UPS TOULOUSE III **Le 21/02/2019**
M1 MAPI3 2018

Partiel
Simulations aléatoires

Durée 2 heures

Notes manuscrites de cours autorisées

1 Un convexe de $\mathbb{R}^2$

On considère le sous ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{C} := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq x, \ x \in]0,1[\right\}.$$

On pose ensuite, pour $(x,y)^T \in \mathcal{C}$, $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = \frac{y-x^2}{x(1-x)}$. Soit $(X,Y)^T$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ uniformément distribué sur $\mathcal{C}$. C'est-à-dire que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}\left[(X,Y)^T \in B\right] = K \int_{B\cap\mathcal{C}} dxdy, \ (K > 0).$$

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{C}$.
2. Montrer que la constante K vaut 6.
3. Montrer que $p(X,Y)$ et $q(X,Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes et que $q(X,Y)$ a la loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $p(X,Y)$ a pour densité sur $]0,1[$ $6x(1-x)$.
4. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $p(X,Y)$. Soit pour $t \in]0,1[$, $F(t) = t^2(3-2t)$. Montrer que pour $\xi \in]0,1[$, il existe un unique $t_\xi \in]0,1[$ avec $F(t_\xi) = \xi$. En déduire une méthode pour simuler une réalisation de même loi que $p(X,Y)$ à partir d'une réalisation de loi uniforme sur $]0,1[$.
5. Soit φ une fonction mesurable et bornée sur $\mathcal{C}$. On souhaite estimer par simulation numérique $m = \mathbb{E}[\varphi(X,Y)]$ à partir d'un échantillon de variables i.i.d. (U_i) de loi uniforme sur $]0,1[$.
   (a) La méthode du rejet
   On pose $T_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$

   $$T_n := \inf\{i > T_{n-1} : (U_{2i-1}, U_{2i})^T \in \mathcal{C}\}.$$

   On pose ensuite, $S_n := T_n - T_{n-1}$. Montrer que les variables (S_n) sont i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}_*$ et que pour $k \in \mathbb{N}_*$, on a

   $$\mathbb{P}(S_n = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

Que vaut $\mathbb{E}(S_n)$? Montrer que la suite de vecteurs aléatoires $((U_{2T_i-1}, U_{2T_i})^T)$ est i.i.d. de même loi que $(X,Y)^T$. En moyenne, combien faut-il générer de couples de variables uniforme pour obtenir une réalisation de même loi que $(X,Y)^T$? Pour estimer m, on propose d'utiliser

$$\widehat{m}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi\left((U_{2T_i-1}, U_{2T_i})^T\right).$$

Montrer que $\widehat{m}_n$ converge presque sûrement vers m.

(b) Une méthode directe
En utilisant les questions 3) et 4), montrer que le vecteur aléatoire

$$(t_{U_1}, U_2 t_{U_1}(1-t_{U_1}) + t_{U_1}^2)^T$$

a la même loi que $(X,Y)^T$. En déduire un second estimateur Monte Carlo $\widehat{\widehat{m}}_n$ de m bâti sur la suite (U_i).

(c) Entre $\widehat{m}_n$ et $\widehat{\widehat{m}}_n$ qui faut il choisir pour limiter le nombre de variables uniformes générées ? On justifiera sa réponse.

(d) Dans le cas où $\varphi(x,y) = xy$, écrire un petit programme pour calculer $\widehat{m}_n$ et $\widehat{\widehat{m}}_n$ qui étaye votre réponse à la question précédente.

2 Markovian or not that the question

On dispose de deux pièces, une non pipée, et une qui est truquée et est *Face* des deux côtés. On commence par en choisir une des deux au hasard (de manière uniforme) et ensuite on lance celle-là une infinité de fois.

1. On observe *Face* au n-ième lancer. Expliquer pourquoi la probabilité qu'on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer ne vaut ni $1/2$ ni $3/4$. Que vaut cette probabilité ?
2. On observe *Pile* au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer ?
3. On observe *Pile* au $(n-1)$-ième lancer et *Face* au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne *Face* au $(n+1)$-ième lancer ?
4. La suite des résultats des lancers obtenus forme-t-elle une chaîne de Markov ?
5. Ecrire un petit programme de simulation qui illustre cet exercice.