

Partiel du 13 mars 2008

Durée 3h-Document autorisés : cours manuscrits-Calculatrices autorisées.

1 Un 2-échantillon

Soit (X_1, X_2) un échantillon de 2 variables i.i.d. de densité :

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^{*3}} \mathbf{1}_{]0, \theta^*[}(x),$$

où $\theta^* > 0$.

1. Calculer $E(X_1)$ et $\text{Var}X_1$. En déduire un estimateur sans biais de θ^* fonction de la moyenne empirique des observations (X_1, X_2) . On appelle $\hat{\theta}_1$ cet estimateur. Que vaut le risque quadratique de $\hat{\theta}_1$?
2. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de $\max(X_1, X_2)$. Calculer $E[\max(X_1, X_2)]$ et $\text{Var}[\max(X_1, X_2)]$ et en déduire un estimateur $\hat{\theta}_2$ sans biais de θ^* fonction de $\max(X_1, X_2)$. Que vaut le risque quadratique de $\hat{\theta}_2$?
3. Quel estimateur choisir ? Donner une statistique exhaustive pour ce modèle. On admettra que cette statistique est totale. Le résultat précédent concernant le meilleur estimateur était-il prévisible ?
4. Déterminer l'estimateur de la forme $c(X_1 + X_2)$ ($c \in \mathbb{R}$) qui possède le risque quadratique le plus petit. Cet estimateur est-il biaisé ?

2 Un modèle gaussien tordu

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de n variables i.i.d. de loi normale d'espérance θ^* et de variance $\theta^*(1 - \theta^*)$ où $n > 0$ et $0 < \theta^* < 1$.

1. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^* est solution d'une équation du 3ème degré que l'on ne cherchera pas à résoudre.
2. On considère les statistiques

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \text{et} \quad U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

Montrer que ces statistiques sont toutes les deux des estimateurs sans biais de θ^* . Calculer le risque quadratique de ces estimateurs.

3 Ampoule

La durée de fonctionnement X d'une ampoule électrique suit une loi normale. On examine 12 ampoules et on enregistre les résultats suivants : la moyenne empirique observée vaut 58 jours, la variance empirique observée (estimation non biaisée) quant à elle vaut 99. Déterminer les intervalles de confiance :

1. de la moyenne de X à 95%,
2. de la variance de X à 99%.

4 Machine

Sur un échantillon de 300 pièces fabriquées par une machine, 60 sont défectueuses.

1. Trouver un intervalle de confiance à 95%, puis à 99,8% de la proportion réelle de pièces defectueuses fabriquées par la machine.
2. Reprendre la question précédente en supposant que l'on a observé 600 pièces défectueuses sur 3000.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$: $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Pour $x < 0$, utiliser $\phi(x) = 1 - \phi(-x)$.

Fractiles $k_m(\beta)$ d'ordre β de la loi du Khi-2 à m degrés de liberté. Pour les degrés $m \geq 51$, utiliser l'approximation $\frac{\chi_m^2 - m}{\sqrt{2m}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

m, β	0.001	0.005	0.010	0.025	0.05	0.1000	0.5000	0.9000	0.9500	0.9750	0.9900	0.9950	0.9990
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	0.002	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	0.024	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	0.210	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	0.598	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	0.857	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	3.041	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	3.483	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	3.942	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	4.905	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	5.921	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	6.447	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	6.983	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928	52.620
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.476
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.703
31	12.196	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003	61.098
32	12.811	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328	62.487
33	13.431	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	32.336	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648	63.870
34	14.057	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964	65.247
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275	66.619
36	15.324	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	35.336	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581	67.985
37	15.965	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883	69.346
38	16.611	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	37.335	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181	70.703
39	17.262	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	38.335	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476	72.055
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	39.335	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766	73.402
41	18.575	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	40.335	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053	74.745
42	19.239	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	41.335	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336	76.084
43	19.906	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	42.335	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616	77.419
44	20.576	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	43.335	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893	78.750
45	21.251	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	44.335	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166	80.077
46	21.929	25.041	26.657	29.160	31.439	34.215	45.335	58.641	62.830	66.617	71.201	74.437	81.400
47	22.610	25.775	27.416	29.956	32.268	35.081	46.335	59.774	64.001	67.821	72.443	75.704	82.720
48	23.295	26.511	28.177	30.755	33.098	35.949	47.335	60.907	65.171	69.023	73.683	76.969	84.037
49	23.983	27.249	28.941	31.555	33.930	36.818	48.335	62.038	66.339	70.222	74.919	78.231	85.351
50	24.674	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	49.335	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490	86.661

Fractiles $st_m(\beta)$ d'ordre β de la loi de Student à m degrés de liberté. Pour les degrés $m \geq 51$, utiliser la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour les fractiles d'ordre $\beta < 0.5$ utiliser $st_m(\beta) = -st_m(1 - \beta)$.

m β	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.9750	0.9900	0.9950	0.9990	0.9995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
31	0.256	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375	3.633
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356	3.611
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340	3.591
36	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
37	0.255	0.529	0.851	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326	3.574
38	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
39	0.255	0.529	0.851	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313	3.558
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
41	0.255	0.529	0.850	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301	3.544
42	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
43	0.255	0.528	0.850	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291	3.532
44	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
45	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281	3.520
46	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
47	0.255	0.528	0.849	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273	3.510
48	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
49	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265	3.500
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496