

Examen de Probabilités 1ère session-L3 SID

Jeudi 21 Décembre 2017

Durée 2 heures

Notes de cours manuscrites et calculatrices autorisées

1 Discret

Soit l un entier naturel non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, l\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = j) = Cj, \quad C > 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

1. Que vaut la constante C ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X . On rappelle les formules

$$\sum_{i=1}^l i^2 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^l i^3 = \frac{l^2(l+1)^2}{4}.$$

3. On suppose que $l = 3$. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. de même loi que X . On pose $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Pour $n = 100$, donner une évaluation des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq 2), \quad \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq 2.5), \quad \mathbb{P}(\bar{X}_n \geq 2.8).$$

On expliquera soigneusement les méthodes d'approximation.

2 Binochio

2.1 ESA

L'ESA doit donner son avis sur un projet de navette spatiale. L'équipement électronique de la navette comporte 3 millions de pièces distinctes. Chaque pièce a une chance sur 12 millions de tomber en panne, ce qui entraîne immédiatement l'explosion de la navette. Que pensez-vous du projet ?

2.2 Hexabingauss

On considère 10000 chiffres hexadécimaux pris au hasard. Calculer la probabilité que le chiffre A apparaisse au plus 580 fois ? au moins 750 fois.

Dans les deux exercices qui précèdent, on expliquera soigneusement les méthodes d'approximation.

3 Muette or not

On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0, 1[$.

1. *Preamble.* Soit k un entier naturel non nul. Montrer ou admettre que l'intégrale $\int_0^1 \cos(k\pi x) dx$ est nulle. Par ailleurs on rappelle les formules de trigonométrie,

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 2\cos^2(\theta) - 1, \quad (\theta \in \mathbb{R}), \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta}, \quad (\theta \in [0, \pi]).\end{aligned}$$

2. On pose $Y := (1 + \cos(\pi X))/2$. Montrer que la densité de Y est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}} \mathbf{1}_{]0,1[}(y).$$

3. Sans utiliser sa densité, calculer l'espérance et la variance de Y . En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

4. Soit $z \in [0, 1[$, montrer que l'équation $z = 4y(1-y)$ possède exactement deux solutions y_1 et y_2 avec $0 \leq y_1 < 1/2 < y_2 \leq 1$. En utilisant la méthode de la fonction muette, en déduire que Y et $Z := 4Y(1-Y)$ ont la même loi.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$: $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Pour $x < 0$, utiliser $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.