# TD 2. Convergences stochastiques et Théorèmes limites

## 1 Loi uniforme

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables i.i.d. de loi uniforme sur $]0, \theta[$ ($\theta > 0$). On pose

$$X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i.$$

1. Montrer que $X_{(n)}$ converge, presque sûrement vers $\theta$.
2. Quelle est la limite en loi de $n(1 - X_{(n)}/\theta)$ ?
3. Montrer que $2n(1/2 - X_{(n)}/\overline{X}_n)$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre 1.
4. Utiliser les deux résultats précédents pour construire deux intervalles de confiance asymptotiques de $\theta$ de risque 0.05.
5. Montrer que $n(\theta^2 - X_{(n)}^2)$ converge en loi vers la loi à préciser.
6. Soit $\varphi$ une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $n(\varphi(\theta) - \varphi(X_{(n)}))$ converge en loi vers une loi à préciser.

## 2 Binomial

On rappelle que si $(z_n)$ est une suite de nombres complexes qui converge vers $z$ alors

$$\lim_{n\to\infty} (1 + z_n/n)^n = \exp(z).$$

Soit $X_n$ une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in ]0, 1[$.

1. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de $X_n$. En déduire que $\frac{X_n}{n}$ converge en probabilité vers $\theta$.
2. Soit $(\theta_n)$ une suite de réels strictement positive qui décroît vers 0. On considère les polynômes $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x(x-1)$, $P_3(x) = x(x-1)(x-2)$ et $P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $G(x) = \mathbb{E}(x^{X_n})$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[P_i(X_n)]$ pour $i = 0, \cdots, 4$.
3. Soit $Q(x) = (x - n\theta)^4$. Ecrire $Q$ comme une combinaison linéaire des polynômes $P_i$, $i = 0, \cdots, 4$.
4. En utilisant les questions précédentes montrer que $\mathbb{E}[Q(X_n)] = O(n^2)$ et en déduire que $\frac{X_n}{n}$ converge en presque sûrement vers $\theta$.
5. Montrer que $[\theta(1-\theta)]^{-1/2}\sqrt{n}(\frac{X_n}{n} - \theta)$ converge en loi vers la loi normale standard.
6. Montrer que $\frac{X_n}{n}(1 - \frac{X_n}{n})$ converge presque sûrement vers $\theta(1-\theta)$. Pour $\theta \neq 1/2$, montrer que $\sqrt{n}(\frac{X_n}{n}(1 - \frac{X_n}{n}) - \theta(1-\theta))$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on précisera la variance. Que se passe t-il pour $\theta = 1/2$ ?
7. Quelle est la limite en loi de $[\frac{X_n}{n}(1 - \frac{X_n}{n})]^{-1/2}\sqrt{n}(\frac{X_n}{n} - \theta)$ ? Construire un intervalle de confiance de risque $0 < \alpha < 1/2$ pour $\theta$.

## 3 Echantillon gaussien

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables i.i.d. de loi normale d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. On pose $S_n^2 := \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$. Quelle est la loi de $\sigma^{-2} S_n^2$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[S_n^2]$ et $\mathrm{Var}(S_n^2)$.
2. Montrer que $n S_n^{-1}(\overline{X}_n - m)$ converge en loi vers une loi à préciser.

## 4 Somme arrêtée

On considère une variable aléatoire $N_n$ de loi géométrique translatée de paramètre $1 - \theta_n$ :

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \theta_n (1 - \theta_n)^{k-1}, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de carré intégrable, indépendante de la variable $N_n$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathrm{var} X_1 = 2$. On notera $\varphi_X$ la fonction caractéristique de $X_1$. On pose

$$S_n = \sqrt{\theta_n} \sum_{j=1}^{N_n} X_j.$$

1. Calculer la fonction génératrice $\mathbb{E}[s^{N_n}]$, ($|s| \leq 1$).
2. Soit $\psi$ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[\psi(S_n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_n = k\}} \psi(S_n)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\psi\left(\sqrt{\theta_n} \sum_{j=1}^{k} X_j\right)\right] \mathbb{P}(N_n = k).$$
3. Soit $\varphi_{S_n}$ la fonction caractéristique de $S_n$. En utilisant les questions 1) et 2) montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi_{S_n}(t) = \frac{\theta_n \varphi_X(t\sqrt{\theta_n})}{1 - (1 - \theta_n)\varphi_X(t\sqrt{\theta_n})}.$$
4. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (1/2)\exp(-|x|)$. Montrer que $h$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $Z$ une variable aléatoire de densité $h$. On dit que $Z$ suit la loi exponentielle double. Calculer la fonction caractéristique de $Z$. En déduire son espérance et sa variance.
5. Montrer que, au voisinage de 0, on a
$$\varphi_X(t) = 1 - t^2 + o(t^2).$$
Montrer que la fonction $\varphi_{S_n}$ converge, quand $n$ tend vers l'infini, vers une limite à préciser. En déduire que $S_n$ converge en loi vers la loi exponentielle double.