aléatoire de loi gaussienne standard. Si X est une variable aléatoire, on note φ_X sa fonction caractéristique.

1. Montrer que, pour t réel et $i = 1, 2$, $\mathbb{E}[\cos(tX_i)] = \varphi_{X_i}(t)$.
2. Exprimer, pour t réel, $i = 1, 2$ $j = 0, 2$ et $k = 1, 2$, $\mathbb{E}[X_i^j \cos^k(tX_i)]$ en fonction de φ_{X_i} et de ses dérivées.
3. Calculer les indices de Sobol du 1er ordre pour le modèle (1).
4. Quelle variable d'entrée a le plus d'influence sur les fluctuations de Y ?