Première session-Vendredi 13 Mai 2011

Durée 3h

Documents autorisés : notes de cours

Calculatrices scientifiques autorisées

1 Poisson de mai

La question d) de cet exercice est un peu plus difficile. En cas de difficulté pour la résoudre, admettre le résultat et passer directement à la question suivante.

On se place dans le modèle statistique suivant : les observations $X_1, \ldots, X_{2n}$ sont des variables aléatoires indépendantes ($n \in \mathbb{N}^*$). Les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la loi de Poisson de paramètre λ, les variables $X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ suivent la loi de Poisson de paramètre λ^2 ($\lambda > 0$). On appelera λ_0 le *vrai* paramètre du modèle.

a) Montrer que l'on est dans un modèle dominé et déterminer la fonction de vraisemblance de l'expérience. On précisera la mesure de référence.

b) Est-on en présence d'un modèle exponentiel ? Déterminer une statistique exhaustive minimale et complète. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $l(\lambda_0) = \lambda_0 + 2\lambda_0^2$? Cet estimateur est-il biasé ? Montrer que $U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(2X_i - 1)$ est un estimateur sans biais de $l(\lambda_0)$. En déduire la valeur de l'espérance conditionnelle de U_n sachant $\sum_{j=1}^n (X_j + 2X_{j+n})$.

c) Soit $\tau > 0$, on pose $\phi(\tau) = \frac{-1+\sqrt{1+8\tau}}{4}$. En utilisant la question précédente, montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ_0 est $\widehat{\lambda_n} = \phi(T_n)$, où T_n est une statistique à préciser. Montrer que T_n converge presque sûrement vers $l(\lambda_0)$ et que $\sqrt{n}(T_n - l(\lambda_0))$ converge en loi vers une loi à préciser.

d) Déduire de la question c) que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur fortement consistant. Soient (W_n) et (V_n) des suites de variables aléatoires. On suppose que la suite (W_n) converge en loi vers une variable W, et que la suite (V_n) converge en probabilité vers 0. Que peut-on dire sur la convergence en loi de la suite $(W_n + V_n)$? En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer que $\sqrt{n}(\widehat{\lambda_n} - \lambda_0)$ converge en loi vers une loi gaussienne centrée et de variance $\frac{\lambda_0}{4\lambda_0+1}$. On pourra par exemple utiliser l'inégalité de Tchebycheff en tenant compte que ϕ'' est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^+$.

e) En utilisant la question d) construire, pour n grand, un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ ($\alpha \in]0, 1[$) pour λ_0. Application numérique : construire un intervalle de confiance pour λ_0, pour $n = 100$ si la moyenne empirique observée des 100 premières observations est 2.1 et celle des 100 suivantes est 4.4 (on prendra un risque de 5%).

f) On reparamétrise le modèle en posant $\theta = \log\lambda$. Calculer pour cette nouvelle paramétrisation l'information de Fisher du modèle. l'estimateur $\widehat{\lambda_n}$ est-il asymptotiquement efficace ? Ce résultat était-il prévisible ?

2 Dents citées

Soit X une variable aléatoire de densité

$$f_a(x) = C\cos^2(2\pi(x-a))\,\mathbf{1}_{[a,a+1]}(x), \quad (a \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que $X-a$ a pour densité f_0. En déduire la valeur de C ainsi que l'espérance et la variance de X.

b) Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de même loi que X. Construire, à partir de la moyenne empirique de l'échantillon, un estimateur sans biais $\widehat{a}$ de a. Montrer que cet estimateur est fortement consistant. Construire, pour les grandes valeurs de n, un intervalle de confiance pour a de risque α ($\alpha \in [0,1]$).

c) On propose maintenant pour estimer a les estimateurs $\widehat{\widehat{a}} = \min_{i=1\ldots n} X_i$ et $\widehat{\widehat{\widehat{a}}} = \max_{i=1\ldots n} X_i - 1$. Sans faire de calcul, montrer que ces estimateurs sont biaisés.

d) Calculer la fonction de répartition de de $\widehat{\widehat{a}}$ et en déduire sa densité. Montrer que $\widehat{\widehat{a}}$ est faiblement consistant.

e) Montrer que $n(\widehat{\widehat{a}} - a)$ converge en loi vers une limite à préciser. Indication : calculer d'abord la fonction de répartition de $n(\widehat{\widehat{a}} - a)$.
En déduire alors un intervalle de confiance au risque α pour a. Comparer avec les résultats de la question b), conclusions ?

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt.$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000