MAF 2012-2013

Probabilités et Statistique

Seconde session

1 Un modèle de file d'attente

Des clients se présentent à un guichet pour se faire servir et prennent leur place dans une file d'attente. Un seul guichetier assure le service de la façon suivante : il ouvre le guichet au début d'une heure ; si aucun client n'attend, il referme le guichet et revient au début de l'heure suivante ; si en début d'heure, des clients attendent, il sert le premier de la file, le service durant exactement une heure. Le nombre de clients qui se présentent pendant la n-ème heure est une v.a. A_n. On suppose que (A_n) est une suite i.i.d. de loi $p = (p_k)_{k \geq 0}$ concentrée sur $\mathbb{N}$.
Soit X_0 le nombre de clients en attente à l'instant 0 (1ère ouverture du guichet),..., X_n le nombre de clients en attente à l'instant n (fin de la n-ème heure, début de la $n+1$-ème).

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov.
2. Calculer sa probabilité de transition π.
3. Montrer que la chaîne est irréductible si $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. Etudier les autres cas.
4. On se place dans le cas où $p_0 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$.
   (a) Chercher s'il existe une fonction invariante par π de la forme $i \to x^i$ avec $0 < x < 1$.
   (b) Calculer pour $\lambda > 0$ et $i \in \mathbb{N}$, $E_i[\exp(-\lambda T_0)]$, $P_i(T_0 < \infty)$, $E_i(T_0)$
   où $T_0 = \inf\{n : \ n > 0, \ X_n = 0\}$. Donner une Interprétation de ce résultat.

2 Censure

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit une loi géométrique de paramètre $\theta \in]0, 1[$ si :

$$P(X = k) = \theta^{k-1}(1 - \theta) \ \ (k \in \mathbb{N}^*).$$

On suppose que le temps de première panne de certains appareils suit une loi géométrique de paramètre θ (sur une échelle de temps *discrète*, le temps étant compté par exemple en jours, en mois, etc..). On observe n appareils indépendants, notons X_j $(j = 1 \ldots n)$ le temps de panne du $j^{\text{ème}}$ appareil. L'étude de la durée de vie se fait (pour des raisons économiques évidentes), jusqu'à l'instant r ($r \in \mathbb{N}^*$ donné). On observe donc seulement les durées de vie censurées $Y_j = X_j \mathbf{1}_{\{X_j \leq r\}} + (r+1)\mathbf{1}_{\{X_j > r\}}$ $(j = 1 \ldots n)$.

a) Montrer que la loi de Y_1 est donnée par :

$$P(Y_1 = k) = (\theta^{k-1}(1-\theta))^{\mathbf{1}_{\{k \leq r\}}}(\theta^r)^{\mathbf{1}_{\{k = r+1\}}} = \theta^{k-1}(1-\theta)^{\mathbf{1}_{\{k \leq r\}}}, \quad (k = 1 \ldots r+1).$$

b) Calculer la vraisemblance associée aux observations censurées. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ.

c) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est fortement consistant.

3 Bouc

Une compagnie aérienne fait du surbooking, c'est à dire, pour un vol donné, accepte jusqu'à 324 réservations alors que l'avion contient 300 places. On suppose que les passagers se comportent indépendamment les uns des autres et se présentent au départ avec la probabilité p. Ce jour-là, 302 passagers se présentent au départ. Donner un intervalle de confiance pour p au niveau 5%.
On suppose maintenant que $p = 0.9$. Quel nombre maximum de réservations la compagnie doit-elle accepter pour avoir une probabilité inférieure à 5% de voir trop de passagers se présenter ?