M2R Maths Applis
2012–2013
Modélisation Statistique

TP du 6 Novembre 2012 de 8h à 12h

1 Conditionnement et Processus gaussiens

1. Hors d'œuvre. Soit X une variable aléatoire gaussienne et $(X,Y)^T$ un vecteur gaussien de dimension $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$). On pose $\mathbb{E}(X) = m_X \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(Y) = m_Y \in \mathbb{R}^k$, $\mathrm{Var}X = \sigma_X^2$, $\mathrm{Var}Y = \Gamma_Y$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = C_{X,Y} \in \mathbb{R}^k$. On suppose que la loi de Y est portée par tout $\mathbb{R}^k$ (c'est-à-dire que Γ_Y est une matrice inversible). Montrer que la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi normale centrée en $m_X + C_{X,Y}^T \Gamma_Y^{-1}(Y - m_Y)$ et de variance $\sigma_X^2 - C_{X,Y}^T \Gamma_Y^{-1} C_{X,Y}$.
2. Construire à l'aide de variables gaussiennes i.i.d. $\mathcal{N}(5, 5^2)$ une matrice de covariance Γ de taille 10×10 et un vecteur m de taille 10. Stocker Γ et m. Simuler N réalisations de la loi $\mathcal{N}_{10}(m, \Gamma)$. Calculer la prédiction de la première composante quand on connaît les 9 dernières. Estimer la variance de cette prédiction et comparrer à la variance conditionnelle théorique.
3. En utilisant l'équation récurrente puis la décomposition de Cholesky, simuler une trajectoire d'un processus $AR(1)$ gaussien calculer les prédicteurs à horizon, $1 \ldots, d > 1$ et comparer à la valeur du processus. Faire la même simulation pour un processus $AR(1)$ bâti sur une innovation de loi exponentielle. Faire de même pour un processus $AR(2)$ gaussien puis non gaussien.
4. Utiliser la méthode de prévision gausienne pour approximer une fonction donnée à 1 puis 2 variables.

2 Estimateur du maximum de vraisemblance et de Whittle

On considère ici un processus auto-régressif gaussien d'ordre 1 ou 2 causal.

1. Simuler des trajectoires de longueur N.
2. Écrire des fonctions permettant le calcul de la vraisemblance dans les cas AR(1) et AR(2).
3. Utiliser la fonction `optim` pour calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance.
4. Faire n fois la question précédente et déterminer empiriquement les espérances et variances des estimateurs du maximum de vraisemblance. Comparer ces valeurs aux valeurs théoriques.
5. Reprendre les 3 questions précédentes dans le cas où l'on utilise l'approximation de Whittle de la vraisemblance.