IUP SID
Statistique Multidimensionnelle
2008-2009

Examen du 16 Décembre 2009 de 7h45 à 9h45

Les notes de cours sont autorisées. Les calculatrices sont autorisées.

1 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, on considère la matrice A suivante :

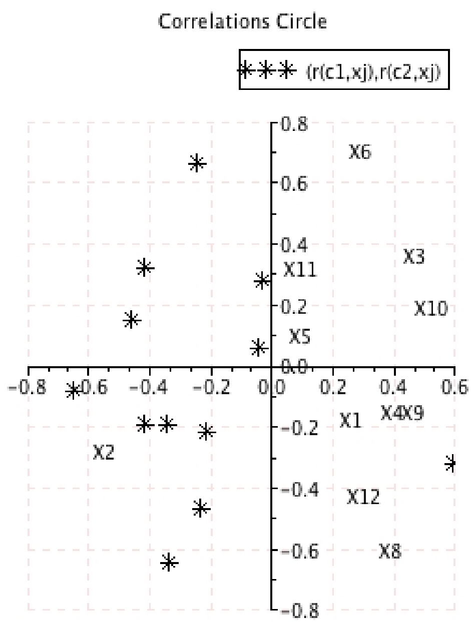
$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

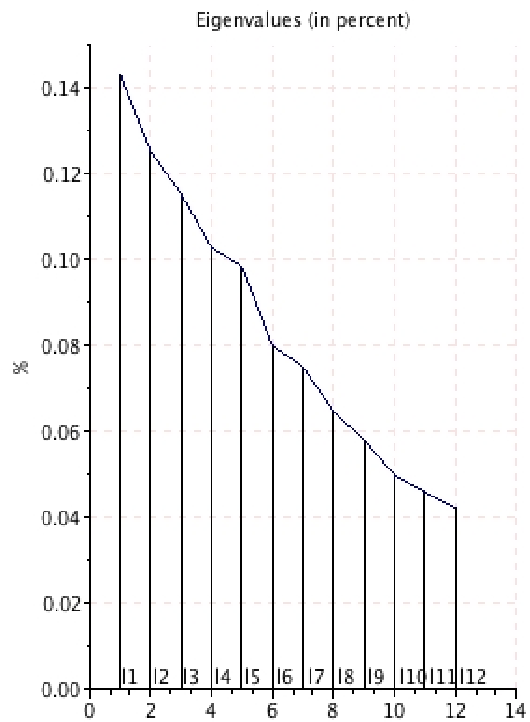
1. Expliquer pourquoi A est une matrice diagonalisable.
2. Montrer que la somme des valeurs propres vaut 20.
3. Montrer que les trois vecteurs suivants sont bien des vecteurs propres de A :
$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
4. Quelles sont les deux valeurs propres de A ? Préciser leurs multiplicités respectives.
5. Montrer que le déterminant de A vaut 512.
6. Montrer que le polynôme caractéristique de A est :
$$P(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda^2 - 8\lambda + 16)Q(\lambda).$$
Où Q est un polynôme de degré 1 à déterminer.
7. Montrer que $u_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 4.
Montrer que (u_2, u_3, u_4) forment une famille libre.
8. Soit α et β deux nombres réels. On pose $\tilde{u}_4 := u_4 - \alpha u_3 - \beta u_2$. Montrer que l'on peut choisir α et β pour que les trois vecteurs $(u_2, u_3, \tilde{u}_4)$ soient deux à deux orthogonaux.
9. Déduire des questions précédentes une base orthornormée (v_1, v_2, v_3, v_4) de vecteurs propres de A.
10. Montrer que A peut s'écrire sous la forme
$$A = O \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} O^T,$$
où l'on précisera la matrice O.
11. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:
$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , w_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Représenter graphiquement les projections de ces trois vecteurs dans le plan engendré par u_1, u_2 puis par u_2, u_3.

2 Analyse en composantes principales

On a effectué une enquête sur un échantillon de 1000 individus. Pour chacun de ces 1000 individus, on a mesuré p variables quantitatives. On a alors mis en place une ACP dont les résultats sont les suivants :

$$\begin{pmatrix} \text{valeurs propres} & \text{\% variance} \\ 1.8332626 & 0.1527719 \\ 1.4319944 & 0.1193329 \\ 1.3370377 & 0.1114198 \\ 1.2456931 & 0.1038078 \\ 1.1368902 & 0.0947408 \\ 0.9802351 & 0.0816863 \\ 0.9592156 & 0.0799346 \\ 0.8845636 & 0.0737136 \\ 0.6855592 & 0.0571299 \\ 0.5505556 & 0.0458796 \\ 0.5040737 & 0.0420061 \\ 0.4509194 & 0.0375766 \end{pmatrix}$$





1. Quelle est la valeur de p ?
2. Que vaut l'inertie totale ?
3. Quel pourcentage de l'inertie est porté par les deux premiers axes principaux ?
4. Commenter cette ACP ?