UPS TOULOUSE III **Le 10/04/2019**
M1 MAPI3 2018-2019

Examen première session
Simulations aléatoires

Durée 2 heures

Notes manuscrites de cours autorisées

1 Chaîne de Markov

Soit $p, q \in]0,1[$, on considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $\{1,2\}$, d'état initial 1 et de matrice de transition $\Pi := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$

1. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique. Cette chaîne est-elle récurrente ?
2. Calculer son unique probabilité invariante.
3. Pour $n \geq 1$, on considère maintenant le vecteur aléatoire $Y_n := \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états à préciser.
   (b) Quelle sont sa matrice de transition Σ et sa loi initiale ?
   (c) On suppose $p = 1/2$ et $q = 1/4$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est récurrente et calculer sa probabilité invariante. Déterminer la limite presque sûre, quand n tend vers l'infini, de $n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} X_j X_{j+1}$.
   (d) Écrire un petit programme qui illustre la question précédente.

2 Fractional Brownian motion

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On pose pour $t \geq 0$,

$$Z_t := \int_0^t (t-x)^{\alpha-\frac{1}{2}} dB_x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

1. Montrer que Z_t est bien défini et donner sa loi.
2. Déterminer la fonction de covariance de $(Z_t)_{t\geq 0}$. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale mise en jeu.
3. On suppose $\alpha = 0.5$, pour $n \geq 0$, on considère la série chronologique $W_n := Z_{n+1} - Z_n$. Montrer que (W_n) est une suite stationnaire gaussienne.
4. Donner un petit programme permettant de simuler une réalisation du vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$.

3 Branching

Soit $0 \leq \theta \leq 1$, on considère le processus de branchement dont la loi de reproduction est $\mathbb{P}(0 \text{ descendant}) = \theta$ et $\mathbb{P}(3 \text{ descendants}) = 1 - \theta$. Déterminer la probabilité d'extinction en fonction du paramètre θ. Dans le cas où $\theta = 1/3$, écrire un petit programme qui permet d'estimer cette probabilité par une méthode de Monte Carlo.