M2 IMAT
2009–2010
Analyse de sensibilité

Examen du 8 Septembre 2010

Les notes de cours sont autorisées. Les calculatrices sont autorisées.

1 Krikri

1. Soit Z_1 une variable aléatoire de densité $f_{Z_1}(z) := \frac{3}{4}(1-x^2)$ sur $]-1,1[$ et Z_2 une variable de loi uniforme sur $]-1,1[$. Montrer que les fonctions caractéristiques de ces variables sont :
$$\varphi_{Z_1}(t) := \mathbb{E}(e^{itZ_1}) = \frac{3}{t^3}(\sin t - t\cos t) \text{ et } \varphi_{Z_2}(t) := \mathbb{E}(e^{itZ_2}) = \frac{\sin t}{t}, \quad (t \in \mathbb{R}_*).$$
2. Expliquer pourquoi les fonctions φ_{Z_1} et φ_{Z_1} sont des fonctions de covariance.
3. On considère sur $\mathbb{R}$ les processus gaussiens centrés $(X_t^1)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(X_t^2)_{t\in\mathbb{R}}$ de fonction de covariance respective φ_{Z_1} et φ_{Z_2}. Soit x_0 un réel donné. On observe $X_0^j = x_0$ $(j = 1,2)$. Pour t un réel non nul, déterminer la loi de X_t^j $(j = 1,2)$ connaissant cette observation. Pour t réel, tracer la fonction de krigeage (l'espérance de cette loi conditionnelle).

2 Sensibilité

On considère la relation entrée sortie suivante :

$$Y = \cos(X_1)X_2^2 + \cos(X_2)X_1^2. \tag{1}$$

On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 sont indépendantes. X_1 a la densité h_{Z_1} décrite au paragraphe précédent. X_2 est une variable aléatoire de loi gaussienne standard. Si X est une variable aléatoire, on note φ_X sa fonction caractéristique.

1. Montrer que, pour t réel et $i = 1,2$, $\mathbb{E}[\cos(tX_i)] = \varphi_{X_i}(t)$.
2. Exprimer, pour t réel, $i = 1,2$ $j = 0,2$ et $k = 1,2$, $\mathbb{E}[X_i^j \cos^k(tX_i)]$ en fonction de φ_{X_i} et de ses dérivées.
3. Calculer les indices de Sobol du 1er ordre pour le modèle (1).
4. Quelle variable d'entrée a le plus d'influence sur les fluctuations de Y ?