L2 Parcours spécial 2012-2013 Université Paul Sabatier
Approfondissement mathématiques

Examen du 17 mai 2013-De 10h15 à 12h15

Méthode de Simpson

Préliminaires

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère les trois polynômes de degré 2 suivants :

$$\begin{aligned} R_0(x) &= 2(x-1/2)(x-1), \\ R_{1/2}(x) &= 4x(1-x), \\ R_1(x) &= 2x(x-1/2). \end{aligned}$$

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on pose

$$L(x; a, b, c) = aR_0(x) + bR_{1/2}(x) + cR_1(x), \ (x \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que $L(x; a, b, c)$ est l'unique polynôme en x de degré 2 qui interpole les valeurs a, b, c en $0, 1/2, 1$.
2. Calculer
$$I(a, b, c) = \int_0^1 L(x; a, b, c)dx. \tag{1}$$

Approximation d'une fonction par des polynômes locaux

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose, pour $N \geq 1$ et $j = 0, \cdots, 2N$,

$$x_j = \frac{j}{2N} \quad \text{et} \quad y_j = f(x_j).$$

Pour $x \in [x_{2(j-1)}, x_{2j}]$, on pose

$$\Pi_j(x) = L(N(x - x_{2(j-1)}); y_{2(j-1)}, y_{2j-1}, y_{2j}).$$

et

$$\Theta_N(x, f) = \Pi_j(x).$$

1. Pour $f(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ et $N = 2$, représenter graphiquement sur une même figure $f(x)$ et $\Theta_N(x, f)$. Que remarquez-vous ? Comment expliquer ce résultat ?
2. Pour $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ et $N = 2$, représenter graphiquement sur une même figure $f(x)$ et $\Theta_N(x, f)$.
3. En utilisant (1), calculer
$$I_N = \int_0^1 \Theta_N(x, f)dx$$
en fonction de la suite $(y_j)_{j=0,\cdots,2N}$. En déduire une approximation de $J = \int_0^1 f(x)dx$.
4. Pour $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$, calculer J. Puis, pour $N = 1, 2, 3$, calculer I_N. Conclusions.