**Examen du 10 mai 2006**

*Durée 3h-Aucun document autorisé-Calculatrices scientifiques autorisées*

# 1 Un test d'hypothèse simple

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n$-échantillon de densité $f$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On veut tester

$$H_0 \qquad f(x) = \frac{1}{\log 2(1+x)} \qquad |H_1 \qquad f(x) = 1.$$

On pose pour $j = 1, \ldots, n$,

$$Y_j = \frac{2\log(1+X_j)}{\log 2}.$$

Exprimer à partir des variables $(Y_j)$ la procédure de test optimale. Application numérique : pour $n = 100$ et une erreur de première espèce de l'ordre de 5%, que décide t'on si la moyenne empirique observée des $(Y_j)$ est 1,15 ?

# 2 Modèle linéaire

On considère le modèle de régression

$$Y_j = a^* + b^* x_j + \varepsilon_j, \quad j = 1 \ldots n \geq 2.$$

Les $x_j$ sont pour $j = 1 \ldots n$ donnés et prennent au moins deux valeurs distinctes. Les variables aléatoires $\varepsilon_j$ ($j = 1 \ldots n$), sont i.i.d. de loi gaussienne centrée et de variance $\sigma^{*2}$. Les paramètres inconnus du modèle sont $a^*$, $b^*$ et $\sigma^{*2}$.

a) Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres $a^*, b^*$ et $\sigma^{*2}$.

b) Construire un intervalle de confiance pour $a^*$.

c) Tester l'hypothèse $b^* = 0$.

d) Soit maintenant $X_1 \ldots X_n$ un $n$-échantillon de loi uniforme sur $[0,1]$. On considère maintenant le modèle

$$Y_j = \alpha^* + \beta^* X_j + \xi_j, \quad j = 1 \ldots n \geq 2.$$

Ici les variables $\xi_j$ ($j = 1 \ldots n$), sont i.i.d. centrées de variance $\sigma_0^2$ (mais ce ne sont pas nécessairement des gaussiennes). On suppose de plus que les suites $(X_j)$ et $(\xi_j)$ sont indépendantes. On reprend les estimateurs trouvés à la question a) où les $x_j$ sont remplacés par les $X_j$. Appelons $\widehat{\alpha_n}$ et $\widehat{\beta_n}$ ces estimateurs. Montrer que $(\widehat{\alpha_n}, \widehat{\beta_n})$ converge presque sûrement vers $(\alpha^*, \beta^*)$.

# 3 Bateau

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi sur $\mathbb{Z}$ est donnée par

$$P(X = x) = Ca^{*|x|} \quad x \in \mathbb{Z}, \;\; 0 < a^* < 1, \;\; C > 0.$$

a) Calculer la constante $C$.

b) On observe $X_1, \ldots, X_n$ un $n$-échantillon de même loi que $X$. Montrer que l'on est ici dans le cadre d'un modèle exponentiel dont on précisera la statistique exhaustive minimale. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $2a^*(1 - a^{*2})^{-1}$. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a_n}$ de $a^*$.

c) Calculer l'information de Fisher du modèle et en déduire la variance asymptotique de $\widehat{a_n}$.

# 4 Estimateur non paramétrique

Soit $f$ une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f''$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f$ est une fonction paire et que

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx < +\infty.$$

On pose pour $\theta, x \in \mathbb{R}$, $f_\theta(x) = f(x-\theta)$. Soient $\theta^*$ un réel fixé, et $X_1, \ldots, X_n$ un $n$-échantillon de densité marginale $f_{\theta^*}$. Le but de cet exercice est de construire et d'étudier des estimateur de $\xi^* = f(\theta^*)$.

1) Montrer que la moyenne empirique de l'échantillon (notée $\overline{X_n}$) est un estimateur sans biais de $\theta^*$. Montrer que cet estimateur est fortement consistant étudier précisément sa vitesse de convergence.
2) Pour estimer $\xi^*$ on propose l'estimateur empirique $\widehat{\xi_n} = f(\overline{X_n})$. Quelles sont les propriétés asymptotiques (convergence, vitesse en loi) de cet estimateur.
   Indication : utiliser un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $f$ au voisinage de $\theta^*$.
3) Soit $(a_n)$ une suite de réels qui décroît vers 0, quand $n$ tend vers l'infini. On suppose que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. On pose

$$T_n = \frac{1}{2na_n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{[-a_n, a_n]}(X_j).$$

   Monter que $T_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\xi^*$.
   Calculer $\lim_{n\to\infty} na_n \mathrm{Var} T_n$. en déduire que $T_n$ converge en probabilité vers $\xi^*$. Quel estimateur choisir entre $\widehat{\xi_n}$ et $T_n$ ? Commenter le résultat.

Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ : $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$

| **x** | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |