Partiel du 15 mars 2007

Durée 3h-Notes de cours autorisées-Calculatrices scientifiques autorisées

1 Modèle de Poisson

1.1 Préliminaires sur la loi de Poisson

On rappelle que si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

a) Admettre les identités suivantes :

$$\mathbb{E}[Y^4] = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda \quad \mathbb{E}[Y^2(Y-1)^2] = \lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 2). \tag{1}$$

En utilisant les fonctions génératrices et les égalités précédentes montrer :

$$\mathbb{E}[Y] = \lambda, \quad \mathbb{E}[Y^2] = \lambda + \lambda^2, \quad \mathbb{E}[Y(Y-1)] = \lambda^2, \quad \mathrm{var}(Y^2) = \lambda(4\lambda^2 + 6\lambda + 1). \tag{2}$$

b) Soit Z une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda' > 0$ indépendante de Y. Montrer que $Y + Z$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

1.2 Statistique pour le carré du paramètre

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de loi de Poisson de paramètre θ^* ($\theta^* > 0$). On veut estimer θ^{*2}. Soit

$$T = \sum_{i=1}^n X_i \qquad \text{et} \qquad S = \frac{T(T-1)}{n^2}.$$

a) S est-il un estimateur sans biais de θ^{*2} ?

b) Peut-on trouver un estimateur sans biais de variance plus petite ?

c) Calculer la vraisemblance du modèle et donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^*. En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ^{*2} est $\widehat{\theta} = \frac{T^2}{n^2}$. Quelles sont l'espérance et la variance de $\widehat{\theta}$?

d) Calculer la borne de Cramer-Rao pour la variance d'un estimateur sans biais de θ^{*2}.

e) Calculer la variance de S et comparer les risques quadratiques de S et $\widehat{\theta}$ entre eux puis à la borne trouvée en c). Quelles sont vos conclusions ?

2 Lois Béta

On observe un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi P_{θ^*} de densité

$$f(x, \theta^*) = \frac{1}{\theta^*}(1-x)^{\frac{1}{\theta^*}-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad \theta^* \in \mathbb{R}_*^+.$$

1) Calculer la vraisemblance du modèle et donner une statistique exhaustive.

2) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_n de θ^*.

3) On pose $Z = -\log(1-X)$. Montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

4) Donner en les justifiant les propriétés de T_n : risque quadratique, consistance, optimalité. T_n est-il un estimateur efficace ?

5) Etudier la limite en loi de $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ si $n \to \infty$. En déduire un intervalle de confiance approché de risque 3% pour θ^* si $n = 100$.

$$\text{Fonction de répartition de la loi } \mathcal{N}(0,1) : \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

x	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000