Partiel du 23 Mars 2011

Durée 3h-Notes de cours autorisées-Calculatrices scientifiques autorisées

1 Quelques calculs préliminaires

On rappelle que la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ vaut $\lambda \exp(-\lambda x)$, (pour $x \geq 0$). Le but de cette partie est de faire la plupart des calculs préliminaires utiles dans les parties 2 et 3. Ne pas rester bloqué sur les calculs on pourra admettre certains résultats si nécessaire. Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 ($U, V \sim \mathcal{E}(1)$). Soit N une variable aléatoire de loi normale standard ($N \sim \mathcal{N}(0,1)$).

1. Montrer que $\mathbb{E}(U) = \text{Var } U = 1$, $\mathbb{E}(U^3) = 6$ et que $\mathbb{E}(U^4) = 24$
2. Soit $a > 0$, montrer que $W := U/a$ suit la loi exponentielle de paramètre a ($W \sim \mathcal{E}(a)$). En déduire, que $\mathbb{E}(W) = a^{-1}$, $\text{Var } W = a^{-2}$, $\mathbb{E}(W^3) = 6a^{-3}$et $\mathbb{E}(W^4) = 24a^{-4}$.
3. On pose $Z = (U - V)/a$. Montrer que Z suit la loi de Laplace de paramètre a ($Z \sim \mathcal{L}(a)$) de densité
$$f_{Z,a}(z) := \frac{a}{2} \exp(-a|z|), \quad (z \in \mathbb{R}).$$
4. Montrer que Z est une variable centrée de variance $\text{Var } Z = 2/a^2$, que Z^3 est aussi une variable centrée et que $\mathbb{E}(Z^4) = 24a^{-4}$.
5. Montrer que $|Z|$ suit la loi exponentielle de paramètre a. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(|Z|)$ et de $\mathbb{E}(|Z|Z^2) = \mathbb{E}(|Z|^3)$.
6. Montrer que $\mathbb{E}(|N|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et que $\mathbb{E}(|N|^3) = 2\mathbb{E}(|N|)$.

2 Estimation empirique dans le modèle de Laplace

Soit $\theta^* > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{L}(1/\theta^*)$.

1. Quelle est la limite, presque sûre, de $\overline{Z^2}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j^2$? On appelle α^* cette limite.
2. Quelle est la limite en loi de $\sqrt{n}(\overline{Z^2}_n - \alpha^*)$?
3. Montrer que $\widehat{\theta}_n := \sqrt{\frac{\overline{Z^2}_n}{2}}$ est un estimateur convergeant de θ^*.
4. Pour $t > 0$, on pose $h(t) := \sqrt{\frac{t}{2}}$. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 sur la fonction h, montrer que
$$h(t) - h(\alpha^*) = \frac{1}{4\theta^*}(t - 2(\theta^*)^2) + \varphi(t)$$
où $\lim_{t \to \alpha^*} \frac{\varphi(t)}{(t - \alpha^*)} = 0$. En déduire que
$$\widehat{\theta}_n - \theta^* = \frac{1}{4\theta^*}(\overline{Z^2}_n - 2(\theta^*)^2) + \varphi(\widehat{\theta}_n).$$

5. On suppose que $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\varphi(\widehat{\theta}_n) = 0$ (en probabilité). Montrer que $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta^*)$ converge en loi vers une loi gaussienne de variance $\psi(\theta^*)$ à déterminer.

3 Méthode de vraisemblance dans le modèle de Laplace

1. Calculer la vraisemblance associée aux observations $Z_1, \ldots, Z_n$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^*. Cet estimateur est-il biaisé ? Calcul son risque quadratique.
3. Déterminer l'information de Fisher du modèle. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il efficace ? Que pensez-vous de l'estimateur empirique du paragraphe précédent.
4. Donner une statistique exhaustive et complète. Existe t'il un estimateur UVMB de θ^*.

4 Un test d'hypothèses simples

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de densité h_X. On veut tester H_0 $h_X = f_{Z,\sqrt{2}}$ contre H_1 h_X est la densité de la gaussienne standard.

1. Expliquer précisément la règle de décision optimale.
2. Pour $n = 100$ et une erreur de première espèce de 5% expliciter la règle de décision optimale et donner une approximation de la puissance du test.

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000