

Examen de Statistique

Durée 2 heures

Les notes manuscrites de cours sont autorisées

1 Test des Rangs

Pour traiter cet exercice on utilisera la table fournie en dernière page. On considère les deux échantillons indépendants suivants :

Échantillon 1, X

0.19, -0.01, 1.08, 1.47, 0.60

Échantillon 2, Y

-0.77, -3.33, 0.04, 0.49, 0.38

1. Tester à l'aide de la statistique de Wilcoxon (somme des rangs) l'égalité des lois de X et Y .
2. Tester à l'aide de la statistique de Wilcoxon (somme des rangs) l'égalité des lois de $|X|$ et $|Y|$ contre l'hypothèse alternative : *La loi de $|Y|$ charge plus les grandes valeurs que celle de $|X|$.*

2 Série Chronologique

On considère le processus $AR(1)$ de Bernoulli défini par

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + \varepsilon_{n+1}, \quad (n \geq 0).$$

Ici (ε_n) est une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi de Bernoulli d'espérance $\frac{1}{2}$. X_0 est indépendante de la suite (ε_n) et est de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. Montrer que la densité de X_1 est

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}_{[0, \frac{\theta}{2}]} + \mathbf{1}_{[1, 1 + \frac{\theta}{2}]}).$$

2. Montrer que pour $\theta = 2$, X_1 a la même loi que X_0 .

3. À partir de maintenant, on suppose que $\theta = 2$. Pour $n \geq 0$, quelle est la loi de X_n ? Que valent $\mathbb{E}(X_n)$ et $\text{Var } X_n$?
4. Montrer que, pour $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \varepsilon_{n+1-j} + X_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

5. En utilisant (1), calculer la fonction de covariance du processus (X_n) . Ce processus est-il faiblement stationnaire? Soit n et k deux entiers, on pose

$$r(k) = \mathbb{E}(X_n X_{n+k}) - 1.$$

6. On pose, pour $n \geq 1$

$$Y_n = a^* + (-1)^n b^* + (X_n - 1).$$

Où a^* et b^* sont des paramètres réels. Soit $N \geq 1$, on observe le processus (Y_n) jusqu'à l'instant $2N$ et on pose, pour $n = 1, \dots, N$

$$W_n = \frac{1}{2}(Y_{2n-1} + Y_{2n}).$$

- (a) Quelles sont la composante périodique et la tendance du processus (Y_n) ?
- (b) Pour estimer a^* à partir du processus sans période (W_n) on considère l'estimateur des moindres carrés \hat{a}_N . Montrer que \hat{a}_N n'est rien d'autre que la moyenne empirique de W_1, \dots, W_N . Cet estimateur est-il biaisé?
- (c) Déterminer la fonction de covariance du processus (W_n) . Ce processus est-il faiblement stationnaire? Soit $n > 0$ et $k \geq 0$ deux entiers, on pose

$$c(k) = \mathbb{E}(W_n W_{n+k}) - (a^*)^2.$$

- (d) Calculer $\text{Var } \hat{a}_N$ en fonction de la suite $(c(k))$. La suite d'estimateurs (\hat{a}_N) est-elle convergente?

TABLE DES VALEURS CRITIQUES POUR LE TEST UNILATERAL DE WILCOXON MANN WHITNEY

N1 et N2 désignent les tailles des deux échantillons, avec $N1 \leq N2$.

W est la somme des rangs de l'échantillon de taille N1.

Pour un test unilatéral à gauche : est significative, toute valeur de W inférieure ou égale à WS.

Pour un test unilatéral à droite : est significative, toute valeur W supérieure ou égale à W'S

N1	1		2		3		4		5		6		7		8	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
3	--	--	--	--	6	15	--	--								
4	--	--	--	--	6	18	--	--	11	25	--	--				
5	--	--	--	--	7	20	--	--	12	28	10	30				
6	--	--	--	--	3	15	--	--	8	22	--	--	19	36	16	39
7	--	--	--	--	3	17	--	--	8	25	6	27	14	34	11	37
8	--	--	--	--	4	18	--	--	9	27	6	30	15	37	12	40
9	--	--	--	--	4	20	--	--	10	29	7	32	16	40	13	43
10	--	--	--	--	4	22	--	--	10	32	7	35	17	43	13	47
11	--	--	--	--	4	24	--	--	11	34	7	38	18	46	14	50
12	--	--	--	--	5	25	--	--	11	37	8	40	19	49	15	53
13	--	--	--	--	5	27	3	29	12	39	8	43	20	52	15	57
14	--	--	--	--	6	28	3	31	13	41	8	46	21	55	16	60
15	--	--	--	--	6	30	3	33	13	44	9	48	22	58	17	63
16	--	--	--	--	6	32	3	35	14	46	9	51	24	60	17	67
17	--	--	--	--	6	34	3	37	15	48	10	53	25	63	18	70
18	--	--	--	--	7	35	3	39	15	51	10	56	26	66	19	73
19	1	20	--	--	7	37	4	40	16	53	10	59	27	69	19	77
20	1	21	--	--	7	39	4	42	17	55	11	61	28	72	20	80
21	1	22	--	--	8	40	4	44	17	58	11	64	29	75	21	83
22	1	23	--	--	8	42	4	46	18	60	12	66	30	78	21	87
23	1	24	--	--	8	44	4	48	19	62	12	69	31	81	22	90
24	1	25	--	--	9	45	4	50	19	65	12	72	32	84	23	93
25	1	26	--	--	9	47	4	52	20	67	13	74	33	87	23	97

N1	9		10		11		12		13		14		15	
	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%
9	66	105	59	112										
10	69	111	61	119	82	128	74	136						
11	72	117	63	126	86	134	77	143	100	153	91	162		
12	75	123	66	132	89	141	79	151	104	160	94	170	120	180
13	78	129	68	139	92	148	82	158	108	167	97	178	125	187
14	81	135	71	145	96	154	85	165	112	174	100	186	129	195
15	84	141	73	152	99	161	88	172	116	181	103	194	133	203
16	87	147	76	158	103	167	91	179	120	188	107	201	138	210
17	90	153	78	165	106	174	93	187	123	196	110	209	142	218
18	93	159	81	171	110	180	96	194	127	203	113	217	146	226
19	96	165	83	178	113	187	99	201	131	210	116	225	150	234
20	99	171	85	185	117	193	102	208	135	217	119	233	155	241
21	102	177	88	191	120	200	105	215	139	224	123	240	159	249
22	105	183	90	198	123	207	108	222	143	231	126	248	163	257
23	108	189	93	204	127	213	110	230	147	238	129	256	168	264
24	111	195	95	211	130	220	113	237	151	245	132	264	172	272
25	114	201	98	217	134	226	116	244	155	252	136	271	176	280