Simulation de variables et vecteurs aléatoires

1 Générateurs Pseudo-Aléatoires.

Le logiciel SCILAB, concurent libre de MATLAB, est un interpréteur. Ce logiciel dispose en particulier de certains outils utiles en probabilités et statistiques comme plusieurs générateurs de nombres aléatoires `grand` permet par exemple la génération de réalisations de variables de uniforme sur l'intervalle sur $[0, 1]$ ou de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Les appels successifs à `grand` fournissent donc des réalisations de suites de variables aléatoires indépendantes.

2 Méthode par Inversion.

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. On appelle inverse généralisée de F, la fonction F^{-1} définie pour tout $y \in]0, 1]$ par $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \, / F(x) \geq y\}$.

Lemme 1. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, alors $F^{-1}(U)$ a même loi que X. De plus, si F est continue sur $\mathbb{R}$, alors $F(X)$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$.

Exercice 1. Utiliser le code SCILAB suivant pour générer N réalisations de variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et de loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $\lambda, c > 0$.

```
N=input('Entrez la taille de l'échantillon N : ');
l=input('Preciser la valeur du parametre lamdda :  ');
c=input('Preciser la valeur du parametre c :  ');
X=grand(N, 1, "unf", 0, 1); Y=-log(X)/l; Z=c*tan(% pi*(X-0.5));
```

Tracer les moyennes empiriques successives de Y et vérifier la loi des grands nombres pour Y. Augmenter le nombre N de réalisations pour affiner la précision. Comparer vos résultats de simulations avec le générateur de loi exponentielle de SCILAB. Que se passe-t-il sur Z ? Quelle est la loi de la moyenne empirique associée à Z ? Conclure.

3 Méthode par Troncature.

Lemme 2. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de fonction de répartition F et soit G la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue Y telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $G(n+1) = F(n)$. Si U est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$, alors la partie entière $[G^{-1}(U)]$ a même loi que X.

Exercice 2. Utiliser le code SCILAB suivant pour générer N réalisations de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, 2, \cdots, a\})$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ ou bien de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - \exp(-\lambda)$ et $\lambda > 0$.

```
N=input('Entrez la taille de l'echantillon N : ');
a=input('Préciser la valeur du parametre a :  ');
```

```
l=input('Préciser la valeur du parametre l :  ');
X=grand(N, 1, "unf", 0, 1); Y=fix(1+a*X); Z=fix(-log(X)/l);
```

Tracer les moyennes empiriques successives de Y et vérifier la loi des grands nombres pour Y. Augmenter le nombre N de réalisations pour affiner la précision. Effectuer le même exercice pour la loi géométrique associée à Z. Comparer vos résultats de simulations avec le générateur de loi géométrique de SCILAB.

4 Lois discrètes à support fini.

Lemme 3. Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des nombres réels tous différents et soit $p_1, p_2, \cdots, p_n$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. On pose $s_0 = 0$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, $s_k = \sum_{i=1}^k p_i$. Soit U est une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{1}_{(s_{k-1} \leq U \leq s_k)}.$$

Alors, X est une variable aléatoire de loi discrète $P = p_1\delta_{x_1} + p_2\delta_{x_2} + \cdots + p_n\delta_{x_n}$.

Exercice 3. Créer un code SCILAB permettant de générer un vecteur aléatoire X contenant N réalisations indépendantes et de même loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où les valeurs $N, n \geq 1$ et $0 < p < 1$ sont affectées par l'utilisateur. Pour N assez grand, vérifier la loi des grands nombres sur les moyennes empiriques successives de X. Comparer vos résultats de simulations avec le générateur SCILAB.

5 Loi Normale.

Lemme 4. Soit (X,Y) un couple aléatoire de $\mathbb{R}^2$. Alors, (X,Y) suit la loi normale $\mathcal{N}(0, I_2)$ si et seulement si $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$ où r et θ sont deux variables aléatoires indépendantes avec r^2 de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$ et θ de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 2\pi])$.

Il découle du lemme 4 que, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, alors $X = \sqrt{-2\,\log U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{-2\,\log U}\sin(2\pi V)$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 4. Utiliser l'algorithme de Box-Muller suivant pour générer N réalisations de variables aléatoires indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où la moyenne $m \in \mathbb{R}$ et la variance $\sigma^2 > 0$ sont affectées par l'utilisateur. Tracer également l'histogramme associé.