Examen final de simulations aléatoires

M1 MAPI3

Jeudi 20 avril 2017 de 10h à 13h

Les programmes pourront être écrits en Python, R, Scilab, MATLAB

In [1]:
```
%matplotlib inline
# coding: utf8
from matplotlib.pyplot import *
from math import *
from numpy import *
from numpy.random import *
from numpy.linalg import *
from scipy.misc import *
import numpy as np, pandas as pd
#from scipy import *
```

Extrêmes droite et gauche

Soit (X_i) une suite i.i.d. de loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$ de densité:

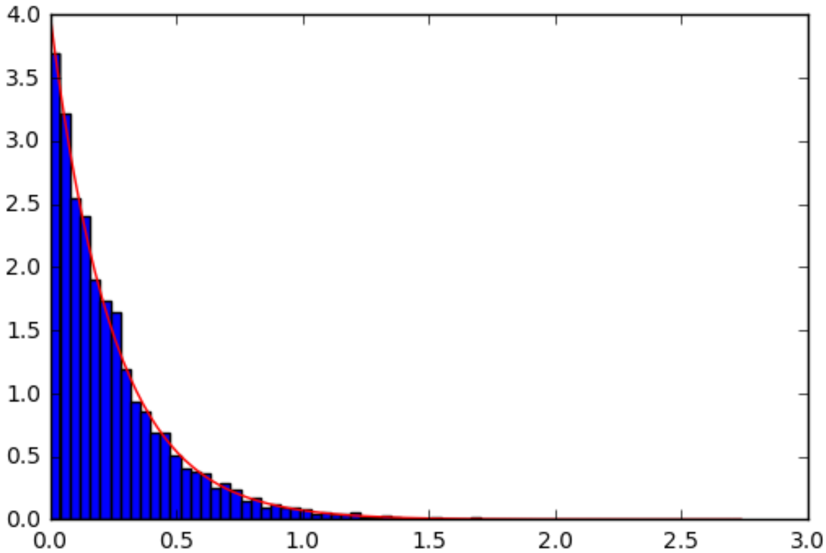
$$f(x) = \frac{C\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)}{x^{1+\alpha}}.$$

On pose $X_{(1)} := \min_{i=1,\cdots,n} X_i$ et $X_{(n)} := \max_{i=1,\cdots,n} X_i$.

1. Calculer la constante C.
2. Pour quelles valeurs de α, X_1 est-elle intégrable? De carré intégrable?
3. Calculer la fonction de répartition et la fonction de quantile de X_1.
4. Montrer que $X_{(1)}$ converge presque sûrement vers 1 quand n tend vers l'infini. Quelle est la limite en loi de $n(X_{(1)} - 1)$?
5. Montrer que $X_{(n)}$ diverge presque sûrement vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
6. Quelle est la limite en loi de $n^{-1/\alpha}X_{(n)}$?
7. Compléter le programme suivant pour illustrer le point 6)

In [2]:
```
N=5000;
n=1000;
alpha=4.;
bibin=int(sqrt(N));
a=-1./alpha;
X = (rand(n,N))**(a);
Xmax=X.max(0);
Xmin=X.min(0);
U=n*(Xmin-1.);
umin=float(min(U));
umax=float(max(U));
hist(U, bins = linspace(umin,umax,bibin), normed = True);
xx=linspace(0,umax,201);
plot(xx,alpha*exp(-xx*alpha) ,'r')
```

Out[2]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fd799feb6d8>]
```



Chaîne de Markov

On considère la marche aléatoire réfléchie (X_n) sur $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

1. Partant de $1, 2, 3$, ou 4, on ne peut faire qu'un pas vers la droite ou un pas vers la gauche avec la même probabilité
2. Partant de 0 (resp. de 5) on peut aller en 1 (resp. en 4) ou rester en 0 (resp. en 5) avec la même probabilité.

1. Ecrire la matrice de transition Π de la chaîne.
2. Montrer que la probabilité uniforme sur E est invariante pour Π.
3. Montrer que, quand N tend vers l'infini, $N^{-1}\sum_{i=0}^{N-1}\cos(\frac{\pi}{2}X_i)$ converge presque sûrement vers $1/6$
4. Compléter le programme suivant pour illustrer le point 3).

In [3]:

```
Pi=np.matrix([[0.5,0.5,0.,0.,0.,0.], [0.5,0.,0.5,0.,0.,0.],[0.,0.5,0.,0.
5,0.,0.],
              [0.,0.,0.5,0.,0.5,0.],[0.,0.,0.,0.5,0.,0.5],[0.,0.,0.,0.,0
.5,0.5]]);
print('Transition puissance 100')
print(Pi**100);
N=10000;
X0=0;
X=zeros([1,N+1]);
X[0,0]=X0;
for i in range(1, N+1):
    p0=Pi[X0-1,0];
    p1=p0+Pi[X0-1,1];
    p2=p1+Pi[X0-1,2];
    p3=p2+Pi[X0-1,3];
    p4=p3+Pi[X0-1,4];
    u=rand(1,1);
    X0=5;
    if u<p0:
        X0=0;
    elif  u<p1:
        X0=1
    elif  u<p2:
        X0=2
    elif u<p3:
        X0=3
    elif u<p4:
        X0=4
    X[0,i]=X0
X=X[0,:];
print(mean(X));
print(1./6.*(1+2+3+4+5))
```

```
Transition puissance 100
[[ 0.16666686  0.16666676  0.16666676  0.16666657  0.16666657  0.16666648
]
 [ 0.16666676  0.16666686  0.16666657  0.16666676  0.16666648  0.16666657
]
 [ 0.16666676  0.16666657  0.16666686  0.16666648  0.16666676  0.16666657
]
 [ 0.16666657  0.16666676  0.16666648  0.16666686  0.16666657  0.16666676
]
 [ 0.16666657  0.16666648  0.16666676  0.16666657  0.16666686  0.16666676
]
 [ 0.16666648  0.16666657  0.16666657  0.16666676  0.16666676  0.16666686
]]
2.49435056494
2.5
```

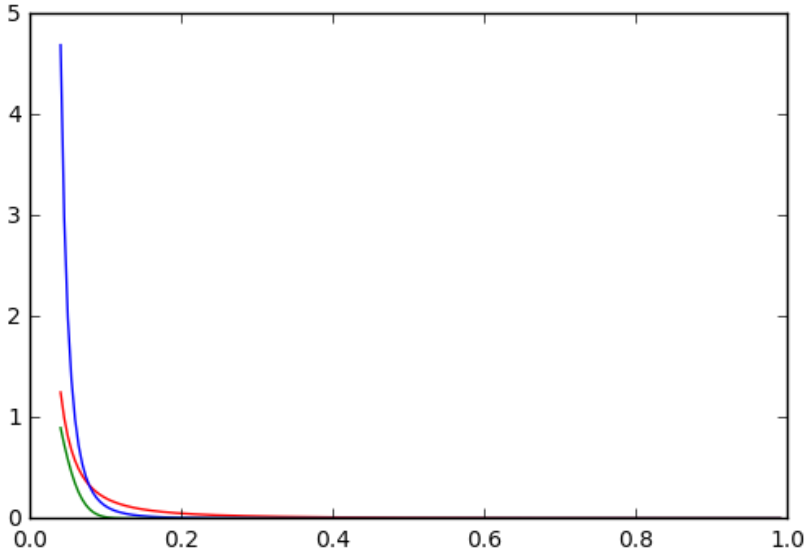
Inégalités de concentration

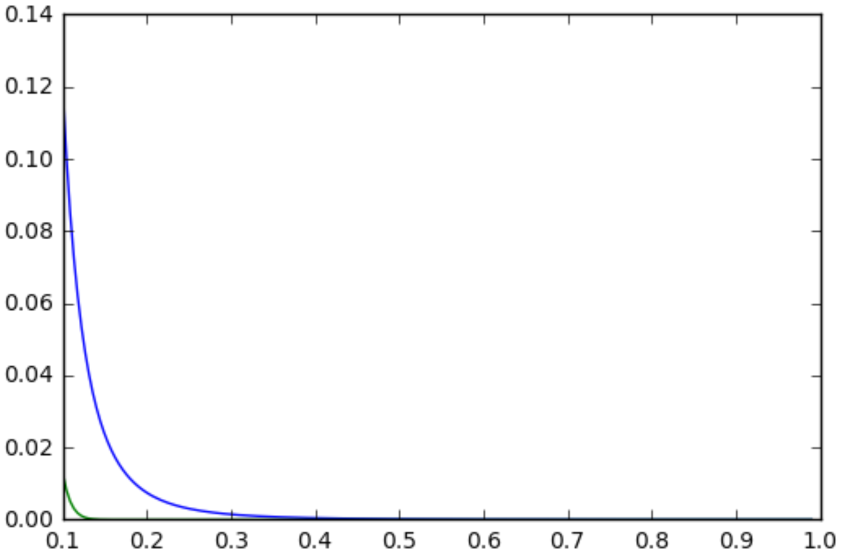
On considère une suite de variable (X_n) i.i.d. et uniformément répartie sur $\{-1, 1\}$. On appelle Y_n la moyenne empirique bâtie à partir des variables $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

1. Que vaut l'espérance de Y_n?
2. Calculer la variance de Y_n et en déduire l'inégalité
$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq t) \leq \frac{1}{nt^2}, \quad (t \in]0, 1[).$$
3. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4\right] = C_n^1 C_4^0 \mathbb{E}(X_1^4) + C_n^2 C_4^2 [\mathbb{E}(X_1^2)]^2 + +C_n^3 C_4^1 \mathbb{E}(X_1^3)\mathbb{E}(X_1).$$
4. Montrer que le moment d'ordre 4 de Y_n vaut $n^{-3} + 3n^{-2} - 3n^{-4}$. En déduire une seconde inégalité de concentration pour Y_n autour de 0.
5. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, calculer la transformée de Laplace $\exp(\psi(\tau))$ de X_1. Montrer que, pour $t \in]-1, 1[$ on a
$$\psi^*(t) := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (t\tau - \psi(\tau)) = t \tanh^{-1}(t) - \log(\cosh(\tanh^{-1}(t))).$$
Ici, $\cosh$ désigne la fonction cosinus hyperbolique et $\tanh^{-1}$ est la fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique.
6. Rappeler rapidement comment on obtient l'inégalité de concentration:
$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq t) \leq 2\exp(-n\psi^*(t)), \quad (t \in]0, 1[).$$
7. Pour $n = 500$, en utilisant les résultats donnés par le programme qui suit discuter du positionement, entre elles, des trois inégalités de concentration précédentes.

In [4]:
```
n=500;
usn=1./n;
usn2=usn**3+3*(usn**2)-3*(usn**4)
t=linspace(0.04,0.99,200);
t2=t*t;
t4=t2*t2;
t5=arctanh(t);
b1=usn*1./t2;
b2=usn2*1./t4
b3=2*exp(-n*t*t5-log(cosh(t5)));
plot(t,b1,'r')
plot(t,b2,'b')
plot(t,b3,'g')
figure(2);
t=linspace(0.1,0.99,200);
t2=t*t;
t4=t2*t2;
t5=arctanh(t);
b1=usn*1./t2;
b2=usn2*1./t4
b3=2*exp(-n*t*t5-log(cosh(t5)));
plot(t,b2,'b')
plot(t,b3,'g')
```

```
Out[4]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fd799f22978>]
```





Pont brownien

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ le processus gaussien centré nul en 0 tel que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = |t-s|, \quad (t, s \in [0,1]).$$

1. Montrer que, pour $t, s \in [0,1]$, on a $\mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \min(t,s)$.
2. Pour $t \in [0,1]$, on pose $X_t := B_t - tB_1$. Montrer que le processus $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est gaussien et centré. Déterminer sa fonction de covariance. Quelle est la valeur de X_1 ?
3. Soit $f(t) = t(1-t)$, $(t \in [0,1])$. On désire émuler cette fonction uniquement en utilisant sa valeur en $1/2$ ($f(1/2) = 1/4$). Pour cela on utilise l'émulateur gaussien
$$\widehat{f}(t) := \mathbb{E}[X_t | X_{1/2} = 1/4], \ (t \in [0,1]).$$
Calculer la fonction $\widehat{f}$. Discuter du choix du processus (X_t) pour émuler la fonction f.