Examen de Mai 2012

Probabilités et Statistique-Durée 4 heures

MAF 2011-2012

1 Exercice : Autour de la loi de Gumbel et de Pareto

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. On considère les variables aléatoires $X := \log(-\log U) - \log\lambda$ et $Y := U^{-\lambda^{-1}}$.

1. Calculer les lois de X et Y. On appelle F_λ la loi de X et G_λ celle de Y.
2. Montrer que $(F_\lambda)_{\lambda>0}$ et $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ peuvent se reparamétrer comme des familles exponentielles naturelles. On précisera avec soin le nouveau paramètre et la statistique exhautive et totale du modèle.
3. Soit $X_1, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, \dots, Y_n$) des copies i.i.d. de X (resp. de Y). Calculer dans chacun des deux modèles la borne de Cramér Rao pour l'estimation sans biais de λ basée sur $X_1, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, \dots, Y_n$).

2 Problème : Chaîne de Markov à 2 états

Rappelons pour commencer quelques définitions et propriétés concernant les chaînes de Markov homogènes à valeurs dans un ensemble fini. Soit p un entier naturel strictement positif. Soit E_p l'ensemble des p premiers entiers naturels non nuls. Une suite de variables aléatoires $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E_p est une chaîne de Markov homogène de transition $\Pi = (\pi_{i,j})_{i,j\in E_p}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \cdots, Y_n = i_n) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i_n) = \pi_{i_n,j}, \quad (i_l, j \in E_p, (l = 0, \dots, n)).$$

Π est une matrice à coefficients positifs et la somme des éléments d'une de ses lignes vaut toujours 1 (matrice stochastique). La loi initiale de la chaîne est le vecteur de probabilité $\nu^T = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ avec

$$\mathbb{P}(Y_0 = i) = \nu_i, \quad (i \in E_p).$$

Soit Y un tel processus. On dit que Y est une chaîne irréductible si pour tout $i, j \in E_p$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq l \leq p$ avec

$$\mathbb{P}(Y_n = j | Y_l = i) > 0.$$

Lorsque la chaîne Y est irréductible on a les résultats suivants quelle que soit la loi initiale :

i) **Existence et unicité d'une probabilité invariante**
Il existe un unique vecteur de probabilité μ qui vérifie $\mu^T\Pi = \mu^T$. La suite Y converge en loi vers μ.

ii) **Théorème ergodique**
Soit P_n la probabilité empirique construite à partir de $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ et f une application de E_p dans $\mathbb{R}$. La suite $(P_n(f))$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}_\mu(f) = \sum_{j=1}^p \mu_j f(j)$.

iii) **Théorème central limite**
Soit f une application de E_p dans $\mathbb{R}$ On pose

$$\Pi f(x) \quad = \quad \mathbb{E}(f(Y_1) | Y_0 = x) \quad (x \in E_p).$$

On suppose qu'il exite une application $\tilde{f}$ de E_p dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation suivante (équation de Poisson) :

$$f(x) - \mathbb{E}_\mu(f) = \tilde{f}(x) - \Pi\tilde{f}(x) \text{ (pour tout } x \in E_p).$$

Dans ce cas, avec les mêmes notations que dans ii), $\sqrt{n}(P_n(f) - \mathbb{E}_\mu(f))$ converge en loi vers une loi normale centrée de variance

$$\sigma^2(f) = \mathbb{E}_\mu\left[\Pi\tilde{f}^2\right] - \mathbb{E}_\mu\left[(\Pi\tilde{f})^2\right].$$

Soit ϕ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{\theta\to-\infty}\phi(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to+\infty}\phi(\theta) = 1.$$

Dans ce problème, on considère la famille paramétrique de chaîne de Markov sur E_2 de transition

$$\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1-\phi(\theta)}{2} & \frac{1+\phi(\theta)}{2} \\ \phi(\theta) & 1-\phi(\theta) \end{pmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Soit X_0 une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\mathbb{P}_\theta$ la loi (sur $E_2^{\mathbb{N}}$) de la chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de transition $\Pi(\theta)$. Lorsque la chaîne sera considérée dans un cadre statistique, on notera θ^* la *vraie* valeur du paramètre θ.

2.1 Quelques Généralités

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé.

a) X est-elle une chaîne de Markov irréductible ? Déterminer sa probabilité invariante $\mu(\theta)$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\Pi^n(\theta) = \frac{2}{1+3\phi(\theta)}\left(\begin{pmatrix} \phi(\theta) & \frac{1+\phi(\theta)}{2} \\ \phi(\theta) & \frac{1+\phi(\theta)}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{1-3\phi(\theta)}{2}\right)^n \begin{pmatrix} -\frac{1+\phi(\theta)}{2} & \frac{1+\phi(\theta)}{2} \\ \phi(\theta) & -\phi(\theta) \end{pmatrix}\right).$$

c) On pose $m(\theta) = \dfrac{2+4\phi(\theta)}{1+3\phi(\theta)}$. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov de loi initiale $\mu(\theta)$ et de transition $\Pi(\theta)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{Z}_n = Z_n - m(\theta)$. Montrer que le processus $(\tilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est centré et strictement stationnaire (c'est-à-dire que, pour tout $N \geq 1$ et tout $K \geq 0$, les vecteurs $(\tilde{Z}_n)_{n=0,\cdots,N}$ et $(\tilde{Z}_n)_{n=K,\cdots,N+K}$ ont la même loi).

2.2 Estimation empirique de θ^*

Pour $n \geq 0$, on oberve $X_0, \ldots, X_n$. On se propose d'étudier le problème statistique d'estimation de θ^*. On pose pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta = \phi(\theta)$ (et $\delta^* = \phi(\theta^*)$).

a) Montrer que la moyenne empirique $\overline{X}_n$ construite à partir de $X_0, \ldots, X_n$ converge presque sûrement (sous θ^*), vers $\frac{2+4\delta^*}{1+3\delta^*}$. Quelle est la limite en loi de

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{2+4\delta^*}{1+3\delta^*}\right)?$$

b) Construire à partir de la statistique $\overline{X}_n$ un estimateur consistant asymptotiquement normal de δ^*.

c) Bâtir un intervalle de confiance asymptotique de risque $\alpha \in]0,1[$ pour θ^*. C'est-à-dire un ensemble aléatoire $\mathcal{C}_n(\alpha)$ fonction de $X_0, \ldots, X_n$ qui vérifie

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\theta^* \in \mathcal{C}_n(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

2.3 Estimateurs du maximum de vraisemblance

a) On considère le processus $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans E_4 défini par

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_{n-1}, X_n) = (0,0) \\ 2 & \text{si } (X_{n-1}, X_n) = (0,1) \\ 3 & \text{si } (X_{n-1}, X_n) = (1,0) \\ 4 & \text{si } (X_{n-1}, X_n) = (1,1) \end{cases}$$

Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov irréductible et donner sa matrice de transition $\Lambda(\theta^*)$.

b) Soit pour $n \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $L_n(\theta, X_0, \dots, X_n)$ la fonction de vraisemblance en θ associée aux observations $X_0, \dots, X_n$. C'est-à-dire

$$L_n(\theta, x_0, \dots, x_n) := \mathbb{P}_\theta(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n),\ (x_0, \dots, x_n \in \{0,1\}).$$

Exprimer $L_n(\theta, X_0, \dots, X_n)$ comme une fonction du processus $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et du paramètre δ. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de δ^* puis celui de θ^*.

c) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^* est fortement consistant. Etudier sa vitesse de convergence en loi.