Modèle gaussien

TD2-MAPI3

2016-2017

1 Simulation d'un vecteur gaussien

Pour $1 \leq d_1 \leq d_2$, soit X_i un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{d_i}$ de moyenne m_i et de matrice de variance covariance Γ_i $(i = 1, 2)$. On suppose que rang $\Gamma_2 \geq$ rang Γ_1.

1. Montrer que l'on peut obtenir une réalisation de même loi que X_1 à partir d'une réalisation de X_2.
2. Dans le cas où $m_2 = 0$ et Γ_2 est l'identité mettre en place deux méthodes pour obtenir une réalisation de même loi que X_1 à partir de X_2.

2 Prévision

Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m := (m_1, m_2, m_3)^T$ et de matrice de variance covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_2 & c_3 \\ c_2 & \sigma_2^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ c_3 & \rho\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose $\det \Gamma \neq 0$.

1. Montrer que la matrice $\tilde{\Gamma} := \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \rho\sigma_2\sigma_3 \\ \rho\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$ est de rang plein.
2. Calculer $\tilde{\Gamma}^{-1}$.
3. Donner le prédicteur optimal de X_1 lorsque l'on observe seulement $(X_2, X_3)^T$.
4. Un agriculteur argentin a modélisé les températures $(T_1, T_2, T_3)^T$, moyennées sur un journée mesurées en trois points de son hacienda comme un vecteur gaussien d'espérance $(25, 25, 25)^T$ et de matrice de variance covariance
$$4\begin{pmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 \\ -\rho & 1 & -\rho \\ \rho^2 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$
Un jour T_1 ne peut pas être mesurée mais T_2 vaut 26 et T_3 vaut 25. On suppose que $\rho = 0.5$ donner une prédiction pour T_1.

3 Filtre de Kalman

Soit X_0 une variable aléatoire gaussienne de moyenne $x_0 \in \mathbb{R}$ et de variance σ_x^2. Soit (ε_n) une suite de variables gaussiennes i.i.d. centrées de variance σ_ε^2 indépendantes de X_0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \\ Y_n = X_n + \varepsilon_n \end{cases}$$

a) Ecrire l'équation de Riccati associé au filtre de Kalman pour ce système dynamique. Résoudre explicitement cette équation.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, déduire de la question précédente l'expression, sous forme récursive, du prédicteur $\widehat{X_n^-}$ obtenu à partir des observation $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$.

c) Résoudre l'équation trouver dans la question b). C'est-à-dire, exprimer $\widehat{X_n^-}$ à partir de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ et des paramètres $x_0, \sigma_x^2, \sigma_\varepsilon^2$.

d) Que se passe-t-il si l'on suppose que σ_x^2 tend vers $+\infty$. Commenter ce résultat.

4 Oscillateur

Pour $\omega > 0$, on considère l'équation différentielle modélisant les oscillations d'un ressort:

$$x''(t) = -\omega^2 x(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1, (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

On pose $y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'on peut réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système d'équations différentielles

$$y'(t) = Ay(t),\ y(0) = y_0. \tag{2}$$

2. Expliciter les quantités A et y_0. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\exp(tA)$.

3. Soit $h > 0$ un pas de discrétisation. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le système dynamique discret

$$\begin{cases} z_{n+1} = Bz_n + \sigma\varepsilon_n \\ w_n = x(nh) + \delta\eta_n \end{cases} \tag{3}$$

   Ici (ε_n) est une suite i.i.d. de vecteurs gaussiens standard de $\mathbb{R}^2$ indépendante de la suite i.i.d. de gaussiennes standard (η_n). σ et δ sont des réels strictement positifs et $B := \exp(hA)$. On suppose que l'on observe uniquement la suite (w_n). Construire le filtre de Kalman permettant la prédiction de la seconde composante de z_n. Comparer à la solution de l'équation différentielle.

5 Processus AR(1)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| < 1$. Soit X_0 une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $(1 - \theta^2)^{-1}$ et (ε_n) une suite i.i.d. de gaussiennes standard. On suppose que la suite (ε_n) et X_0 sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_{n+1} = \theta X_n + \varepsilon_{n+1}.$$

1. Pour $n \geq 1$, écrire la densité jointe de $X_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Calculer la densité jointe de $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

2. Simuler des trajectoires du processus (X_n) par deux méthodes différentes.