TD 3. Intégration et Probabilités

1 Combinatoire élémentaire

1) Quelle est la probabilité pour que n personnes prises au hasard aient des jours anniversaires différents ? (en oubliant les années bissextiles). Trouver n tel que cette probabilité soit inférieure à $0,5$.
2) n livres sont placés au hasard sur une étagère ; quelle est la probabilité pour que K livres donnés soit l'un à coté de l'autre ?
3) Soit N jetons numérotés de 1 à N
   a) On tire un échantillon, sans remise, de taille $2n+1 \leq N$. Soit X le numéro du jeton tel que dans l'échantillon il y ait n jetons de numéro $< X$ et n jetons de numéro $> X$. Calculer $P(X=k)$ et $E(X)$.
   b) On tire un échantillon, sans remise, de taille n. Soit Y le plus grand numéro des jetons de l'échantillon. Calculer $P(Y=k)$.
   c) On tire un jeton, avec remise, jusqu'à ce qu'on retrouve un jeton déjà tiré. Soit Z le nombre de tirages nécessaire. Calculer $P(Z=k)$.

2 Loi hypergéométrique

On interroge au hasard n individus différents dans une population de N individus dont N_1 fument et $N_2 = N - N_1$ ne fument pas. Soit X le nombre de fumeurs parmi les n interrogés.

a) Déterminer $P(X=k)$ $(0 \leq k \leq n)$; calculer l'espérance et la variance de X.
b) Que se passe t'il à la limite lorsque
   i) n est fixe, $N \to \infty$ et $\frac{N_1}{N} \to p$ $(0 < p < 1)$.
   ii) $n, N, N_1 \to \infty$ et $\frac{nN_1}{N} \to \lambda$ $(\lambda > 0)$.

3 Le problème du chevalier de Monmort (1708)

Soient N enveloppes associées à N lettres. On apparie au hasard lettres et enveloppes. Soit ρ_0 la probabilité qu'aucune lettre ne soit adressée au bon destinataire.

1) Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements. Etablir la formule du crible de Poincaré :
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = p_1 - p_2 + p_3 + \cdots + (-1)^{n-1} p_n,$$
où $p_j = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P\left(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_j}\right)$.
2) On note A_k l'événement : "l'appariement est correct pour la k-ème enveloppe". Montrer que $P(A_k) = 1/N$ et donner $P(A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k})$.
3) Calculer la valeur de ρ_0 en utilisant la formule de Poincaré et montrer, que pour n grand, $\rho_0 \sim e^{-1}$.
4) Reprenant le contexte de l'exercice 3, montrer que la probabilité que k régions données parmi n soient vides si r objets distinguables sont à répartir parmi ces n régions est
$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^r.$$

5) Utilisant à nouveau la formule de Poincaré, montrer que la probabilité que toutes les régions soient occupées est

$$\delta_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r.$$

6) Reprendre le même raisonnement pour montrer que la probabilité que exactement m régions soient vides est

$$\delta_m = C_n^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu C_{n-m}^\nu \left(1 - \frac{\nu+m}{n}\right)^r.$$

On peut montrer que si le rapport $\lambda = ne^{-r/n}$ reste constant et n tend vers $+\infty$ alors δ_m peut-être approché par $e^{-\lambda}\lambda^m/m!$. (Il s'agit de la loi de Poisson, voir l'exercice 2.8 p. 86 du poly de cours).

7) Appliquer au problème de l'anniversaire pour un village de 1900 habitants en déterminant la probabilité approchée qu'il y ait dix jours de l'année sans anniversaire.

4 Décomposition dyadique sur $[0,1]$

Soit l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ où $\mathcal{B}([0,1])$ est la tribu borélienne de $[0,1]$ (la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $[0,1]$) et P est la probabilité uniforme ($P([a,b]) = b - a$ pour tout intervalle $[a,b]$ de $[0,1]$). Sur cet espace on définit les variables aléatoires dyadiques, d_n ($n \geq 1$) : pour $\omega \in [0,1]$, $d_n(\omega)$ est le n-ième chiffre dans la décomposition binaire de ω. Pour les décompositions multiples, comme $1 = 1.0 = 0.1111...$ ou $1/2 = 0.1 = 0.0111..$, on choisit la décomposition infinie ($d_n(1) = 1$ pour tout n, $d_n(1/2) = 1$ pour tout $n \geq 2$).

1) Montrer que

$$P(\{\omega :\ d_j(\omega) = u_j\}) = \frac{1}{2} \text{ et } P(\{\omega :\ d_i(\omega) = u_i,\ i = 1, \dots, n\}) = \frac{1}{2^n}$$

quelques soient $n, j \geq 1$ et $u_j, u_i \in \{0,1\}$. En déduire que

$$P\left(\left\{\omega :\ \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) = k\right\}\right) = C_n^k \frac{1}{2^n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

2) Soient, pour $n \geq 1$, les fonctions l_n définies sur $[0,1]$ par

$$l_n(\omega) = k \text{ si } d_n(\omega) = \cdots = d_{n+k-1}(\omega) \neq d_{n+k}(\omega) \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que

$$P(\{\omega :\ l_n(\omega) = k\}) = \frac{1}{2^k} \text{ et } P(\{\omega :\ l_n(\omega) \geq r\}) = \frac{1}{2^{r-1}} \quad (k, r \in \mathbb{N}^*).$$

3) Soit une suite croissante de réels r_n. Montrer que, si $\sum_n 2^{-r_n}$ converge et si

$$A_n = \{\omega :\ l_n(\omega) \geq r_n\},$$

alors

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Considérant le cas particulier $r_n = (1+\varepsilon)\log_2 n$, en déduire que

$$P\left(\left\{\omega :\ \limsup_{n\to\infty} \frac{l_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1\right\}\right) = 1.$$

4) On dira que si $d_n = 1$ on obtient un succès à l'instant $n \geq 2$ et sinon un échec.
   a) Montrer que l'événement *"on obtient qu'un nombre fini de succés"* a une probabilité nulle.
   b) Pour $n \geq 1$, soit T_n l'instant du n-ième succès, c'est-à-dire la variable aléatoire entière égale au plus petit indice k tel qu'on ait n succès parmi $d_1, \ldots, d_k$. Déterminer la loi de T_n $(n \geq 1)$.
   c) Montrer que les variables T_1 et $T_{n+1} - T_n$ pour $n \geq 1$ sont indépendantes et de même loi.
5) On dit qu'on obtient 01 à l'instant $n \geq 2$ si $d_{n-1} = 0$ et $d_n = 1$.
   a) Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir 01 jusqu'à l'instant n compris est égale à $\dfrac{n+1}{2^n}$.
   b) En déduire que l'événement *"on obtient au moins une fois 01"* est de probabilité 1.
   c) Soit T la variable aléatoire entière égale au premier instant où l'on obtient 01. Déterminer la loi de probabilité de T.