

TP du 25 octobre 2012 de 8h à 12h

## TP SCILAB

### 1 Introduction à SCILAB

SCILAB est un langage interprété c'est-à-dire que l'on peut exécuter directement des instructions dans la fenêtre où se trouve le prompt `-->` ou exécuter une suite d'instructions depuis un fichier `toto.sci` en utilisant la commande `exec('toto.sci')`. Dans ce cas, il faut veiller à être dans le dossier où est stocké le fichier `toto.sci`. On peut s'orienter et changer de répertoire en utilisant les commandes : `pwd` y `cd`. Il y a un éditeur inclus dans SCILAB. Quelques instructions pour démarrer :

- `grand` permet la génération de réalisations indépendantes d'une loi. Par exemple, `x=grand(100,1,'nor',0,1)` génère un vecteur `x` de 100 lignes de gaussiennes standard.
- `clear` efface toutes les variables de l'espace de travail.
- `whos` donne toutes les variables de l'espace de travail.
- `help toto` donne de l'aide sur la commande SCILAB `toto`.
- `save`, `load` permet la sauvegarde et la lecture de variables (voir l'aide).

#### Un petit exemple : matrices aléatoires

- Distribution semi-circulaire de Wigner

```
//ley de wigner
clear;
n=input('dimension de la matrice');
// generacion de una matrice nxn entradas gaussianas estandar
a=grand(n,n,'nor',0,1);
//symetrizacion
asym=(a+a')/sqrt(2);
//normalizacion
nasym=asym/sqrt(n);
//calculo de las autovalores
lam=spec(nasym);
//distribucion empirica de las autovalores
nclass=round(sqrt(n));
h=figure();
histplot(nclass,lam);
//distribucion asimptotica
x=-2:0.001:2;
y=(1/(2*%pi))*sqrt(4-x.*x);
plot(x,y);
//calculo de la media y varianza de la distribucion empirica
m=mean(lam);
sig=variance(lam);
disp('moyenne empirique',m);
disp('variance empirique',sig);
```
- Distribution de Pastur Marchenko

```

//ley de Pastur Marchenko
clear;
m=input('nombre de ligne de la matrice');
//escoger m>n
n=input('nombre de colonnes de la matrice');
// generacion de una matrice nxp entradas gaussianas estandar
a=grand(m,n,'nor',0,1);
//transformacion en matrice de Wishart
asym=a'*a;
//normalizacion
nasym=asym/n;
//calculo de las autovalores
lam=spec(nasym);
//distribucion empirica de las autovalores
nclass=round(sqrt(n));
h=figure();
histplot(nclass,lam);
//distribucion asimpotica
l=m/n;
s1=(1-sqrt(l))^2;
s2=(1+sqrt(l))^2;
x=s1:0.01:s2;
y1=x.^(-1);
y2=sqrt(4*l-(x-(1+l)).^2);
y3=y1.*y2;
y=(1/(2*pi))*y3;
plot(x,y);
//calculo de la media y varianza de la distribucion empirica
moy=mean(lam);
sig=variance(lam);
disp('moyenne empirique',m);
disp('variance empirique',sig)
- Loi uniforme sur le tore
//ley uniforme sobre el toro
clear;
n=input('dimension de la matrice');
// generacion de una matrice nxn entradas gaussianas estandar
a=grand(n,n,'nor',0,1);
//symetrizacion
asym=(a+a')/sqrt(2);
//normalizacion
nasym=asym/sqrt(n);
//calculo de las autovalores y autovectores
[x,lamb]=spec(nasym);
//calculo de los autovalores de x
lamb=spec(x);
//parte real y imaginaria de los autovalores
lambr=real(lamb);
lambi=imag(lamb);
//representacion en el plano complejo
f=figure();
plot(lambr,lambi,'+');

```

## 2 Choix de Modèle

On considère le modèle de régression simple :

$$Y_i := \sum_{j=1}^{10} \theta_j^* x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1 \dots N.$$

Où  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1 \dots N$  sont des gaussiennes centrées indépendantes et de même variance  $\sigma_*^2$ . On générera ce modèle en utilisant comme regressseurs  $(x_{ij})$  des réalisations indépendantes de variables uniformes sur  $[-1, 1]$  qui seront fixées une bonne fois pour toute (générer ces variables avec  $N = 750$  puis sauver). On se placera dans le cas où très peu des paramètres  $\theta_j^*$  sont non nuls (prendre juste 2, 3 ou 4 paramètres non nuls). Mettre en place les techniques de choix de modèles étudiées en cours pour trouver le *meilleur* modèle. On rappelle les différents critères :

–  $C_p$ -Mallows

$$C_p(m) = \frac{\widehat{\sigma_{(m)}^2}}{\widehat{\sigma^2}} + 2 \frac{|m|}{N},$$

– AIC corrigé

$$AIC(m) = \log \left( \widehat{\sigma_{(m)}^2} \right) + \frac{N + |m| + 1}{N - |m| - 3},$$

– BIC

$$AIC(m) = \log \left( \widehat{\sigma_{(m)}^2} \right) + \frac{\log N}{N} |m|.$$

Afin d'explorer facilement les 1024 modèles on construira une liste aléatoire de 1024[log 1024] modèles obtenue par la stratégie du *collectionneur*!!.

## 3 Dantzig contre Cramér

Soit le système linéaire  $b = Ax$  où  $x$  est un vecteur de taille  $p$  et  $s$ -sparse c'est-à-dire que le nombre de composantes non nulles de  $x$  est  $s$ .  $b$  est de taille  $n$  avec  $n \ll p$ . Pour fixer les idées, on peut par exemple prendre  $n = 20$ ,  $p = 75$  et  $s = 3, 5, 6$ . D'un point de vue théorique, il est suffisant de satisfaire

$$s \leq \frac{n}{2 \log(p/n)}.$$

Il faut d'abord simuler la matrice  $A$ . Le plus simple est de prendre une matrice gaussienne avec des entrées standard et de normaliser. Remplir  $x$  avec des zéros et choisir au hasard les  $s$  composantes non nulles que l'on choisira également au hasard avec la loi gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$ . Reconstruire le vecteur  $x$  en minimisant la norme  $l_1$  sous la contrainte  $b = Ax$ . Pour cela on utilisera la fonction **karmarkar**. Cette fonction minimise une forme linéaire sous une contrainte linéaire. Une astuce consiste alors à écrire, pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i = x_i^+ - x_i^-$  où  $x_i^+$  y  $x_i^-$  sont tous les deux positifs. Ainsi la norme  $l_1$  de  $x$  est  $\sum_{j=1}^n (x_i^+ + x_i^-)$ . Commandes utiles pour cet exercice :

- concatenation de deux matrices  $a$  et  $b$  en une matrice  $c$   
`c=[a' b'] ;`  
`c=c' ;`
- matrices constantes de uns ou de zéros  
`a=ones(10,10) ;`  
`b=zeros(10,10) ;`

Pour chaque valeur de  $s$  faire 100 essais et calculer le nombre de fois où la reconstruction est correcte.