M2 IMAT
2007–2008
Analyse de sensibilité

Examen du 10 décembre 2007

La durée de l'épreuve est 3 heures. Les notes de cours et les calculatrices électroniques sont autorisées

1 Krikri

Soit $\alpha > 0$, on considère sur $\mathbb{R}$ le processus gaussien centré $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de fonction de covariance

$$R(s) := E(X_t X_{t+s}) = \exp(-\alpha|s|).$$

Soient x_0 et x_1 des réels donnés.

- On observe $X_0 = x_0$. Pour t un réel non nul, déterminer la loi de X_t connaissant cette observation. Pour t réel, tracer la fonction de krigeage (l'espérance de cette loi conditionnelle).
- On observe $X_{-1} = x_1$ et $X_1 = x_1$. Calculer $f(t) = E(X_t | X_1 = x_1, X_{-1} = x_1)$ et tracer cette fonction.

2 Un top modèle sensible

Pour α^* un paramètre réel, on considère le modèle :

$$Y = \alpha^* X^1 X^2 X^3 + X^1 X^2 + X^2 + X^3 \varepsilon.$$

On suppose que,

- $X^j, j = 1, 2, 3$ et ε sont des variables indépendantes.
- $P(X^j = 1) = P(X^j = -1) = 0.5$ pour $j = 1, 2, 3$.
- ε suit une loi normale centrée de variance $\sigma_*^2 > 0$.

I) Calculer les indices de sensibilité du 1ère ordre et classer les variables suivants leurs importances respectives.

II) On considère des copies i.i.d (Y_i) de Y bâties sur des copies i.i.d. (X_i^j) (respectivement (ε_i)) de X^j (respectivement de ε).

- On considère les vecteurs aléatoires i.i.d de $\mathbb{R}^3$:

$$Z_j = \begin{pmatrix} X_j^3 \\ X_j^1 X_j^3 \\ X_j^1 X_j^2 \varepsilon_j \end{pmatrix} j = 1, \ldots$$

  Calculer l'espérance et la matrice de variance covariance de Z_1.
- Soit $\overline{Z_n}$ la moyenne empirique des n premiers vecteurs aléatoires Z_j. Montrer que $\overline{Z_n}$ satisfait une loi forte des grands nombres et un théorème de la limite centrale.

III) On observe $Y_1 \ldots Y_n$ et $X_1^j \ldots X_n^j$ ($j = 1, 2, 3,\ n \in \mathbb{N}^*$). Pour estimer α^* on propose l'estimateur

$$\widehat{\alpha} := \sum_{j=1}^{n} Y_j X_j^1 X_j^2 X_j^3.$$

- Montrer que cet estimateur est sans biais et calculer sa variance.
- Montrer que $\widehat{\alpha}$ converge vers α^* quand n tend vers l'infini.
- Donner un intervalle de confiance asymptotique de risque 5% pour α^*.